数学物理基础

任朗　廖成　王敏锡

西南交通大学出版社

数学物理基础

任　朗　廖　成　王敏锡

西南交通大学出版社

·成　都·

内 容 简 介

本书主要是向从事电子、电工、电信及其他弱电工程的读者系统而全面地介绍在实际应用中广泛涉及到的数学物理方法和基础。全书共七章，内容包括：标量、矢量、张量和并矢；复变函数论；泛函分析和广义函数；收敛性理论和数值积分；代数方程、常微分方程和积分方程中的存在性和惟一性定理；近似理论；线性算子的谱论。该书不但可供电子和电气领域的专家、工程师和其他研究人员参考或查询，也可作为相关专业研究生、高年级本科生的教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学物理基础/任朗，廖成，王敏锡编著．—成都：西南交通大学出版社，2002.9
ISBN 7-81057-628-3

Ⅰ．数… Ⅱ．①任…②廖…③王… Ⅲ．数学物理方法 Ⅳ．O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 002051 号

数 学 物 理 基 础

任 朗 廖 成 王敏锡

*

出 版 人 宋绍南

责任编辑 刘娉婷

封面设计 毕雪屏

西南交通大学出版社出版发行

（成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行科电话：87600564）

http://press.swjtu.edu.cn

E-mail:cbsxx@swjtu.edu.cn

西南冶金地质印刷厂印刷

*

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：20

字数：486 千字 印数：1—500 册

2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-81057-628-3/O·038

定价：**48.00** 元

前 言

本书是作者根据多年科研和教学实践活动中的切身体会和积累，将应用频率较高的、发表在不同时间、不同书刊的有关数学物理基础资料经整理、推演、加工编写而成的。编写本书的意图是为广大的科研、教学工作人员提供一个较为全面和系统的数学物理基础参考资料，以便更好地促进数学物理基础在实践中的广泛应用。

本书内容共分七章，分别介绍了常用数学物理基础方方面面的知识。

第一章，标量、矢量、张量和并矢。主要包括曲线坐标系及其变换，一般的标量、矢量及张量理论基础，最后介绍了并矢、并矢代数及多种形式的并矢格林函数。

第二章，复变函数论。主要包括复变函数中的基本定理和方法，重点介绍了最陡下降法（鞍点法）计算积分所涉及的诸多问题。

第三章，泛函分析和广义函数。主要包括集合及其运算，距离空间，赋范线性空间，内积空间和希尔伯空间，最后介绍了广义函数的基本性质和运算特点。

第四章，收敛性理论和数值积分。主要包括强收敛、弱收敛，讨论了算子序列和泛函序列的收敛性，最后介绍了收敛性理论在数值积分中的应用。

第五章，代数方程、常微分方程和积分方程中的存在性和惟一性定理。主要包括迭代法、收缩原理及误差界定，介绍了代数方程组的迭代解法以及常微分方程和积分方程中的存在性和惟一性定理。

第六章，近似理论。主要包括最佳近似的存在性和惟一性，凸状空间理论。讨论了均匀近似、切比雪夫多项式逼近、希尔伯空间中的近似和样条逼近。

第七章，线性算子的谱论。主要包括正则值、豫解集和谱的定义，有界线性算子的谱性质，豫解和谱的其他性质和谱理论的复分析。

在以往的论著中，以上内容都散落在许多本不同的书籍中，给读者的查找带来极大的不便。完整、全面而便于查找正是作者的初衷。特别是，上述内容中的一些只能在数学专著中才能查到，而这类书籍的编写对象是数学专业的人员，并不完全适合物理学者和工程师。事实上，过分严密的证明不一定是必需的，本书既不忽视数学的严谨性又不强调其数学严谨性，只是阐明数学的实质及其方法。本书主要是向从事电子、电工、电信及其他弱电工作的读者提供一个数学工具。当然，本书不但可供电子和电气领域的专家、工程师和其他研究人员参考或查询，也可作为相关专业研究生、高年级本科生的教材或参考书。

作者深感限于水平，一定存在很多错误和不妥之处，请读者指正。

作 者

2001年4月17日

西南交通大学

目　录

第一章　标量、矢量、张量和并矢

§1-1　引　　言

我们知道，在数学及物理学中主要研究的有两种量：一种是在空间（包括实空间和虚拟数学空间）中有一定方向的量，一种是只有数值的而无方向概念的量。例如力、速度、电流、温度、密度、电位等等，前面三种量既有大小又有方向的概念，称为矢量；后面三种量与前三种有明显的不同，它们没有方向的概念，称为标量。与之相对应，如果在全空间或部分空间里的每一点都对应着某物理量的一个确定值，我们就说在这个空间里确定了该物理量的场。如果该物理量是标量，就称这个场为标量场，例如温度场、密度场、电位场等是标量场；若该物理量为矢量，就称之为矢量场，例如力场、速度场、电场等是矢量场。本章将从标量、矢量及标量场、矢量场概念入手，介绍方向余弦、正交曲线坐标系及其变换，然后在一般的标量、矢量及张量理论基础上，重点介绍并矢、并矢代数及多种形式的并矢格林函数。掌握了自由空间、半空间、媒质存在空间的并矢格林函数基础知识后，读者在解决场方程、波方程中涉及到的可能较复杂的并矢格林函数时将会得到更多的启发。比如涉及到正交算子构成的积分方程，可以用并矢格林函数形式的豫解核方法处理；对于傅里叶－汉森－戴（Fourier-Hansen-Tai）变换及其逆变换中的并矢格林函数展开也容易理解和应对。

§1-2　标量和矢量场

每点上具有单一的数或标量的空间称为标量场（简称标场）。每点上具有一个数和一个方向的空间称为矢量场（简称矢场）。矢量可分为两类，即普通矢量和轴矢量。具有单一数和方向的矢量称为普通矢量（简称矢量）；轴矢量则是二矢量的矢量积，它具有单一的数，但其方向则依赖于所选用的坐标系是左旋还是右旋系，其另一特点则是矢量积有面元的方向性而不仅是一个箭头。轴矢量又称为赝矢量（Pseudovector），即准矢量或假矢量的意思。

§1-3　正交曲线坐标系

在许多情况下，采用三维正交坐标系或正交曲线坐标系来描述标场和矢场比较方便。

例如，在静电场中，电力线和等位线组成曲线正交系，因而适于用正交曲线坐标系来描述。以后我们所采用的都是右旋坐标系。

坐标系普遍的包含着三簇曲面，它们用直角坐标表示的方程是$u_1(x, y, z)=$常数，$u_2(x, y, z)=$常数，$u_3(x, y, z)=$常数。这些方程给出一般坐标u_1, u_2, u_3作为x，y，z的函数。在许多情况下，将x，y，z表示为u_1，u_2、u_3的函数比较便利。以上三个方程代表三簇曲面，它们的交线构成三簇曲线。在（x，y，z）或（u_1, u_2, u_3）点上，我们放三个单位矢量$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$，它们在该点与正交曲线坐标系的对应坐标线相切。对于直角坐标，$\hat{e}_1=\hat{i}$，$\hat{e}_2=\hat{j}$，$\hat{e}_3=\hat{k}$。这些单位矢量的长度均为一个单位且相互垂直。$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$可以看成是一组新的单位矢量（如图 1-1 所示），一个矢场可以用它们来表示。

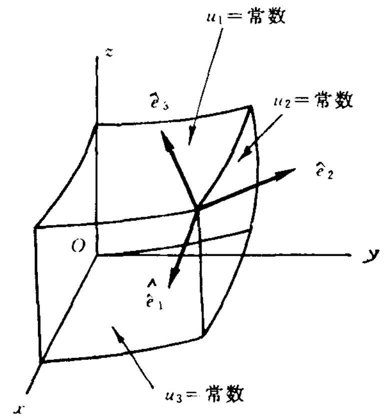

图 1－1　正交曲线坐标及其单位矢量

§ 1-4　方 向 余 弦

对于直角坐标x，y，z来说，单位矢量$\hat{e}_1$的方向余弦为$\alpha_1=\hat{e}_1\cdot\hat{i}$，$\beta_1=\hat{e}_1\cdot\hat{j}$，$\gamma_1=\hat{e}_1\cdot\hat{k}$；同样，$\hat{e}_2$的方向余弦为$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$；$\hat{e}_3$的方向余弦为$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$。一般来说，这些方向余弦在空间各点上都不相同，它们是u_1, u_2, u_3的函数。由于方向余弦的性质，对于坐标的所有点有

$$\alpha_n^2+\beta_n^2+\gamma_n^2=1, \qquad n=1, 2, 3 \tag{1-1}$$

因为我们所考虑的是正交曲线坐标，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$则是$\hat{i}$对$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$的方向余弦；对这两个坐标系来说，九个方向余弦是对称的。为了着重说明这种对称性，我们分别用双脚标$\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}$来代表$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$，则有

$$\hat{e}_n=\alpha_{n1}\hat{i}+\alpha_{n2}\hat{j}+\alpha_{n3}\hat{k} \tag{1-2}$$

$$\hat{i}=\sum_n\alpha_{n1}\hat{e}_n,\quad \hat{j}=\sum_n\alpha_{n2}\hat{e}_n,\quad \hat{k}=\sum_n\alpha_{n3}\hat{e}_n \tag{1-3}$$

由于$\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=\hat{e}_1\cdot\hat{e}_1=\hat{e}_2\cdot\hat{e}_2=\hat{e}_3\cdot\hat{e}_3=1$，$\hat{e}_m\cdot\hat{e}_n=0$，$m\neq n$。从以上方向余弦和单位矢量之间的关系得方向余弦间的关系方程

$$\sum_s \alpha_{ms}\alpha_{ns} = \sum_s \alpha_{sm}\alpha_{sn} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \tag{1-4}$$

其中δ_{mn}是克朗尼克δ函数（Kronecker δ-Function）。

如果x，y，z为右旋，u_1，u_2，u_3也为右旋，则α的行列式$|\alpha_{mn}|$等于+1；而如果后者为左旋，则它就等于-1。解（1-4）式得

$$\alpha_{mn} = \pm M_{mn} \tag{1-5}$$

其中M_{mn}是行列式$|\alpha_{mn}|$的子式，如e_1，e_2，e_3为右旋则用正号，否则就用负号，且

$$\left.\begin{aligned} &M_{11} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32},\quad M_{12} = \alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{33}, \\ &M_{31} = \alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22},\quad \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

（1-4）和（1-5）式不但对任一正交系和直角系正确而且对任意两个正交系也都正确。在后一情况下，（1-5）式中的正号用于同旋的正交系、负号用于反旋的正交系。

在（u_1，u_2，u_3）点的任一矢量$\vec{F}$，可用新的单位矢量的分量形式表示

$$\vec{F} = \sum_m F_m \hat{e}_m,\quad F_m = \vec{F}\cdot\hat{e}_m \tag{1-7}$$

利用方向余弦，很容易证明$\vec{F}$的这些分量和它在直角坐标下的分量之间的关系如下：

$$\left.\begin{aligned} &F_m = \alpha_{m1}F_x + \alpha_{m2}F_y + \alpha_{m3}F_z, \\ &F_{x,y,z} = \sum_m \alpha_{m1,2,3}F_m, \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

其中的第二式代表三个方程，x，y，z与1，2，3相对应。

表示为一个坐标系三个坐标（例如 x，y，z）的一组三个函数、和表示为另一坐标系三个坐标（例如u_1，u_2，u_3）的一组三个函数，如能满足且仅仅满足（1-8）式所表示的关系，则它们可以认为是一个矢量的三个分量。

§1-5 尺度因子

设h_n为坐标u_n的尺度因子，它定义为坐标u的变化du_n在该坐标线上产生$h_n du_n$位移长度（米，厘米或其他长度单位）。一般地说，h_n在空间各点都不相同。沿x轴的位移所产生沿u_n轴的位移率是$h_n(\partial u_n/\partial x)$，它等于方向余弦$\alpha_{n1}$（用单脚标表示，即$\alpha_n$）。同样，沿$u_n$轴的位移$h_n du_n$所产生沿$x$轴的位移率是$(1/h_n)(\partial x/\partial u_n)$，它也等于方向余弦$\alpha_{n1}$。因此，对$x$，$y$，$z$来说，$u_n$轴的方向余弦可以表示为两种导数形式：

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{n1} &= \alpha_n = \frac{1}{h_n}\frac{\partial x}{\partial u_n} = h_n\frac{\partial u_n}{\partial x} \\ \alpha_{n2} &= \beta_n = \frac{1}{h_n}\frac{\partial y}{\partial u_n} = h_n\frac{\partial u_n}{\partial y} \\ \alpha_{n3} &= \gamma_n = \frac{1}{h_n}\frac{\partial z}{\partial u_n} = h_n\frac{\partial u_n}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

一个线元可以表示为

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_n h_n^2 \, du_n^2 \tag{1-10}$$

其中

$$h_n^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_n}\right)^2$$

$$= \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial z}\right)^2\right]^{-1} \tag{1-11}$$

§1-6 矢量的变换规律

我们看到，为了使位置的三个函数成为一个矢量的三个分量，它们必须按（1－8）或（1－9）式的规律变换。如果将一个矢量的三个分量从尺度因子为 h_1，h_2，h_3 的正交曲线坐标系 u_1，u_2，u_3，变换到尺度因子为 h_1'，h_2'，h_3' 的正交曲线坐标系 u_1'，u_2'，u_3'，则新旧坐标系内的这些分量必须满足下列关系：

$$\left.\begin{aligned} F_n' &= \sum_m \alpha_{nm} F_m \\ \alpha_{nm} &= \frac{h_m}{h_n'}\frac{\partial u_m}{\partial u_n'} = \frac{h_n'}{h_m}\frac{\partial u_n'}{\partial u_m} \end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

因为 $h_m du_m$ 和 $h_n' du_n'$ 都是长度，新分量和旧分量有同样量纲。可见，凡满足（1－12）式的三个量必定是一个矢量的三个分量，因而矢量也称为一阶张量。

§1-7 协变矢量和逆变矢量

用分量来表示一个矢量，除通常的方法外，还有两种方法，它们都是根据选用不同的单位矢量来表示一个矢量的分量的。假设选用单位矢量的尺度随着坐标系而变化并令单位矢量 $\vec{e}^n = h_n \hat{e}_n$ 代表坐标 u_n 单位变化的大小而不代表单位长度，则矢量 $\vec{F}$ 可写成

$$\vec{F} = \sum_n f^n \vec{e}_n \,, \qquad f^n = \frac{F_n}{h_n} \tag{1-13}$$

其中 F_n 为原来的分量，f^n 为新分量。这时，新分量的变化特征将是

$$(f^n)' = \sum_m f^m \frac{\partial u_n'}{\partial u_m} = \sum_m f^m \left(\frac{h_m}{h_n'}\right)^2 \frac{\partial u_m}{\partial u_n} \tag{1-14}$$

f^n 称为矢量 $\vec{F}$ 在 u_1，u_2，u_3 坐标下的逆变分量，它们等于矢量 $\vec{F}$ 的普通分量除以尺度因子。

如果令新单位矢量 $\vec{e}_n = \hat{e}_n / h_n$，则

$$\vec{F}=\sum_{n} f_n \vec{e}_n\ ,\qquad f_n=h_n F_n \tag{1-15}$$

其中f_n的变换特性是

$$(f^n)'=\sum_m f_m \frac{\partial u_m}{\partial u'_n}=\sum_m f_m\left(\frac{h'_n}{h_m}\right)^2\frac{\partial u'_n}{\partial u_m} \tag{1-16}$$

f_n称为矢量$\vec{F}$在u_1，u_2，u_3坐标系下的协变分量，它们等于矢量$\vec{F}$的普通分量乘以尺度因子。

用协变分量表示的矢量称为协变矢量，用逆变分量表示的矢量称为逆变矢量。显然，$\partial\psi/\partial u_n$代表一个矢量的协变分量，因为$\partial\psi/\partial u_n=h_n\partial\psi/(h_n\partial u_n)$。

§1-8 张　　量

如果坐标系u_n和坐标系u'_n有下列的变换规律，则其中t_{ij}，t^{ij}和t^i_j分别称为二阶的协变张量、逆变张量和混合张量的分量：

$$\left.\begin{aligned}
t'_{ij}&=\sum_{m,n} t_{ij}\frac{\partial u_m}{\partial u'_i}\,\frac{\partial u_n}{\partial u'_j}\\
(t^{ij})'&=\sum_{m,n} t^{ij}\frac{\partial u'_i}{\partial u_m}\,\frac{\partial u'_j}{\partial u_n}\\
(t^i_j)'&=\sum_{m,n} t^i_j\frac{\partial u'_i}{\partial u_m}\,\frac{\partial u_n}{\partial u'_j}
\end{aligned}\right\} \tag{1-17}$$

两个协变矢量的乘积（成对的）形成--个二阶协变张量的分量。这是因为

$$(f_i)'=\sum_j f_j\frac{\partial u_j}{\partial u'_i}=f_1\frac{\partial u_1}{\partial u'_i}+f_2\frac{\partial u_2}{\partial u'_i}+f_3\frac{\partial u_3}{\partial u'_i}$$

$$(f_j)'=\sum_i f_i\frac{\partial u_i}{\partial u'_j}=f_1\frac{\partial u_1}{\partial u'_j}+f_2\frac{\partial u_2}{\partial u'_j}+f_3\frac{\partial u_3}{\partial u'_j}$$

$$(f_i)'(f_j)'=\sum_{m,n} f_m f_n\frac{\partial u_m}{\partial u'_i}\,\frac{\partial u_n}{\partial u'_j}$$

同理，两个逆变矢量分量的乘积（成对的）形成一个二阶逆变张量。

如果A_i和B_j是普通矢量的分量，则$h_iA_iB_j/h_j$将是一个二阶混合张量的分量t_i^j。从混合张量变来的$\sum_m t^m_m$称为收缩张量，当后者变换时，其值不变，这是因为

$$\sum_n (t^n_n)'=\sum_{m,k,n} t^m_k\frac{\partial u'_n}{\partial u_m}\,\frac{\partial u_k}{\partial u'_n}=\sum_{k,m} t^m_k\frac{\partial u_k}{\partial u_m}=\sum_m t^m_m$$

这样的量称为零阶张量或标量，也称为不变量。两个矢量的无向积就是一个收缩张量或标量，因为$\sum_n A_nB_n=\sum_n h_nA_nB_n\Big/h_n=\sum_n t^n_n$。

（1－17）式所表示的二阶张量的分量在三维空间坐标下一共有 9 个。在张量场中，这 9 个分量可能逐点变化，它们随着坐标系的改变有如（1－17）式所示。用 $\boldsymbol{T}$ 表示一个二阶张量，则

$$\boldsymbol{T}=\left\| t_{ij} \right\|=\left\| \begin{matrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{matrix} \right\| \tag{1-18}$$

其中 t_{ij} 称为张量 $\boldsymbol{T}$ 的分量或坐标。

§1-9 并　　矢

并矢在三维正交曲线坐标（以后简称三维坐标）下也具有 9 个分量 d_{ij}，每个分量都是坐标的函数，它们从一个坐标系到另一个坐标系的变换规律是

$$\begin{aligned} d'_{ij} &= \sum_{m,n} \frac{h_m h_n}{h'_i h'_j} \frac{\partial u_m}{\partial u'_i} \frac{\partial u_n}{\partial u'_j} d_{mn} = \sum_{m,n} \frac{h'_i h'_j}{h_m h_n} \frac{\partial u'_i}{\partial u_m} \frac{\partial u'_j}{\partial u_n} d_{mn} \\ &= \sum_{m,n} \frac{h'_i h_n}{h_m h'_j} \frac{\partial u'_i}{\partial u_m} \frac{\partial u_n}{\partial u'_j} d_{mn} = \sum_{m,n} \alpha_{im} \alpha_{jn} d_{mn} \end{aligned} \tag{1-19}$$

并矢分量与对应的逆变张量、协变张量和混合张量的分量之间的关系分别是

$$t^{mn}=\frac{1}{h_m h_n} d_{mn}, \qquad t_{mn}=h_m h_n d_{mn}, \qquad t_n^m=\frac{h_n}{h_m} d_{mn} \tag{1-20}$$

从形式上可见，并矢与矢量相对应，逆变张量和协变张量分别与逆变矢量和协变矢量相对应。因此，并矢是更基本的量，也较简单些，在电磁场理论中，并矢的应用比较广泛且在后面可以看到，并矢代数也比较简单，这就是本章着重介绍并矢和其有关知识的原故。

§1-10 并矢的意义和并矢代数

用 $\overline{\overline{D}}$ 来代表一个并矢，$\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 代表两个矢量，则可以写为

$$\overline{\overline{D}}=\vec{A}\vec{B} \tag{1-21}$$

两个矢量并写在一起称为并矢。这从字面上看是很自然的和明确的。但是，它既非 $\vec{A}\cdot\vec{B}$，也非 $\vec{A}\times\vec{B}$。在（1－21）式中，$\vec{A}$ 称为 $\overline{\overline{D}}$ 的前元素，$\vec{B}$ 称为 $\overline{\overline{D}}$ 的后元素。$\overline{\overline{D}}$ 除两个矢量并写在一起外尚无其他的具体的物理解释。

$\overline{\overline{D}}$ 对任一矢量 $\vec{C}$ 有两个标积，即前标积 $\vec{C}\cdot\overline{\overline{D}}$ 和后标积 $\overline{\overline{D}}\cdot\vec{C}$，它们分别定义为

$$\vec{C}\cdot\overline{\overline{D}}=\vec{C}\cdot(\vec{A}\vec{B})=(\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B} \quad （矢量） \tag{1-22}$$

$$\overline{\overline{D}} \cdot \vec{C}=(\vec{A}\vec{B}) \cdot \vec{C}=\vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) \quad （矢量） \tag{1-23}$$

$\overline{\overline{D}}$ 的转值定义为

$$\tilde{\overline{\overline{D}}}=\vec{B}\vec{A} \tag{1-24}$$

则

$$\vec{C} \cdot \tilde{\overline{\overline{D}}}=(\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A}=\vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

因而

$$\overline{\overline{D}} \cdot \vec{C}=\vec{C} \cdot \tilde{\overline{\overline{D}}}, \quad \vec{C} \cdot \overline{\overline{D}}=\tilde{\overline{\overline{D}}} \cdot \vec{C} \tag{1-25}$$

$\overline{\overline{D}}$ 和矢量 $\vec{C}$ 有两个矢积，它们分别定义为

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\overline{D}}\times\vec{C}=(\vec{A}\vec{B})\times\vec{C}=\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C}) \quad (并矢)\\&\vec{C}\times\overline{\overline{D}}=\vec{C}\times(\vec{A}\vec{B})=(\vec{C}\times\vec{A})\vec{B} \quad (并矢)\end{aligned}\right\} \tag{1-26}$$

在直角坐标系下，$\overline{\overline{D}}$ 的分量形式是

$$\begin{aligned}\overline{\overline{D}}=\vec{A}\vec{B}&=(\hat{x}A_x+\hat{y}A_y+\hat{z}A_z)(\hat{x}B_x+\hat{y}B_y+\hat{z}B_z)\\&=A_xB_x\hat{x}\,\hat{x}+A_xB_y\hat{x}\,\hat{y}+A_xB_z\hat{x}\,\hat{z}\\&\quad+A_yB_x\hat{y}\,\hat{x}+A_yB_y\hat{y}\,\hat{y}+A_yB_z\hat{y}\,\hat{z}\\&\quad+A_zB_x\hat{z}\,\hat{x}+A_zB_y\hat{z}\,\hat{y}+A_zB_z\hat{z}\,\hat{z}\end{aligned} \tag{1-27}$$

不难证明，上式中 9 个分量满足（1 - 19）式。现在令

$$\vec{D}^{(x)}=A_xB_x\hat{x}+A_yB_x\hat{y}+A_zB_x\hat{z}=B_x\vec{A} \tag{1-28}$$

$$\vec{D}^{(y)}=A_xB_y\hat{x}+A_yB_y\hat{y}+A_zB_y\hat{z}=B_y\vec{A} \tag{1-29}$$

$$\vec{D}^{(z)}=A_xB_z\hat{x}+A_yB_z\hat{y}+A_zB_z\hat{z}=B_z\vec{A} \tag{1-30}$$

则

$$\overline{\overline{D}}=\vec{D}^{(x)}\hat{x}+\vec{D}^{(y)}\hat{y}+\vec{D}^{(z)}\hat{z} \tag{1-31}$$

其中三个矢量函数 $\vec{D}^{(x)}$， $\vec{D}^{(y)}$， $\vec{D}^{(z)}$ 可以写成

$$\vec{D}^{(x)}=\overline{\overline{D}} \cdot \hat{x}, \quad \vec{D}^{(y)}=\overline{\overline{D}} \cdot \hat{y}, \quad \vec{D}^{(z)}=\overline{\overline{D}} \cdot \hat{z} \tag{1-32}$$

相似地，我们也可引进三个矢量 ${}^{(x)}\vec{D}$，${}^{(y)}\vec{D}$、${}^{(z)}\vec{D}$ 使

$$\overline{\overline{D}}=\hat{x}^{(x)}\vec{D}+\hat{y}^{(y)}\vec{D}+\hat{z}^{(z)}\vec{D} \tag{1-33}$$

因为空间某一点的并矢由沿着正交坐标轴的 9 个分量所决定［这些分量满足变换规律（1 - 19）式］，它可由一些矢量的组合所构成，这些矢量必须具有 9 个独立选择的常数。因为空间某点的矢量由三个数决定，一个并矢可由三个任意选择的矢量 $\vec{F}_m$ 所组成：

$$\overline{\overline{D}}=\hat{e}_1\vec{F}_1+\hat{e}_2\vec{F}_2+\hat{e}_3\vec{F}_3 \tag{1-34}$$

其中 $\hat{e}_1$， $\hat{e}_2$， $\hat{e}_3$ 是沿着三维右旋正交曲线坐标 u_1、u_2、u_3 的单位矢量。$\vec{F}_m$ 称为对应于 u_m 轴

的矢量分量（Component Vector）。对一个并矢来说，这个矢量分量可以是任意数量和取任意方向。沿着 u_m 轴方向的矢量 $\vec{L}$ 可以用 $\vec{L}\cdot\overline{\overline{D}}$ 变换为沿 $\vec{F}_m$ 方向的矢量。不难看出，矢量分量 $\vec{F}_m$ 和并矢 $\overline{\overline{D}}$ 在 u_1，u_2，u_3 轴上的分量 F_{mn} 之间的关系是

$$\vec{F}_m=\sum_n F_{mn}\hat{e}_n \tag{1-35}$$

在直角坐标系下，并矢 $\overline{\overline{D}}$ 可以表示为

$$\overline{\overline{D}}=\hat{x}\vec{F}_x+\hat{y}\vec{F}_y+\hat{z}\vec{F}_z \tag{1-36}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_x&=\hat{x}\cdot\hat{e}_1\vec{F}_1+\hat{x}\cdot\hat{e}_2\vec{F}_2+\hat{x}\cdot\hat{e}_3\vec{F}_3\\ \vec{F}_y&=\hat{y}\cdot\hat{e}_1\vec{F}_1+\hat{y}\cdot\hat{e}_2\vec{F}_2+\hat{y}\cdot\hat{e}_3\vec{F}_3\\ \vec{F}_z&=\hat{z}\cdot\hat{e}_1\vec{F}_1+\hat{z}\cdot\hat{e}_2\vec{F}_2+\hat{z}\cdot\hat{e}_3\vec{F}_3\end{aligned}\right\} \tag{1-37}$$

因为，一个并矢函数是一个复合函数，它包含着三个矢量函数。这正是在电磁场理论中每当分析三个不同矢量函数时引进并矢函数的原因。

散度和旋度算子可以作用于并矢函数。并矢函数的散度定义为

$$\nabla\cdot\overline{\overline{D}}=\nabla\cdot\vec{D}^{(x)}\hat{x}+\nabla\cdot\vec{D}^{(y)}\hat{y}+\nabla\cdot\vec{D}^{(z)}\hat{z}=\text{一个矢量} \tag{1-38}$$

其旋度定义为

$$\nabla\times\overline{\overline{D}}=\nabla\times\vec{D}^{(x)}\hat{x}+\nabla\times\vec{D}^{(y)}\hat{y}+\nabla\times\vec{D}^{(z)}\hat{z}=\text{一个并矢} \tag{1-39}$$

单位并矢 $\overline{\overline{I}}$ 定义为：

$$\left.\begin{aligned}\overline{\overline{I}}&=\hat{x}\,\hat{x}+\hat{y}\,\hat{y}+\hat{z}\,\hat{z}\quad\text{(直角坐标)}\\ \overline{\overline{I}}&=\hat{e}_1\,\hat{e}_1+\hat{e}_2\,\hat{e}_2+\hat{e}_3\,\hat{e}_3\quad\text{(任意正交曲线坐标)}\end{aligned}\right\} \tag{1-40}$$

设 ψ 代表任一标量点函数，则

$$\vec{F}\cdot\overline{\overline{I}}=\overline{\overline{I}}\cdot\vec{F}=\vec{F},\qquad \nabla\cdot(\overline{\overline{I}}\psi)=\nabla\psi \tag{1-41}$$

§1-11　自由空间中的并矢格林函数

上一节介绍了并矢和它的性质，本节和以后各节将叙述并矢在电磁理论中所起的作用。

自由空间中的并矢格林函数由自由空间中的矢量格林函数组成。现在来研究自由空间中不存在散射体而由简谐电流所产生的电磁场。设 $\bar{r}$ 为场点对坐标原点的矢径，$\vec{J}(\bar{r})$ 为简谐电流密度，k_0 为自由空间的波数或传播常数，则电磁场 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 满足下列矢量波方程：

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}(\bar{r})-k_0^2\vec{E}(\bar{r})=-\mathrm{j}\omega\mu_0\vec{J}(\bar{r}) \tag{1-42}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H}(\bar{r})-k_0^2\vec{H}(\bar{r})=\nabla\times\vec{J}(\bar{r}) \tag{1-43}$$

以上二方程的解是

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= -\mathrm{j}\omega\left[1+\frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\cdot\right]\vec{A}(\vec{r})\\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}(\vec{r})\end{aligned}\right\} \tag{1-44}$$

其中矢量磁位 $\vec{A}(\vec{r})$ 为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0\int_V G_0(\vec{r}/\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')\,\mathrm{d}V \tag{1-45}$$

$$G_0(\vec{r}/\vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{1-46}$$

其中 $G_0(\vec{r}/\vec{r}')$ 是自由空间中标量格林函数，$\vec{r}$ 代表场点坐标，$\vec{r}'$ 代表源点坐标。

设在 $\vec{r}'$ 处沿 $\hat{x}$ 方向有无限小电流元，其电流矩 $\mathrm{i}\mathrm{d}x$ 为 $1/(-\mathrm{j}\omega\mu_0)$，则根据（1－45）式，这个电流元所产生的矢磁位为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{j}}{\omega}G_0(\vec{r}/\vec{r}')\hat{x} \tag{1-47}$$

如用 $\vec{G}_0^{(x)}(\vec{r}/\vec{r}')$ 代表该电流元在 $\vec{r}$ 处所产生的电场，则

$$\vec{G}_0^{(x)}(\vec{r}/\vec{r}') = \left[1+\frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\cdot\right]G_0(\vec{r}/\vec{r}')\hat{x} \tag{1-48}$$

它正好是下式的解：

$$\nabla\times\nabla\times\vec{G}_0^{(x)}(\vec{r}/\vec{r}') - k_0^2\vec{G}_0^{(x)}(\vec{r}/\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\hat{x} \tag{1-49}$$

且 $\vec{G}_0^{(x)}(\vec{r}/\vec{r}')$ 也满足自由空间电磁场的辐射条件：

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\nabla\times\vec{G}_0^{(x)}(\vec{r}/\vec{r}') + \mathrm{j}k_0\hat{r}\times\vec{G}_0^{(x)}(\vec{r}/\vec{r}')\right] = 0 \tag{1-50}$$

$\vec{G}_0^{(x)}(\vec{r}/\vec{r}')$ 是自由空间源指向 $\hat{x}$ 方向的矢量格林函数。它在矢量场中所起的作用与 $G_0(\vec{r}/\vec{r}')$ 在标量场中所起的作用相似。同理，$\vec{G}_0^{(y)}(\vec{r}/\vec{r}')$ 和 $\vec{G}_0^{(z)}(\vec{r}/\vec{r}')$ 所满足的方程和其解分别是

$$\nabla\times\nabla\times\begin{matrix}\vec{G}_0^{(y)}(\vec{r}/\vec{r}_0')\\ \vec{G}_0^{(z)}(\vec{r}/\vec{r}_0')\end{matrix} - k^2\begin{matrix}\vec{G}_0^{(y)}(\vec{r}/\vec{r}_0')\\ \vec{G}_0^{(z)}(\vec{r}/\vec{r}_0')\end{matrix} = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\begin{matrix}\hat{y}\\ \hat{z}\end{matrix} \tag{1-51}$$

$$\begin{matrix}\vec{G}_0^{(y)}\\ \vec{G}_0^{(z)}\end{matrix} = \left[1+\frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\cdot\right]G_0(\vec{r}/\vec{r}')\begin{matrix}\hat{y}\\ \hat{z}\end{matrix} \tag{1-52}$$

这两个函数同样也满足自由空间的辐射条件。如以上所指出的，一个并矢函数可以容纳三个矢量函数，现在可以很自然地引进一个并矢函数，它包含 3 个不同的矢量格林函数如下：

$$\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}') = \vec{G}_0^{(x)}(\vec{r}/\vec{r}')\hat{x} + \vec{G}_0^{(y)}(\vec{r}/\vec{r}')\hat{y} + \vec{G}_0^{(z)}(\vec{r}/\vec{r}')\hat{z} \tag{1-53}$$

将（1－49）和（1－51）式分别乘以 $\hat{x}$、$\begin{matrix}\hat{y}\\ \hat{z}\end{matrix}$，再将所得的三个方程相加，我们就得到一个关于 $\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')$ 的格林并矢波方程：

$$\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}') - k_0^2\overline{\overline{G}}(\vec{r}/\vec{r}') = \bar{\bar{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{1-54}$$

将（1－48）和（1－52）代入（1－53）式得

$$\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')=\left[1+\frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\cdot\right]G_0(\vec{r}/\vec{r}')\overline{\overline{I}}=\left[\overline{\overline{I}}+\frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\right]G_0(\vec{r}/\vec{r}') \tag{1-55}$$

方程（1－54）和（1－55）是将三个矢量格林函数各自分离的微分方程和其对应的解组合在一起写成并矢的形式。同样地，对应于三个矢量格林函数的三个分离的辐射条件也可以组合写成并矢形式：

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\nabla\times\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')+\mathrm{j}k_0\vec{r}\times\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\right]=0 \tag{1-56}$$

可见，一旦求出$\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')$以后，则由于任意电流分布所产生的电磁场可用迭加法求得，也可以用积分法求得。积分公式很容易从下列矢量格林定理导出如下：

$$\int_V(\vec{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{P})\mathrm{d}V=\int_S(\vec{Q}\times\nabla\times\vec{P}-\vec{P}\times\nabla\times\vec{Q})\mathrm{d}S \tag{1-57}$$

令

$$\vec{P}=\vec{E}(\vec{r}),\quad \vec{Q}=\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\cdot\vec{a} \tag{1-58}$$

其中$\vec{a}$是一个任意常矢量。将上式代入（1－57）式，我们得

$$\begin{aligned}&\int_V\left\{\vec{E}(\vec{r})\cdot\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\cdot\vec{a}-\left[\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\cdot\vec{a}\right]\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r})\right\}\mathrm{d}V\\&=-\int_S\left\{\nabla\times\vec{E}(\vec{r})\times\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\cdot\vec{a}+\vec{E}(\vec{r})\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\cdot\vec{a}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\\&=-\int_S\left\{\hat{n}\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r})\cdot\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\cdot\vec{a}+\hat{n}\times\vec{E}(\vec{r})\cdot\nabla\times\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\cdot\vec{a}\right\}\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{1-59}$$

其中$\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\hat{n}\mathrm{d}S$且应用了矢量公式$\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}=\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$，$\hat{n}$是沿$\mathrm{d}S$外法线方向的单位矢量。由于

$$\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')=\overline{\overline{I}}\delta(\vec{r}/\vec{r}')+k_0^2\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{j}\omega\mu_0\vec{J}(\vec{r})+k_0^2\vec{E}(\vec{r})$$

（1－59）式中的体积分化为

$$\begin{aligned}&\int_V\left\{\vec{E}(\vec{r})\cdot\left[\overline{\overline{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}')+k_0^2\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\right]\cdot\vec{a}-\left[-\mathrm{j}\omega\mu_0\vec{J}(\vec{r})+k_0^2\vec{E}(\vec{r})\right]\cdot\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\cdot\vec{a}\right\}\cdot\mathrm{d}V\\&=\vec{a}\cdot\int_V\vec{E}(\vec{r})\cdot\overline{\overline{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\mathrm{d}V+\mathrm{j}\omega\mu_0\int_V\vec{J}(\vec{r})\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\cdot\vec{a}\,\mathrm{d}V\\&=\vec{a}\cdot\vec{E}(\vec{r}')+\mathrm{j}\omega\mu_0\int_V\vec{J}(\vec{r})\cdot\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\cdot\vec{a}\mathrm{d}V\end{aligned}$$

因此，（1－59）式化为

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{E}(\vec{r}')=&-\mathrm{j}\omega\mu_0\int_V\vec{J}(\vec{r})\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\cdot\vec{a}\,\mathrm{d}V\\&-\int_S\left\{\left[\hat{n}\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r})\right]\cdot\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\cdot\vec{a}+\left[\hat{n}\times\vec{E}(\vec{r})\right]\cdot\nabla\times\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}/\vec{r}')\cdot\vec{a}\right\}\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{1-60}$$

用$-\mathrm{j}\omega\mu_0\vec{H}(\vec{r})$代表$\nabla\times\vec{E}(\vec{r})$并将有一撇和没有一撇的变量交换，同时消去常矢量$\vec{a}$，我们得