工商管理、市场营销本科系列教材

概率论与数理统计

Gailülun Yu Shuli Tongji

主编　邱敦元

重庆大学出版社

工商管理、市场营销本科教材

概率论与数理统计

主　编　邱敦元
副主编　程昌伦
　　　　李兰芳

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是为贯彻教育部“十五”教材建设规划精神而编写出版的高校本科系列教材之一。内容包括概率论与数理统计两部分，概率论部分含第1至第5章，它是本课程的理论基础；数理统计部分含第6章至第10章，介绍了处理随机数据，进行统计推断的常用方法。本书可作为高等院校概率统计课程的教材使用，亦可供经济管理与工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/邱敦元主编．—重庆：重庆大学出版社，2002.8
工商管理、市场营销本科系列教材
ISBN 7-5624-2651-1

Ⅰ.概…　Ⅱ.邱…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材
②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第046100号

概率论与数理统计
主　编　邱敦元
副主编　程昌伦　李兰芳
责任编辑：梁　涛　　版式设计：梁　涛
责任校对：任卓惠　　责任印制：张永洋
*
重庆大学出版社出版发行
出版人：张鸽盛
社址：重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内
邮编：400044
电话：(023) 65102378　65105781
传真：(023) 65103686　65105565
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn（市场营销部）
全国新华书店经销
自贡新华印刷厂印刷
*
开本：787×960　1/16　印张：15.75　字数：283千
2002年8月第1版　　2002年8月第1次印刷
印数：1—5 000
ISBN 7-5624-2651-1/O·206　　定价：19.00元

前　言

新的世纪,世界进入了经济全球化与技术激烈竞争的崭新时代,为了适应这一形势,经济管理与工程技术人才都必须具有较强的定量分析与科学预测的能力。《概率论与数理统计》作为研究随机现象统计规律性的数学学科,它既是工程与经济应用数学的重要内容,也是一般本科专业的一门重要基础课程。通过本课程的学习,应让学生初步掌握处理随机现象的基本思想与方法,能运用概率统计方法,在定量分析的基础上进行科学的推断与预测,从而培养其解决实际问题的能力。

因此,本书的取材首先着眼于对工程实践与经济活动作定量分析与预测的实际需要,除了阐明概率统计的基本理论外,还加强了常用的统计方法的介绍,讲清这些方法的来龙去脉、运用前提与步骤等。其次,作为主要为经济管理类专业编写的本科教材,也要兼顾到学生进行更高层次学习的需要,即在内容的广度与深度的把握上,除考虑到本科学生学习相关学科的需要外,同时还考虑了教育部颁发的研究生入学全国统一考试数学大纲的基本要求,因而在例题与习题的选择上注意了这两种需要:既有充实的基本功训练的内容,又有适当偏重灵活性与综合性的问题。第三,为了便于教学与自学,编写时力求突出重点,深入浅出,对基本概念、重要公式和定理注重其实际意义的解释说明,做到通俗易懂。对典型例题的选择既要求有较大的启发性,又有广泛的应用性,有的还有一定的趣味性,从而增加了教材的可读性。对习题进行了按章编排,书末附有答案或提示,以便读者练习时参考。此外,每章之后还撰写了一个简短的小结,既对本章知识进行了概括,也提出了学习时的基本要求,以便读者易于掌握各章之要领。第四,虽然严密的概率论与数理统计理论离不开实变函数与测度论,但作为非数学专业用教材,应尽量少用专门的数学工具,故本教材只需以普通的微积分和少量线性代数知识为基础,因而有些概念

(如概率的定义)的引入和有些定理(如中心极限定理)的证明均进行了简化处理或已略去。作为概率统计方面的教材,本该用少许篇幅介绍随机过程的基本知识,但因本课程学时的限制,故本教材未将该内容列入。第五,考虑到各学校教学计划的差异,有些备选内容以“ * ”号标出,使用时可根据各自需要取舍。

参加本书编写的人员有:邱敦元、程昌伦、李兰芳、谭光兴、汤红英、黄敏,其具体分工为:

第 1 章至第 3 章,由邱敦元执笔;

第 4 章至第 5 章,由程昌伦执笔;

第 6 章,由黄敏执笔;

第 7 章,由谭光兴执笔;

第 8 章,由汤红英执笔;

第 9 章至第 10 章,由李兰芳执笔。

最后,由主编邱敦元教授对各章初稿进行了修改增删,统编定稿。

由于编者水平有限,书中不足乃至错误之处在所难免,恳请广大读者斧正。

本书在成书过程中,得到了重庆大学出版社以及编者所在单位的热情关心与大力支持,在此,谨致以诚挚的谢意。

编　者

2002 年 5 月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

第 2 章　随机变量及其分布

第 3 章　多维随机变量

第4章 随机变量的数字特征

第5章 大数定律和中心极限定理

第6章 样本及抽样分布

第7章 参数估计

第8章 假设检验

第9章　回归分析

第10章　方差分析

附　表

习题答案及提示

参考文献

第1章 随机事件与概率

自然界和社会上发生的现象,可分为两大类:一类为确定性现象,另一类为随机现象。

所谓确定性现象,是指在一定条件下必然发生的现象。例如,同性电荷必互相排斥而异性电荷必互相吸引;在标准大气压下,水加热到100℃,必然会沸腾,等等。

所谓随机现象,是指在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。例如,在相同条件下抛掷同一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,并且在每次抛掷之前无法断定出现哪一种结果;又如从一大批产品中任取一个产品,这个产品可能是正品,也可能是废品,其结果也带有偶然性。但人们通过长期实践并深入研究之后,发现这类现象在大量重复试验或观察下,它的结果却呈现出某种规律性。例如多次重复抛掷一枚均匀硬币得到正面朝上或反面朝上的结果大致各占一半。概率论与数理统计即为研究和揭示随机现象这种规律性的一门数学学科。其理论与方法在绝大多数科学技术领域以及经济管理活动中都有着广泛的应用。

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验与随机事件

为了研究上面所说的随机现象,就要对客观事物进行观察。我们把观察

的过程称为试验,满足下列条件的试验称为随机试验:

①在相同条件下试验可以重复进行;

②每次试验的结果具有多种可能性,并能事先明确试验的所有可能结果;

③试验之前不能准确预言该次试验将出现哪一种结果。

例如,投掷一枚骰子,观察出现的点数;从一大批电子元件中任意抽取一个,测试其寿命等都是进行随机试验。

在随机试验中,可能发生,也可能不发生的事件称为**随机事件**。随机事件是本课程研究的主要对象。

例 1.1 在抛掷一枚骰子的随机试验中,其出现的点数,"1 点"、"2 点"、"奇数点"、"点数小于 5"等都是随机事件。

例 1.2 在统计一个电话总机 1min 内接到呼唤次数的随机试验中,"接到 5 次呼唤"、"超过 6 次呼唤"等也是随机事件。

例 1.3 从一批灯泡中随机抽取一只,测试其寿命,"寿命在1 500 ~ 2 000h之间","寿命超过 2 000h"等均为随机事件。

随机事件常简称为事件。一般用大写拉丁字母 A,B,C 等表示。在随机事件中,有些可以看成是由某些事件复合而成的,而有些事件则不能分解为其他事件的组合。这种不能分解成其他事件组合的最简单的随机事件称为基本事件。例如,在例 1.1 中,"1 点"、"2 点"为基本事件,而"奇数点"与"点数小于 5"则不是基本事件。

随机试验中,必然会发生的事件称为**必然事件**,用符号 Ω 表示。必然不发生的事件称为**不可能事件**,用符号 Φ 表示。例如,在上面提到的投掷骰子的随机试验中,"点数不超过 6"是必然事件,而"点数超过 6"是不可能事件。

顺便指出,无论必然事件、不可能事件还是随机事件,都是相对于一定的试验条件而言的。如果试验条件改变了,事件的性质也会发生变化。例如,投掷两枚骰子时,"点数之和不超过 6"即为随机事件了,而掷 7 枚骰子时,"点数之和不超过 6"已是不可能事件。因为本课程主要研究随机事件,为方便讨论问题,故将必然事件 Ω 及不可能事件 Φ 亦作为两个特殊的随机事件。

1.1.2 事件的关系与运算

研究事件的关系与运算,运用点集的概念和图示方法比较直观,亦易于理解。

对于随机试验中的每一基本事件,可用只含一个元素 ω 的单点集 $\{\omega\}$ 表示;由若干个基本事件复合而成的事件,则用包含若干个相应元素的点集表

示;由所有基本事件对应的全部元素组成的点集称为**样本空间**,而其中每一元素(即基本事件)亦称为**样本点**。因此,可以将随机事件定义为样本点的某个集合。称某事件发生,就是当且仅当属于该集合的某一个样本点在试验中出现。作为特例,不可能事件就是空集 Φ,必然事件就是样本空间 Ω。于是,事件之间的关系与运算就可以用集合论的知识来描述。一般地,常用平面上某一矩形区域表示必然事件,该矩形区域内的一个子区域则表示事件。

下面介绍事件之间的关系与运算。

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即属于 A 的每一个样本点也都属于 B,则称事件 B 包含事件 A,记为

$$B \supset A \text{ 或 } A \subset B$$

例 1.1 中,若记 A =“出现 1 点”,B =“出现奇数点”,则有 $A \subset B$。

如果事件 A 与事件 B 相互包含,即 A 与 B 中的样本点完全相同,则称 A 与 B 相等,记为

$$A = B$$

例 1.1 中,若记 A =“出现 1,3 或 5 点”,B =“出现奇数点”,则有 $A = B$。

2. 事件的和(并)

事件 A 与 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与 B 的和(并)。它是由属于 A 或 B 的所有样本点构成的集合,记作

$$A + B \text{ 或 } A \cup B$$

例 1.1 中,若记 A =“出现小于 5 的点”,B =“出现偶数点”,则 $A + B$ =“出现 1,2,3,4 或 6 点”。

几个事件 $A_1, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生的事件称为事件 $A_1, \cdots, A_n$ 的和,记作

$$A_1 + \cdots + A_n \text{ 或 } A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

亦可简记为

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

可列个事件 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生的事件称为可列个事件 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 的和,记作

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

3. 事件的积(交)

事件 A 与 B 都发生的事件称为事件 A 与 B 的积(交)。它是由既属于 A 又属于 B 的所有公共样本点构成的集合,记作

$$AB \text{ 或 } A \cap B$$

例 1.1 中,令 A =“出现小于 5 的点”,B =“出现奇数点”,则 AB =“出现 1 或 3 点”。

类似地,可定义事件 $A_1,\cdots,A_n$ 的积事件为它们都发生的事件,记为

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n \text{ 或 } A_1 \cdots A_n$$

也可定义可列个事件 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件为它们都发生的事件,记为

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots \text{ 或 } A_1 \cdots A_n \cdots$$

4. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与 B 的差。它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成的集合,记为

$$A - B$$

在例 1.1 中,含 A =“出现偶数点”,B =“出现小于 5 的点”,则 $A - B$ =“出现 6 点”。

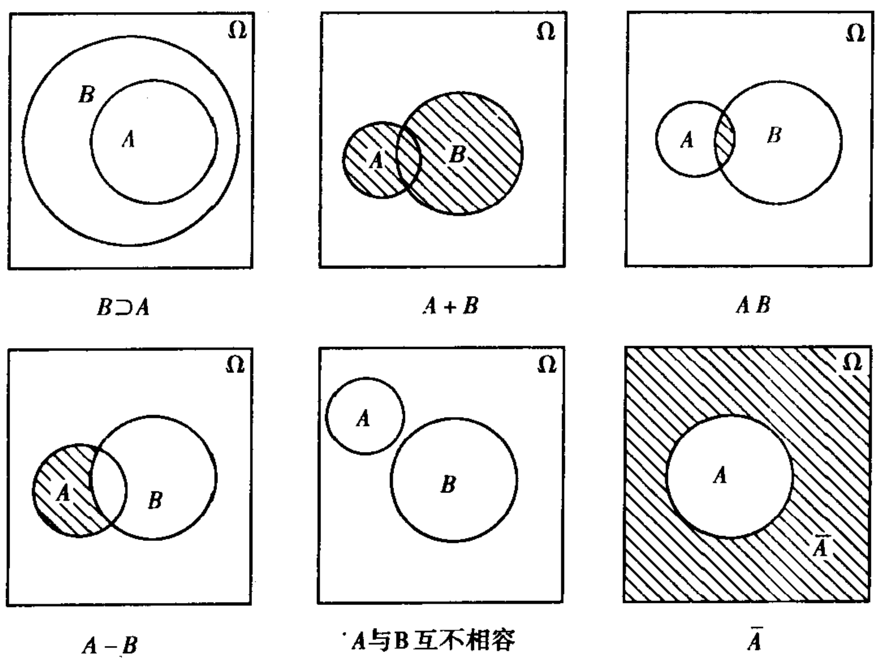

图 1.1

5. 互不相容事件

若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB = \Phi$,则称事件 A 与 B 是互不相容的

事件，简称事件 A 与 B 互不相容（或称互斥）。互不相容事件 A 与 B 之间无公共的样本点。对于几个事件 $A_1,\cdots,A_n$，若它们之间两两互不相容，即 $A_iA_j=\Phi$（当 $i\neq j$ 时），则称 $A_1,\cdots,A_n$ 为互不相容事件。显然，基本事件间是互不相容的。

6. 对立事件

“A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件（或称逆事件）。它是由样本空间中所有不属于 A 的样本点组成的集合，记作 $\bar{A}$。

显然，$A\bar{A}=\Phi$，$A+\bar{A}=\Omega$，$\bar{A}=\Omega-A$，$\bar{\bar{A}}=A$，且由定义还易验证 $A-B=A\bar{B}$。

在例 1.1 中，若令 A =“出现奇数点”，则 $\bar{A}$ =“出现偶数点”。

以上各事件之间的关系与运算可用图 1.1 中的图形直观地表示。

对于事件运算，易知满足下列运算规律：

交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

对偶律　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

注意：在进行事件运算时，关于它们的运算次序作如下的约定：先进行逆运算，其次进行积运算，再次进行和运算，最后进行差运算。

例 1.4　设 A,B,C 表示 3 个事件，试以 A,B,C 的运算来表示下列事件：

1）仅 A 发生

2）A,B,C 都不发生

3）A,B,C 恰好一个发生

解　1）$A\bar{B}\bar{C}$；2）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$；3）$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$。

例 1.5　如果 x 表示一个沿数轴作随机运动的质点的位置，试说明下列各事件的关系：

$A=\{x\mid x\leqslant 20\}$　　$B=\{x\mid x>3\}$

$C=\{x\mid x<9\}$　　$D=\{x\mid x<-5\}$

$E=\{x\mid x\geqslant 9\}$

解　各事件的情况如图 1.2 所示。

由图可见，$A\supset C\supset D$，$B\supset E$；D 与 B，D 与 E 互不相容；C 与 E 为对立事件；B 与 C，B 与 A，E 与 A 相容，显然 A 与 C，A 与 D，C 与 D，B 与 E 也是相容的。

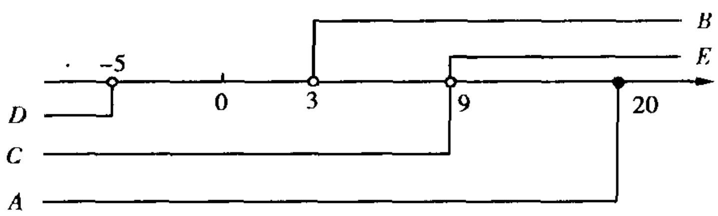

图 1.2

1.2 概 率

1.2.1 概率的统计定义

概率是概率论中最基本的概念。在引入此概念之前,需先介绍频率的概念。

在相同条件下,设事件 A 在 n 次重复试验中发生了 n_A 次,则称 n_A 为事件 A 发生的**频数**,比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**,并记成 $f_n(A)$。

比如进行抛掷硬币的试验,共抛掷 100 次,若出现正面 51 次,令 A =“出现正面”,则 $f_{100}(A)=\dfrac{51}{100}$。

由频率的定义易见其具有下列基本性质:

①$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

②$f_n(\Omega)=1, f_n(\Phi)=0$;

③若 $A_1,\cdots,A_k$ 是两两互不相容事件,则

$$f_n(A_1+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+\cdots+f_n(A_k)$$

通过实践,人们发现,当试验次数 n 很大时,事件 A 发生的频率总会在某个确定的数值附近摆动,随机事件的频率的这一特性称为**频率的稳定性**。

历史上有不少人通过投掷硬币的试验研究过频率的稳定性,表 1.1 列出了他们的试验记录。

从表 1.1 容易看出,投掷次数越多时,频率越接近于 0.5,即该试验中的事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 当 n 逐渐增大时会逐渐稳定于常数 0.5。而且研究任何随机试验中的每一个事件 A 都有这样一个客观存在的常数与之对应。这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性,它是概率这一概念的经验基

础。而所谓事件发生的可能性大小,就是这个“频率的稳定值”。

表 1.1

实验者	投掷次数 n	出现正面的频数 n_A	频率 $f_n(A)$
德·摩尔根(DeMorgan)	2 048	1 061	0.518
蒲　丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊(Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

下面引出事件的概率的定义。

定义 1.1　在相同的条件下,重复进行 n 次试验,事件 A 发生的频率稳定在某一常数 p 附近摆动,且一般说来,n 越大,摆动幅度越小,则称该常数 p 为事件 A 的概率,记作 $P(A)$。

显然,事件 A 的概率 $P(A)$,就是事件 A 发生的可能性大小的度量。

概率的统计定义仅仅指出了事件的概率是客观存在的,但并不能直接用这个定义计算 $P(A)$。实际上,人们往往采用大量试验所得的频率或一系列频率的平均值作为 $P(A)$ 的近似值。尽管如此,但从上述定义可得出概率的一些基本性质:

①$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

②$P(\Omega)=1, P(\Phi)=0$。

1.2.2　概率的古典定义

直接计算某一事件的概率有时是很困难的,甚至是不可能的。但在一些特定情况下,直接计算事件的概率却较为简便。例如,抛掷一枚均匀的硬币,可能出现正面朝上与反面朝上两种结果,同样易知这两种结果出现的可能性是相同的。又如,投掷一枚均匀的骰子,可能出现 1 点至 6 点 6 种结果,但易知这 6 种结果出现的机会也是均等的。

上述这类随机试验的共同特点是:每次试验只有有限种可能的试验结果,即组成试验的样本空间的基本事件总数为有限个;每次试验中,各基本事件出现的可能性完全相同。具有上述两个特点的试验称为**古典概型试验**。在古典概型试验中,如果能够知道有利于某一事件 A 发生的基本事件数(即 A 所包含的基本事件数),则可以通过这个数与试验的基本事件总数之比计算出概率 $P(A)$。

定义 1.2 若试验的样本空间一共由 n 个基本事件 $E_1,\cdots,E_n$ 组成,并且这些基本事件出现的机会是均等的,而事件 A 由其中某 m 个基本事件 $E_{i_1},\cdots,E_{i_m}$组成,则事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{\text{有利于 } A \text{ 的基本事件数}}{\text{样本空间的基本事件总数}}=\frac{m}{n} \tag{1.1}$$

例 1.6 从 0,1,…,9 这 10 个数字中随机抽取一个数字,求取得奇数的概率。

解 显然该试验的样本空间的基本事件总数 $n=10$,且每一基本事件出现的机会是均等的,又有利于取到奇数的事件 A 的基本事件数 $m=5$,于是由公式(1.1)有

$$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

例 1.7 袋内装有 5 个白球,3 个黑球。从中任取两个球,计算取出的 2 个球都是白球的概率。

解 组成试验的等可能的基本事件总数 $n=C_{5+3}^2=C_8^2$,组成所求事件 A(取到 2 个白球)的基本事件数 $m=C_5^2$,故由公式(1.1)得

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}\approx 0.357$$

例 1.8 在箱中装有 100 个产品,其中有 3 个次品。从这箱产品中任取 5 个产品,求下列事件的概率:

1)$A=\{$恰有一个次品$\}$;

2)$B=\{$没有次品$\}$。

解 1)从 100 个产品中任取 5 个产品,共有 C_{100}^5种抽取方法,即等可能的基本事件总数 $n=C_{100}^5$。又 A 事件包含的基本事件数 $m=C_3^1\times C_{97}^4$。因而

$$P(A)=\frac{C_3^1\times C_{97}^4}{C_{100}^5}\approx 0.138$$

2)基本事件总数仍为 $n=C_{100}^5$,而 B 事件包含的基本事件数 $m=C_{97}^5$,所以

$$P(B)=\frac{C_{97}^5}{C_{100}^5}\approx 0.856$$

例 1.9 两封信随机地向标号为Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ的 4 个邮筒投寄,求第Ⅱ号邮筒恰好被投入 1 封信的概率。

解 设 A 表示第Ⅱ号邮筒恰好投入 1 封信的事件。因两封信随机地投入 4 个邮筒共有 4^2 种等可能投法,而组成事件 A 的不同投法只有 $C_2^1\cdot C_3^1$ 种,故有

$$P(A) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1}{4^2} = \frac{3}{8}$$

这里需要指出的是,上面给出的概率的统计定义与古典定义都只是给概率作了一个直观而朴素的描述。而其严格的数学定义,即所谓公理化定义,在本书中将不叙述。有兴趣的读者可参阅其他同类教材,如见参考文献[1]。

1.2.3 概率的加法法则

为了得出概率的加法法则,先看下面的例子。

例 1.10 书架上有 5 本中文书,3 本英文书,2 本日文书,求从中任取 1 本书是外文书的概率。

解 因书架上共有 10 本书,从中任取 1 本,故共有 10 种等可能的结果,若记

$A=\{$抽得的是英文书$\}$,$B=\{$抽得的是日文书$\}$。显然有 $P(A)=\frac{3}{10}=0.3$,$P(B)=\frac{2}{10}=0.2$,又记

$C=\{$抽得的是外文书$\}$,则 $C=A+B$,显然,C 所包含的基本事件数为 A 与 B 所包含的基本事件数之和,于是有

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{10} = 0.5$$

根据这类例子,可以归纳出一般的加法法则。

概率的加法法则 如果事件 A,B 互不相容,则有

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \tag{1.2}$$

即两个互斥事件之和的概率等于该两事件概率之和。

公式(1.2)反映了概率的一个重要特性:可加性。它是从大量的实践经验中概括出来的,成为我们研究概率的基础与出发点。从概率的定义来看,这个公式的成立是很自然的。假设进行了 n 次试验,事件 A 发生了 n_A 次,事件 B 发生了 n_B 次,因为 A 与 B 互不相容,事件 $A+B$ 发生的次数 $n_{A+B}=n_A+n_B$,因而有

$$\frac{n_{A+B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n}$$

又因频率$\frac{n_{A+B}}{n}$的稳定值为 $P(A+B)$,频率$\frac{n_A}{n}$,$\frac{n_B}{n}$的稳定值分别为 $P(A)$,