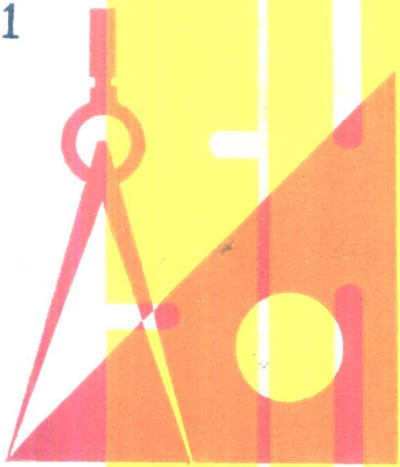
日本



数学(I)高考试题700选

湖北人民出版社

数学（Ⅰ）高考试题700选

〔日〕木村勇三等　编著

李树棠　译

湖北人民出版社

数学（Ⅰ）高考试题 700 选

〔日〕木村勇三等编著

李 树 棠 译

·

湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行

湖北省新华印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本 22.75 印张 523,000 字

1982 年 2 月第 1 版 1982 年 2 月第 1 次印刷

印数：1--12,600

统一书号：7106·1612 定价：1.80 元

译 者 的 话

日本培风馆1978--1979年出版了一套数理化高考试题700选丛书. 丛书包括:《数学Ⅰ问题700选》、《数学ⅡB问题700选》、《物理Ⅰ·Ⅱ问题700选》、《化学Ⅰ·Ⅱ问题700选》. 这套丛书是根据日本现行高中教材的内容和体系, 选择日本各大学历届入学试题之精华而编成的.

本书按《数学Ⅰ问题700选》全文译出, 所含内容与日本高中现行教材《数学Ⅰ》的内容相对应, 包括有数与式子, 方程与不等式, 映射与函数, 三角函数, 平面图形和方程, 向量, 概率, 集合与逻辑等八章. 正文后附有全部问题的解答. 本书取材丰富、命题新颖、结构紧凑、编排合理, 对中学生系统复习并灵活运用所学知识、加强基本功训练、增强解题能力有较大的帮助, 既可供应届毕业生复习时使用, 亦可供在校学生学习时参考. 此外, 对于中学教师研讨国外中学教学状况、合理吸取国外教学经验, 本书或许也可提供某些有益的帮助.

本书翻译过程中发现原文有多处印刷错误, 在译文中对这些错误均作了改正, 其中一部分还以"译注"的形式作了说明.

陈国英同志为本书绘制了全部插图, 在此表示感谢. 热情欢迎广大读者对本书的翻译工作提出宝贵意见.

译 者

原 版 序 言

按照教科书学完一遍高中数学的学生，一旦解起高考试题来，大概总难免感到有点棘手．为了弥补这种不足，看来最好的方法还是利用一种合适的参考书对已学过的知识进行复习．这种参考书应具有如下特点："大量收集各种高考试题、模拟试题、新编问题，并加以分类．同时，整理出解答这些问题所必要的基本概念和重点．各类别中列有典型例题，而带有综合性且别具特色的问题则作为研究问题专门汇集在一起．"

根据这种见解，曾经编辑了《700选丛书》，并有幸地得到了很多读者由衷的共鸣．为了使该书更加完善，现根据现行教学大纲（1973年实施），以崭新的设想，改编出了《数学（Ⅰ）高考试题700选》．在精选问题和编排技巧等方面，均煞费苦心地对前丛书作了较大的改动．

本书系基于上述想法而编成的，其特点是：

1．按章·节编排，尽量做到由易到难．某章·节的问题解法，原则上不与后面的内容相关；在非涉及到后面内容不可时，都加上了适当的说明．

2．章下分节，各节由要点、例题、问题构成，章末另有研究问题．例题、问题、研究问题顺次编号，共计700题，最后添加了五次测验题．

3．各项说明如下：

〔**要点**〕 列举基本概念和重点．不单是罗列定理和公式，还指出重要的思路和技巧．〔**解说**〕 对要点加以说明和补充，

并指出与其它内容的联系.

〔**例题**〕 每5，6题中有一道例题. 它具有多方面的代表性. 〔**指南**〕 在仔细分析题意的基础上，提出解题方针. 〔**解**〕 根据指南作出示范解答. 〔**关键**〕 指出例题或解法的要点，主要技巧和手法等，以便能举一反三. 〔**别解**〕 是不拘常套的自由思考产生出来的优秀解答. 供各位读者鉴尝. 希望读者自己能够努力发掘别的解法.

〔**问题**〕 不仅从高考试题中择优选出，还收入许多新编问题. 难度较大的注有“*”号. 〔**研究问题**〕 其中编入涉及数节内容的综合题，以及高考中的高难试题. 〔**提示**〕 指出问题解答的要点.

〔**实力测验**〕 每次5题，共5次. 前面三次是适合国公立大学统考的题目，后面二次是同以前高考同样类型的题目. 每次预定90～120分钟，若能提前答完，则说明读者学力取得增进.

使用本书的各位读者，首先应该把独立解题作为指导思想. 如果时间宽裕，可先看书中要点、例题，接着解答未注“*”号的问题，待有了某种程度的自信之后，再向注有“*”号的问题、研究问题推进. 倘若时间有限，一边分析研究题意，一边阅读领会书末解答，而仅对于那些觉得难理解的地方再多花些时间精读，这也是一种可行之法. 希望读者根据自己的基础以及能够投入的时间，灵活使用本书.

书中如有不妥之处，请与培风馆联系，编者将甚感荣幸，深表谢意.

1978年8月　编　者

目　　录

第一章　数与式子

第二章　方程与不等式

[1] 指 700 道题序号，下同。

第三章　映射与函数

第四章　三角函数

第五章　平面图形和方程

第六章　向　量

第七章　概　率

第八章　集合与逻辑

问题解答

第一章 数与式子

1-1 整式的计算

1. 计算的基本法则

在数与式的计算中使用如下一些算律(法则):

(1) 交换律　　加法 $a+b=b+a$

　　　　　　　乘法 $ab=ba$

(2) 结合律　　加法 $a+(b+c)=(a+b)+c$

　　　　　　　乘法 $a(bc)=(ab)c$

(3) 分配律　　$a(b+c)=ab+ac$

(4) 指数法则　$a^m \cdot a^n=a^{m+n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$

　　　　　　　$(ab)^n=a^nb^n$

2. 乘法公式

(1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(2) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$　　(符号顺序相同)

(3) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

(4) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(5) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(6) $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2$

$$+(ab+bc+ca)x+abc$$

(7) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3\{=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)\}$

(符号顺序相同)

(8) $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$　(符号顺序相同)

(9) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$= a^3+b^3+c^3-3abc$

〔**解说**〕 1．乘法公式，除单个使用外，往往还可以几个重复组合使用．例如，设 $a+b=A$，则

$$(a+b+c)^2=(A+c)^2=A^2+2Ac+c^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{\text{平方的和}}+2\underbrace{(ab+bc+ca)}_{\text{每两个之积的和}}$$

2．利用乘法公式，可将有关式子作如下变形．

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$$

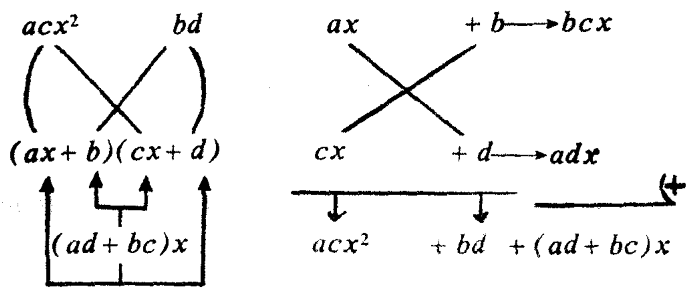
$$a^2+b^2=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$$

$$ab=\frac{1}{4}\{(a+b)^2-(a-b)^2\}$$

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$$

$$abc=\frac{1}{3}\{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\}$$

3．$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$，可按下述两种方法，直接写出计算结果．



例题 1（整式的值）

当 $a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=2$，$a^3+b^3+c^3=3$ 时，求下列各式的值：

(1) $ab+bc+ca$　(2) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

(3) abc

〔**指南**〕 (1) 考虑 $(a+b+c)^2$ 的展开式看看.

(2) 在原式 $=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$ 中，可作变形 $a^2(b+c)=a^2(a+b+c)-a^3$ 等.

(3) 利用 $(a+b+c)\{(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\}$ $=a^3+b^3+c^3-3abc$.

〔**解**〕 (1) $ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$

$$=-\frac{1}{2}\cdots〔答〕$$

(2) 原式 $=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$

$$=a^2(a+b+c)+b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)$$
$$-(a^3+b^3+c^3)=-1\cdots〔答〕$$

(3) 由于 $abc=\frac{1}{3}\{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\}$，将所给的式子和(1) 的结果代入其中，则得

$$abc=\frac{1}{3}\left[3-1\times\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\right]=\frac{1}{6}\cdots〔答〕$$

〔**关键**〕 下列等式，经常被使用，应牢记.

$$(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\{(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\}$$

〔**别解**〕 $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$$=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)-3abc$$

$= (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc$

故当上式左边的值((2)的结果)和(1)的结果求出时，便可求出 abc 的值．反之当 abc 的值已求出时，就可根据它和(1)的结果求出(2)的值(左边的值)．此外，利用如下等式也可解．

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3\{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\}+6abc$$

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-\{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\}=3abc$$

问　　题

2　化简下列各式：

(1)　$(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$

(2)　$(a+b+c-d)(a+b-c+d)+(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$

(3)　$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$

3　填充下列$\boxed{}$：

(1) 在 $(7x^3+12x^2-4x-3)(x^5+3x^3+2x^2-5)$ 的展开式中，x^5 的系数是 (a) $\boxed{}$，x^3 的系数是 (b) $\boxed{}$．

(创价大)

(2) 在 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+9x^8)^4$ 的展开式中，x^3 的系数是 (a) $\boxed{}$，x^4 的系数是 (b) $\boxed{}$．

4　(1) 设 $x+\dfrac{1}{x}=a$，试用 a 表示下列各式：

(i) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(ii) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$　　(iii) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$

(2) 当 $x+y+z=7$，$xy+yz+zx=14$，$xyz=8$ 时，求下列各式的值：

(i) $x^2+y^2+z^2$ (ii) $x^3+y^3+z^3$

(iii) $(x+y)(y+z)(z+x)$

(iv) $y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+x^2y+xy^2$

〔提 示〕

2 (1) 展开各项. (2) 作 $a+b=A$, $a-b=B$, $c+d=C$, $c-d=D$ 这样的部分归纳，便可得出有效的计算方法. (3) 由于四个括号中的字母是完全相同的，故可按一项的字母整理. 或者利用 $A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$.

3 (2)略去 5 次以上的项后平方，再略去 5 次以上的项. 这样，再平方后再略去 5 次以上的项.

1-2 整式的除法

1. 商式和余式

若整式 A 被整式 B 除后所得商式为 Q，余式为 R，则

$$A=B\cdot Q+R \quad (R\text{ 的次数低于 }B)$$

当 $R=0$ 时，叫做 A 被 B 整除(除尽).

2. 剩余定理

当 x 的整式 $f(x)$ 被 x 的一次式 $x-\alpha$ 除时，余式 R 为常数，且

$$R=f(\alpha).$$

而当 $f(x)$ 被 x 的一次式 $ax+b$ 除时，余式 R 也是常数，且

$$R=f\left(-\frac{b}{a}\right).$$

〔**解说**〕 1. 商式和余式的求法 例如，$A=x^3-4x+20$ 被 $B=x^2-x+1$ 除时，

（1） 直接计算法：

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+1 \\ \hline
x^2-x+1 & x^3 \qquad\quad -4x+20 \\
 & x^3-x^2+\ x \\ \hline
 & \qquad x^2-5x+20 \\
 & \qquad x^2-\ x+\ 1 \\ \hline
 & \qquad\quad -4x+19
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & & \\ \hline
1\ -1\ \ 1 & 1 & 0 & -4 & 20 \\
 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline
 & & 1 & -5 & 20 \\
 & & 1 & -1 & 1 \\ \hline
 & & & -4 & 19
\end{array}
$$

故，商式 $x+1$，余式 $-4x+19$

（2） 利用恒等式性质（P.77）的计算法：

设商式为 Q，余式为 R，则

$$A=B\cdot Q+R \quad (R\text{ 的次数低于 }B)$$

因为 A 是三次式，B 是二次式，故 Q 是一次式，R 是不高于一次的整式．因此，若设 $Q=ax+b$，$R=cx+d$，则

$$
\begin{aligned}
B\cdot Q+R &= (x^2-x+1)(ax+b)+cx+d \\
&= ax^3+(-a+b)x^2+(a-b+c)x+b+d
\end{aligned}
$$

由于它与 A 恒等，比较它们的对应项的系数可得

$$a=1,\ \ -a+b=0,\ \ a-b+c=-4,\ \ b+d=20$$

解此方程组，得 $a=1$，$b=1$，$c=-4$，$d=19$

故，商式 $x+1$，余式 $-4x+19$

2．剩余定理的证明 x 的整式 $f(x)$ 被 x 的一次式 $x-\alpha$ 除时，若设其商式为 $Q(x)$，余式为 R，则下式成立：

$$f(x)=(x-\alpha)\cdot Q(x)+R$$

此时，若仅求余式，则将 α 代到上式的 x 中，

$$f(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot Q(\alpha)+R=0\cdot Q(\alpha)+R=R$$

$$\therefore\quad R=f(\alpha)$$

$f(x)$ 被 $ax-b$ 除时的余式也可完全同样地证明．从以上证明可知，用 $x+\alpha$，$ax+b$ 除时的剩余，就是以 $x+\alpha=0$，$ax+b=0$ 的根 $x=-\alpha$，$x=-\dfrac{b}{a}$ 代入 $f(x)$ 所得的结果，它们分别

为 $f(-\alpha)$，$f\left(-\frac{b}{a}\right)$.

3．综合除法　剩余定理虽然能很快求出整式 $f(x)$ 被 x 的一次式 $x-\alpha$ 除时的余式 R，但根据它还无法知道商式 $Q(x)$. 现在，用 $x-\alpha$ 除 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，若设其商式为 $Q(x)=px^2+qx+r$，余式为 R，则有

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-\alpha)(px^2+qx+r)+R$$
$$=px^3+(q-\alpha p)x^2+(r-\alpha q)x+R-r\alpha$$

成立. 由此可看出两边各项系数间有如下关系：

$$p=a,\quad q=b+\alpha p$$
$$r=c+\alpha q,\quad R=d+r\alpha$$

据此，可把由 $f(x)$ 的系数求 $Q(x)$ 的系数和 R 的计算归纳成如下形式：

（$f(x)$ 的系数）

$$\begin{array}{r|cccc}
\underline{\alpha} & a & b & c & d \\
+) & & p\alpha & q\alpha & r\alpha \\
\hline
 & p & q & r & \boxed{R}
\end{array}$$

商式的系数　余式

（比 $f(x)$ 低 1 次）

(1) 将 $f(x)$ 的系数降幂排列，所缺项的系数为 0.

(2) 在左上角写出 $x-\alpha=0$ 的根 α.

(3) 将 a 原封不动地挪下来，并记作 p.

(4) 在 b 下写上 p 同 α 的积 $p\alpha$，它同 b 相加的结果记作 q.

(5) 在 c 下写上 q 同 α 的积 $q\alpha$，它同 c 相加的结果记作 r.

之后，重复上述步骤.

利用上述形式，可求出商式 $Q(x)$ 和余式 R，这种方法叫做综合除法.

例如，用 $x+2$ 除 $f(x)=2x^4-8x^2-3x+1$ 时，按下面的