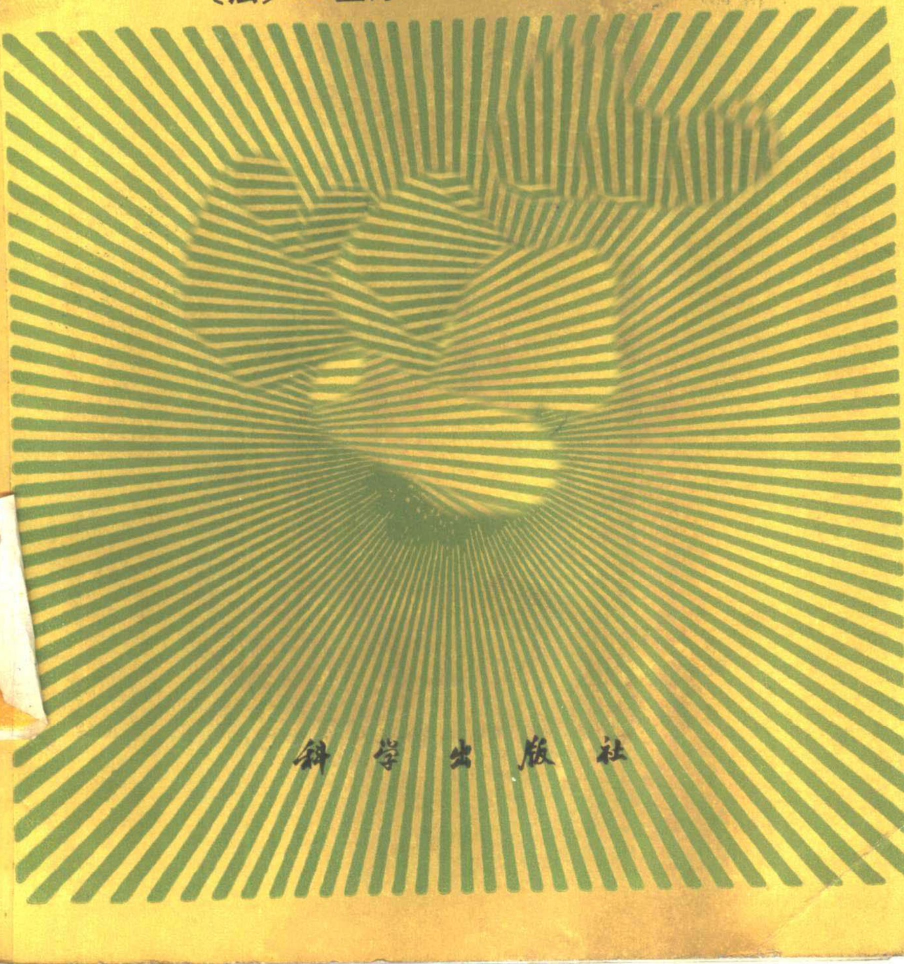
量子散射理论的逆问题

〔法〕K. 查丹 P. C. 萨巴蒂尔 著



科学出版社

内 容 简 介

量子反散射理论是研究非线性偏微分方程和孤子理论的有力工具，它广泛应用在物理学，化学及各种交叉学科．作者是著名的量子散射理论专家．

全书共十七章，分为三部分．第一部分（第一、二章）总结势散射理论的结果；第二部分（第三一八章）讨论以相移为基础的固定 l 反散射问题；第三部分（第十一十五章）从散射截面出发，致力于研究固定能量逆问题的各种方法，同时还向读者介绍当代尚未解决的重要课题．本书前言概述了量子散射理论的发展史；此外，书中列出的参考文献有助于学习正文．

本书可供大学物理系高年级学生，研究生以及从事理论物理、理论化学和应用数学研究的有关人员参考学习．

K. Chadan P. C. Sabatier

INVERSE PROBLEMS IN QUANTUM SCATTERING THEORY

Springer-Verlag, 1977

量子散射理论的逆问题

〔法〕K. 查丹 P. C. 萨巴蒂尔 著

张天元 译

张本爱 校

责任编辑 赵惠芝

科学出版社出版

北京市东黄城根北街16号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989年5月第一版	开本：787×1092 1/32
1989年5月第一次印刷	印张：13 3/8
印数：0001—1,560	字数：294,000

ISBN 7-03-001008-6/O·243

定价：12.40 元

前　言

我们可以概括地认为物理学家的正常工作是在已知作用力的基础上预言粒子的运动，或者根据已知物质结构来预言辐射的传播．逆问题则是根据所观察到的运动来推断作用力或物质结构．我们对周围世界的大部分感性认识依赖于这样一类逆问题的解：当我们的眼睛观察到了物体的散射光和吸收光时，就可以推断出这些外界物体的形状、大小和表面结构．我们用散射实验来研究粒子的大小、形状和粒子间的相互作用力，虽然比较精密，不过问题的本质是相同的．通常假设运动学(运动方程)是已知的，要探索的是作用力及其逐点变化的规律．

我们知道，Lord Rayleigh 提出过许多物理概念，而且在 1877 年，他首先涉及到本书所讨论的逆问题．在描绘变密度弦的振动过程中，他曾简略地讨论过利用振动频率推断弦的密度分布的可能性．70 多年后，公认这是数学上研究逆谱问题的先驱．Mac Kac (1966) 在题为"从声音能够听出鼓的形状吗?"的著名讲演中，给出了问题的近代类比和推广．

随着薛定谔方程的提出，在所规定的边界条件下，同微分方程谱论相联系的数学概念在物理学中的应用范围大大扩充了．过去仅用于机械振动的那些方程，现在可用来描述原子和分子．Rayleigh 提出的问题过了 53 年，又从新的角度提出来了．1929 年，Ambarzumian 受到薛定谔逆问题的启发，研究了二阶常微分方程本征值的唯一性问题．在这之前，人们确信运动学就能探测物体间的作用力．

Borg (1946) 最先利用 Sturm-Liouville 系统的谱数据来认真地研究过该系统的重构函数或边界条件的特殊问题，Levinson (1949) 和苏联数学家 Chudov (1949, 1956) 以及 Marchenke (1950, 1952, 1953, 1955), Krein (1951, 1953, 1954, 1955), Gel'fand 与 Levitan (1951), Levitan (1949, 1956, 1963, 1964), Berezanskii (1955, 1958), Levitan与 Gasymov (1964) 相继对该问题进行了深入细致的探讨.

与此同时，物理学家也着手利用分子谱的实验知识，和实际可行的办法来推断原子间的相互作用势.Morse (1929) 以严格可解的特殊模型开始研究此问题之后，Rosen 与 Morse (1932), Crowford 与 Jorgensen (1936) 沿着这个方向继续开展工作. Pöshl 与 Teller (1933) 以类似的精神也研究过非谐振子模型，不过后来发现，用这种方法来了解分子间相互作用力的效果不好.

Rydberg (1931) 提出了一种更有希望的方法. 他是用玻尔-索末菲量子化规则，由观察到的分子谱来构造势曲线. Klein (1932) 把这个想法发展成在量子力学中系统地使用半经典近似的方法，此后，Rydberg (1933) 和 Rees (1947) 继续研究其各种特殊应用.

正是半经典方法，孕育了一种新思想，以便从连续谱的实验知识来推断作用力: Hoyt (1934) 借助于 Abel 积分，由散射数据来获得粒子间的相互作用势曲线. 以后，Firsov (1953), Sanders 与 Muller (1963), Mosen 与 Monckik (1967), Miller (1968, 1969, 1971), Buck 与 Pauly (1969, 1971), Buck (1971), Boyle (1971), Klingbeil (1972), Pritchard (1972) 等重新探讨了这个问题，并且由 Buck (1974) 与 Wheeler (1976) 作了总结，而 Wheeler 的论述

更为清晰.

1939年后爆发第二次世界大战，使大部分研究中断了.战后，Fröberg（1947，1948，1949，1951）开辟了一条崭新的研究途径.主要想法是从中心势的薛定谔径向方程出发，通过已知角动量的散射相移来重新构造势曲线，而不用JWKB近似方法.为此，Hylleraas（1948，1963，1964）提出了一种特殊的构造法.不过这种方法有缺陷，正如Bargmann（1949）所证明的，从全部正能量所给的某一角动量下的相移曲线，能够推断中心势，但结果可能不是唯一的.如果不存在束缚态，Levinson（1949）重新证明上述解的唯一性.就在那时，Marchenko（1950）考察了唯一性问题，然后他发起讨论上述的一系列数学问题，尤其是Gel'fand与Levitan（1951）的著名论文达到了顶峰.

那时，散射理论显然比战前复杂多了.Wheeler（1937）和Heisenberg（1943，1944）首先提出S矩阵，随后Heisenberg猜测在S矩阵中包含着所有的物理知识.这意味着，体系的束缚态应该由散射态获得.通过能量的解析延拓可得到其他信息.人们料想，就某一已知角动量而言，S矩阵本征值的零点(亦即在另一叶黎曼面上的极点)表征同一角动量的束缚态.结果发现，有"多余的零点"跟束缚态没有关系，这是对Heisenberg方案的沉重打击，那时有许多文章讨论过这些零点[Ma（1946，1947），Wildermuth（1949）和Van Kampen（1951）].Bargmann（1949）关于散射相移跟束缚态没有关系的论证解决了这个问题.在相移跟同一角动量的束缚态之间存在唯一的关系包括在目前最著名的Levinson定理中.Jost，Kohn（1952）和Holmberg（1952）对位相等价的势函数族，也就是产生相同束缚态的势函数给予清晰的论述.

Jost和Kohn（1952）当时提出一种系统的新方法，他

们按无穷级数的形式由某一角动量的相移和相应的束缚态构造势函数. Moses (1956) 和 Prosser (1969, 1976) 继续发展了这一思想. 然而更巧妙的方法是根据 Gel'fand 与 Levitan (1951) 的结果, 经 Jost, Kohn (1953) 和 Levinson (1953) 发展起来的;相比之下,前一种方法就逊色了. Krein (1953, 1955) 和 Marchenko (1955) 迅速对后一种方法作了重要的改进与推广.

这种方法以两种不同形式的线性积分方程为基础, 一个是 Gel'fand 和 Levitan 提出的,另一个是 Marchenko 提出的. 由于方法的威力和形式的优美, 它迄今依然是求解大多数反散射问题的标准和模式.它的一般特点是形式比较抽象, 在 Kay 与 Moses (1955, 1956, 1957) 的许多文章中还被用来解决某些其他问题.

利用上述普遍的反演法获得了最重要的两个成果: 一个是势的无限函数族的显示结构, 对这种势可自成系统地解出任一角动量的薛定谔径向方程 [Bargmann (1949), Fultan, Newton (1956) 和 Theis (1956)]; 另一个是"透明"势函数族的显示结构, 这种势函数绝不引起任何能量下某一角动量的散射 [Moses, Tuan (1959), Chadan (1967)].

以 Gel'fand-Levitan 方程为基础,不久, 这种有力的反演法被推广到联立微分方程组形式, [Newton, Jost (1955), Agranovich, Marchenko (1957)], 并由此应用到粒子具有自旋的反散射问题中 [Newton (1955), Agranovich, Marchenko (1958)]. 此后, 这个方法基本上可认为是完整的,并在Faddeev (1959) 和 Agronovich 与 Marchenko(1963) 的两篇评论文章里得到了总结.

该领域近期在以下各方面发展: 即在具有已知能量差的耦合道 [Cox (1962, 1964, 1966, 1967), Cox, Garcia

(1975)]、能量关联势 [Mal'cenko (1966), Jaulent (1972, 1975), Jaulent 与 Jean (1972, 1975)] 以及相对论方程等方面 [Corinaldesi (1954), Verde (1959), Prats 与 Tol (1959), Gasymov 与 Levitan (1966)、Gasymov (1967, 1968), Weiss (1971), Weis 等 (1971, 1972)]. Newton (1975), Fulton 与 Newton (1956) 以及 Blazek (1962) 等一定程度地用这些结果来解释实验数据; Jost (1956), Swan 与 Pearce (1966), Swan (1967) 等用它来作近似处理.

为了利用根据 Gel'fand-Levitan 方程和 Marchenko 方程提出的方法,通过相移作出势函数,就必须了解相应于全部能量的散射.鉴于无法在实践中得到全部能量的散射数据,最好的办法是研究势的部分信息,该信息可以由相移矩那样的有限数据来获取.虽然相移矩是一些积分,能量从零到无穷大变化时,积分内的相移是能量的函数,但是在高能区,不同的矩有不同的权函数.因而相移矩非常适合作近似计算.研究这个问题的 15 年发展史是从 Newton (1956) 和 Faddeev (1957) 开始的.Buslaev 与 Faddeev (1960) 等相继研究了这个问题,并且逐步推广到较大的范围 [Buslaev (1962), Percival (1962), Percival, Roberts (1963), Roberts (1964, 1965), Calogero 与 Degasperis (1968)], 最后, Calogero (1971) 作了总结.接着, Degasperis (1970) 和 Corbella (1970, 1971) 把这些方法推广到相对论方程上. Roberts (1963) 讨论了各种近似计算, Calogero 等 (1968) 用类似的办法导出了势函数的变分界.

这时注意到,利用全部能量所给出的单个相移去构造基础的势函数这种想法相当不实际,在物理学上也不能令人满意,因为在能量很高时,非相对论运动学的假设可能不成立,严格说来,它是违背自然规律的.我们必须充分了解所有能

量的散射振幅，在全部信息中只包含一个相移是毫无用处的．比较简单而实在的方法是用整个散射振幅，或者由所有的相移来构造某一能量点的势函数．Wheeler（1955）和 Keller 等人（1956）在 JWKB 近似的基础上，Regge（1959）根据角动量变数的解析延拓，Martin 与 Targonsky（1961）采用汤川叠加势的办法，在这方面都作过一些尝试．

Newton 根据对 Gel'fand-Levitan 方程的类比，在 1962 年提出一种更普遍的固定能量构造法，并且证明不能单值地得出势函数．在 Sabatier（1966，1967，1968）和 Newton（1967）的许多文章里，对该方法有重大突破和进一步发展．从广泛的函数类中，能找出生成已知相移的全部势函数，从这个意义上说，Sabatier 的新方法是固定能量下逆问题的完全解［Sabatier（1972，1974），Jean 与 Sabatier（1973）］．Sabatier（1973）按半经典的观点阐明反演过程的不确定因素．深入研究 Regge 观点的人是 Loeffel（1968）．后来 Sabatier（1968）和 Hooshyar（1971，1975）把固定能量法推广到有自旋的粒子上，再经 Hooshyar（1972）扩充到角动量关联势的情况中．

至此，上述所有方法限于用在中心势的散射上，或者说对于粒子有自旋的情况，只用于转动不变的自旋关联作用所引起的散射．在由散射振幅来推测普遍的非中心相互作用势函数时，出现过许多困难．在电磁作用下，Lax 与 phillips（1967）得到某些结果，可是以 Gel'fand-Levitan 方程或 Marchenko 方程为基础的方法不容易推广．在非中心情形下，散射振幅是五个变量（二个初态角，二个末态角和一个能量）的函数，然而，作为基础的势只是三个变量的函数，这一事实表明，这种振幅必须受到某些强条件的约束而不是任意确定的．再则，Gel'fand-Levitan 和 Marchenko 方法的基础是

具有类似三角矩阵那样的三角形积分核。该性质不容易推广到高于一维的情形。Kay 和 Moses (1961) 在这方面作过尝试,这是就非定域势来研究的,因而不能保证定域势的特点。

在高于一维的情况下, Faddeev (1965, 1966) 提出了有用的三角形积分核的基本内容,随后, Faddeev (1971) 和 Newton (1973, 1974) 各自独立地研究了真正的三维反散射问题。然而,这个领域内仍然有某些重大问题没有解决,因此,不能认为彻底解决了三维反散射问题。

当推广到非中心势以外时,可以提出任意非定域相互作用的反散射问题。然而,从简单计算变量的数目(三维积分核是六个变量的函数, 散射振幅只是五个变量的函数)就会明白,如不加进某些限制条件,问题就不是适宜的。这些限制条件的特点很难以自然的方式来明确地阐述非定域相互作用的反散射问题。虽然能量很高时,定域势的确没有意义,但是从非相对论来看,定域势在物理上还是合理的。

事实上,一类非定域相互作用(速度关联作用除外)已广泛用于核物理学,其相互作用是有限秩的。原因在于这类相互作用下可用求积法来获得薛定谔方程的显示解。这在许多应用及各种模型计算中是一个突出的优点。然而这不是由物理学的考虑来使用非定域相互作用的。可以采用比定域势简单得多的方法来求解可分势的反散射问题, Gourdin 与 Martin (1957, 1958), Bolsterli 与 Mackenzie (1965) 已这样做了。Chadan (1958, 1967) 作了推广,接着, Mills 与 Reading (1969), Tabakin (1969) 解决了普遍的有限秩相互作用问题。

多年来有这样一个明显的事实,自从 Hoyt 在 1939 年第一次试图由散射数据来推测粒子间的相互作用势以来,反演法的出发点就是散射振幅,尽管事实上,实验观察到的只是振

幅的模平方——截面，由振幅的模系统地推测复数振幅，以及包含在推论中的各种可能的不定因素，都是没有认真提出来的问题，一些出名的有自旋的粒子是例外，此时，极化数据不完整是急需解决的问题.

利用广义光学定理或者 S 矩阵么正性的思想，作为由微分截面来确定散射振幅位相的方法，首先是 Klepikov (1964)，然后是 Newton (1968) 和 Martin (1969) 各自独立地提出来的. 在他们的文章里，广义光学定理作为振幅位相的非线性积分方程，确保位相函数存在性和唯一性而施加在微分截面上的条件，则是通过著名的不动点定理得到的. 接着，Gerber 与 Karplus (1970)，Tortorella (1972，1974，1975) 和 Atkinson 等 (1972) 把这些初步结果加以扩充、完善和推广. 以后的工作是在复能量或动量转移平面中引进有物理意义的解析性条件，以消除不定因素 [Burkhardt (1972，1974)，Martin (1973)，Itzykson 与 Martin (1973)，Atkinson 等 (1973，1974，1975)，Burkhardt 与 Martin (1975)]. 从某种程度上说，这个问题仍然没有解决，因为保证位相函数存在和唯一的所有已知条件对大多数有物理意义的情况不适用.

值得一提的是密切相关的两类发展. 首先是反散射问题的一维描述，亦即逆反射问题. 这是一个有实在意义的问题，而且也可作为数学上论证三维反散射问题的重要基础. Kay 与 Moses (1956) 以及 Faddeev (1958，1964) 研究和解决了这个问题. 另一个是反散射问题的离散描述. Case 与 Kac (1973) 以及 Case (1973，1974) 模仿连续描述方式获得了该问题的解. 从输运理论来看，该方法的一大优点是它很直观.

最后，反散射问题的研究结果有十分可喜的重要应用，

Gardner 等 (1967) 发现，可把反散射的结果用来解某些非线性波动方程。一维薛定谔方程中最简单的单参量势函数族保持方程的谱是不变量，而势函数族作为该参量的函数，早就发现它满足 Korteweg-de Vries (KDV) 方程(在 KDV 方程中，此参量可当作“时间”)。而且，薛定谔方程的正则解作为该参量的函数，其远距离的渐近行为是它使反射系数只有单纯的相变。因此，Korteweg-de Vries 方程的初值问题可借助逆反射问题来求解。势看作时间的函数是已知反射系数的基础，对所有的“时间”来求解 Korteweg-de Vries 方程可确定这个势。薛定谔方程的束缚态能量相当于孤子 (KDV 方程的孤波解) 的传播速度。

自从反散射问题解的意外用途被精心研究，和推广到其他非线性波动方程以后，它就在物理学中有重要的应用。Scott 等 (1973) 总结了这种方法和有关结果，然而这方面的大量研究工作还在进展中。

牛顿 (R. C. Newton)

1977 年 2 月

印地安纳·布卢明顿

绪　　论

物理定律的数学表述是一种法则，它定义一个映射 $\mathscr{M}$，把叫做参量的函数集 $\mathscr{C}$ 映射到叫做结果的函数集 $\mathscr{E}$ 上.这种法则通常是一个方程组 E，其中参量是 $\mathscr{C}$ 的元素，解是 $\mathscr{E}$ 的相应元素，因此，$\mathscr{M}$ 的定义十分复杂. 然而，根据映射定义本身判断，对于参量集 $\mathscr{C}$ 的任一元素，在结果集 $\mathscr{E}$ 内必定存在方程组 E 的解，而且解一定是唯一的. 这是必须施加在 E 上的唯一的约束条件. 我们可以由参量集 $\mathscr{C}$ 的元素求得结果集 $\mathscr{E}$ 的元素，于是，我们把 $\mathscr{E}$ 的元素叫做"计算结果". 对应于参量集 $\mathscr{C}$ 的给定元素导出的"计算结果"叫做"**解正问题**". 反之，对应于结果集 $\mathscr{E}$ 的给定元素求得参量集 $\mathscr{C}$ 的子集叫做"**解逆问题**".

要给 $\mathscr{M}$ 一个物理意义，就必须让 $\mathscr{E}$ 的诸元素可以与各种实验结果相比较. 以下我们假定，任意的有关测量结果都是 $\mathscr{E}$ 的子集 $\mathscr{E}_e$ 的元素，子集 $\mathscr{E}_e$ 叫做实验结果集. 因而 $\mathscr{E}$ 包含实验结果和计算结果的并集. 我们还假定，可以给 $\mathscr{E}$ 赋予一个度规空间结构. 于是，某个已知的计算结果 e_i 和实验结果 e_j 之间的比较，由距离 $d(e_i, e_j)$ 度量.

集合 $\mathscr{C}$ 可以定义为方程组 E 可解的函数集. 通常较强的限制来自所考虑的"物理特性". 换言之，参量集 $\mathscr{C}$ 可能是方程组 E 可解的所有函数的集合 $\mathscr{G}$，这些函数完全与一般原理或过去测量的"物理信息"一致. 不过在大多数情况下，$\mathscr{G}$ 的定义是间接的，并且很难做到准确，因此，我们要在函数集 $\mathscr{G}$ 中选择一个方便的有明确定义的子集作为参量集 $\mathscr{C}$. 另

一方面，有时想扩充 $\mathscr{C}$ 的定义，以引进一些新的"参量"类，使得正问题和逆问题都可解. 我们将看到这一事实的最新论述.

从这些定义来看，好象所有的物理问题都是逆问题. 实际上，有些问题是对结果集 $\mathscr{E}$ 到参量集 $\mathscr{C}$ 的广义逆映射来寻找准确的数学形式，我们通常把这类问题才叫做逆问题. 这不包括所谓的"拟合法"，该方法的各种模型与少数参量有关，并且利用尝试法和其他方法可以精确地拟合实验结果. 本书致力于研究量子散射理论的逆问题. 因此，实验结果是各种散射实验的可观测量，例如截面和有关量. 既然这些物理量与波函数的渐近行为有联系，那就得考虑这样一些问题. 其中集合 $\mathscr{E}$ 包含渐近行为的"理论测量"，譬如说，散射振幅或相移. 自然，这就提出了由截面来构造散射振幅的特殊问题. 此外，定义映射 $\mathscr{M}$ 的那些方程 E 是波动方程构成的(如薛定谔方程，克莱因-戈登方程，狄拉克方程及其相应的条件). "参量"集 $\mathscr{C}$ 是"定域势"或"非定域势"的集合，利用它们有可能预言散射结果.

我们觉得没有必要强调这些问题的重要性. 因为我们在核物理、粒子物理和亚粒子物理学中能够获得的一切知识，都是由散射实验得来的，所以散射实验在物理上的重要性是显然的. 作为数学问题来说，其真正的意义与下列各门分析学密切相关：微分方程和积分方程的最新成果、调和分析、算子的谱理论、全纯函数、渐近展开和数值分析，所有这一切都必须研究这些不适定问题.

本书共十七章，前两章是导论，概述十分有用的势散射结果. 第十六章研究各种近似方法，第十七章研究"一维逆问题"，其余十三章分成两部分. 在那里，我们要讨论一些球对称势问题.

第一部分（第三章到第八章）所分析的“结果”是相移 $\delta_l(E)$（它是所有正能量 E 的函数），以及其他一些别的知识（如束缚态）。相应的逆问题叫做“固定 l 的逆问题”。第三章将详细论述所谓的 Gel'fand-Levitan-Jost-Kohn 方法。我们已决定研究比常用势广泛得多的一类情况，其优点是它们与物理学上很重要的一类相移一一对应。因此，我们先全面研究 $l=0$，然后研究 l 为任意整数的球形势薛定谔方程。第四章讨论 Gel'fand-Levitan 方法的某些普遍应用：我们将要构造出几类只有束缚态不同，或者位相等价的势函数，还要构造 Jost 函数相互间只差一个有理函数因子的（Bargmann 势）其他几类势。我们还要导出所谓 Marchenko 定理，它把已知的渐近 S 函数 $S(k)$ 与一些薛定谔算符联系起来。Marchenko 方法在第五章研究，对于薛定谔算符具有球对称势的简单情况讨论得很仔细。用谱方法所得的结果将在第六章通过实例进行自成系统的说明（Bargmann 势，奇异振子势）。第七章对几类特殊势函数的固定 l 逆问题，作全面或部分研究，所关心的是汤川势（Martin 方法和 N/D 方法）和全纯势（所谓的求迹法）。在第八章我们把非定域相互作用引进薛定谔方程内，全面研究非定域可分相互作用和不可分相互作用的逆问题。第九章给出解决固定 l 逆问题的各种方法，从这一章介绍的许多方法，自然地过渡到本书的第二部分。这章还要介绍现代文献中至今没有解决的许多问题。

本书第二部分（第十章到第十五章）专门研究“实验结果”为截面的问题，当然，这是十分现实的情况。我们在第十章研究那些看起来简单而实则很难的问题，就是如何从截面出发构造散射振幅。假设完全求得已知能量的结果后，我们在以下三章说明怎样才能作出相应的势函数：第十一章讨论一般结果和需要回答的一般问题。第十二章介绍各种矩阵方法（如

所谓 Newton-Sabatier 方法)，其中参量类 $\mathscr{C}$ 定义为它的元素是经过某个 u 的逆映射从"实验"散射振幅作出的. 换言之，$\mathscr{C}$ 是集合 $\mathscr{E}$ 通过这个映射产生的象，因此，它是一个特殊的参量类，其逆问题存在着由特殊矩阵所得的简单解. 第十三章研究几种算符方法，其中势函数类$\mathscr{C}$是在物理学基础上预先确定的. Gel'fand-Levitan 方法推广到这个问题就是 Regge 和 Loeffel 方法，而"完全解"是矩阵方法最大限度的推广. "完全解"使我们能回答第十一章所提出的所有一般问题. 我们将在第十四章介绍解三维逆问题的一种尝试：就是从全部能量的散射振幅的知识作出势函数 $V(\boldsymbol{r})$. 跟过去的欠定逆问题相比，现在的问题大大超定了，确保解存在性的相容性条件至今还不完全清楚. 作为这一章的引言，我们比较了用在简单情形的几种方法. 这有助于理解问题的结构，虽然有些复杂，但相互间没有根本差别. 第十五章讨论固定能量逆问题方法，从中吸取方法的精髓，以利于研究更普遍的问题.

第十六章是关于近似方法的，究竟要讨论哪些问题很难办. 我们选定的大部分情况是讨论那些对于结果集 $\mathscr{E}$ 到参量集 $\mathscr{C}$ 的广义逆映射均有自成系统的近似结果的情形. 我们没有叙述计算机数值方法. 另外，我们在这样做之后，就可讨论半经典方法，有时这种方法会给我们的课题展现新的前景. 譬如，读者将看到，所引用的 RKR 方法就是那样，虽然离散谱确定微分方程显然超出了本书的范围. 很清楚，我们没有明确指出所研究课题的界限. 譬如，我们在第十七章将举例说明逆问题是广义变换，并且用来解非线性偏微分方程，但是我们在这里研究这些问题就离题太远了. 它在各方面的应用，诸如由某些离散谱一起来确定微分算子、线性逆问题和经典反散射问题，以及所有这一切在化学、地球物理学、声学和电磁

学研究方面的应用，其本身就可形成一本书，我们二者之一（P. C. Sabatier）希望有朝一日能够从事这项任务．最后一章叙述一维逆问题及某些直接应用．很明显，本书两部分的侧重点稍有不同．固定 l 逆问题比固定 E 逆问题研究得久些，现在有许多问题虽然已完全解决了，但我们还是要全面讨论这些问题，同时尽快考察它们在各方面的推广，但重点放在物理学家既需要又感兴趣的东西上．特别是，我们选定的那些论证是物理学家应当熟悉的，对于数学家所喜爱的严谨细致的论证，我们经常只给出参考文献．固定 E 的逆问题研究得晚些，我们始终没有找到这类问题的严格简练的结果，因此，我们在写书时必须很谨慎．另外，由于物理学方面的应用更直接，我们必须仔细比较获得解的各种可能手段，从中选出某些构造方法．本书两部分的"结构"稍有不同；产生差别的原因之一可能是由于第一章到第八章和第十七章基本上是 K. Chadan 写的，第九章到第十六章则是 P. C. Sabatier 写的．

有三篇评论性文章：Faddeev 的述评（1963），Martin 关于由截面构造相移的讲演（1973）和 Newton 的讲演（1966—1973），特别是关于三维逆问题的讲演，给了我们很大帮助．众所周知，这三位物理学家最近 20 年在研究大多数重要的逆问题方面共同作出了极大的贡献．鉴于著有成效的讨论，我们要感谢上述科学家以及同他们一道工作的所有物理学家．由于他们对一些特点的解释，增进了我们对量子散射理论逆问题的认识，特别是 Atkinson, Cox, Loeffel 三位教授以及我们的朋友 Jaulent 和 Miodek 博士在第九章和第十七章为我们作出的一切贡献．我们没有忘记另一个重要的来源，就是 L. Colin（1972）主编的 NASA 报告"轮廓反演数学"（Mathematics of Profile Inversion），该报告对许多交叉学科的逆问题研究很有帮助．此外，我们二者之一（P.

C. Sabatier）特别受益于 R. G. Newton 教授，他从各方面帮助 P. C. Sabatier 理清各种逆问题，还热情地给本书写了前言。