

行列式論與矩陣論

張 達 達 編

商 務 印 書 館



8137號註冊證

書 號 5 2 1 4 3
字 價 ￥ 1 2 4 0 0

論陣矩與論式行列

張達達編

商務印書館

行列式論與矩陣論

張達達編

商務印書館

本書從由於解聯立線性方程的需要談起而引進行列式的概念，進一步來敘述行列式之基本性質，且說明這些基本性質是行列式的特徵。然後又利用這些性質重新回到聯立線性方程之探討，並說明其在幾何學上之應用，來結束關於行列式之研究。再來研究矩陣的問題，尤其著重對稱，反對稱，安密達(Hermite)，反安密達。正交及酉交(unitary)這些特殊矩陣之性質，對它們的問題另闢一章專事探討。再敘述 λ -矩陣，即 λ -矩陣之意義，它的初等變換，它的標準形式，它的不變因子與初等因子， λ -矩陣之等價及等價的條件。由是再介紹矩陣之特徵矩陣，特徵多項式，最小多項式及特徵根；然後再利用特徵矩陣之初等因子及不變因子來造矩陣之標準形式，即約旦(Jordan)標準形與有理標準形，並進而討論矩陣可以化成對角矩陣之充要條件。最後又敘述安密達，反安密達及酉交矩陣可以化成對角矩陣，並說明可用正交變換把這些矩陣化為對角形，即主軸問題得以解決，也就是本書內容之最基本的問題。並於書末附合成矩陣(Compound matrix)。

本書原由生活·讀書·新知三聯書店出版，1954年9月起由本館出版。

行 列 式 論 與 矩 陣 論

張 遠 達 編

★版權所有★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一—號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 北 京 廠 印 刷

◆(52143)

開本 850×1168—1/32 印張 7 5/16 字數 181,000

1954年9月新一版 印數1—2,000 定價¥12.400

序

行列式與矩陣的理論不僅僅對於研究數學是一件很重要的東西，而且對於別門科學的研討也是一個不可缺少的工具。關於這門課程，想找一部有系統敘述的書籍，比較困難。譬如在我國行銷已久，且為各大學採用作為代數學教材的 Bocher, *Introduction to Higher Algebra* 一書，雖然敘述清暢，條理簡明，初學也易於了解，但是關於方陣的重要部分如標準形(canonical form)及對角形(diagonal form)均未提到，實在是一件很可惋惜的事情。

本書編纂的目的，是想拿代數學的觀點，先從行列式的來源解聯立線性方程式談起，逐漸地談到行列式的基本性質，再利用這些性質又回到一般聯立線性方程式的研究。然後敘述矩陣之意義而研究特殊方陣如對稱，斜對稱，Hermitian, skew-Hermitian, 直交以及 U-交方陣的基本性質；更進一步地研究一般矩陣的單因子，以及方陣之特徵多項式(characteristic polynomial)與特徵根(characteristic root)等等問題。最後，研究方陣的標準形及對角形。總而言之，我的意思是想將行列式與矩陣這個問題站在代數學的觀點來一個有系統的解說。又全書中行列式及矩陣的元素都是有理數，或實數，或複數，不是指一般體(field)內的元素，用意是想使初學的人容易了解。

至於分散在各章中的習題，採取的方法是想試驗讀者已否領會本文爲主旨，當然其中也包含一些例題及補充定理作爲後面有關聯部分而用的。解答方面，大致沒有什麼困難；凡是比較艱澀一點的，都略略給了些提示。

這篇稿子是我在武漢大學試教了兩年以後寫的，寫成了以後又教了兩年，當然其中常常有修正，刪去和補充的地方。稿子固然是寫成了，但囿於個人的學識疏淺，力不逮意的地方當然很多，希望大家多多指正我的謬誤，多多給我嚴格的批評。

1950年5月28日，張遠達於珞珈山

目 錄

第一章	行列式	1
§ 1.	行列式的來源	1
§ 2.	行列式的基本性質	6
§ 3.	行列式的乘法	11
§ 4.	子式, 餘子式, 代數餘子式	12
	習 題	13
§ 5.	行列式的展開	14
	習 題	17
§ 6.	拉普拉斯 (Laplace) 展開式	21
§ 7.	克雷姆 (Cramer) 法則	28
	習 題	30
第二章	矩陣的簡單關係	31
§ 8.	關於矩陣的諸定義	31
	習 題	33
§ 9.	矩陣的簡單運算	33
	習 題	34
§ 10.	線性關係	34
	習 題	40

第三章	線性方程組	41
§11.	一般聯立方程式	41
	習 題	45
§12.	方程組(齊次或非齊次)的一般解	46
	習 題	51
§13.	幾何學上的應用	52
	習 題	55
第四章	行列式與矩陣的續論	57
§14.	附屬行列式	57
§15.	矩陣的乘法	62
	習 題	68
§16.	么方陣, 逆方陣, 附屬方陣, 倍么方陣	68
	習 題	75
第五章	特殊行列式與特殊方陣	77
§17.	對稱方陣或行列式	77
	習 題	78
§18.	斜對稱方陣或行列式	79
	習 題	81
§19.	對稱及斜對稱方陣之秩的決定	82
	習 題	85
§20.	直交方陣或行列式	85
	習 題	88
§21.	Hermitian 方陣或行列式	89
	習 題	91
§22.	skew-Hermitian 方陣或行列式	91
	習 題	94
§23.	Hermitian 及 skew-Hermitian 方陣之秩的決定	94
	習 題	96
§24.	U-交方陣或行列式	96
	習 題	98

第六章	單因子	100
§25.	矩陣的同值	100
	習題	104
§26.	λ -矩陣的法式	104
	習題	111
§27.	λ -矩陣的單因子	112
	習題	116
§28.	元素爲整數的矩陣	117
	習題	119
第七章	特徵多項式與最小多項式	120
§29.	方陣的特徵多項式	120
	習題	125
§30.	方陣的冪根	126
§31.	方陣的特徵根	130
	習題	143
第八章	方陣的標準形	145
§32.	方陣的相似	145
	習題	149
§33.	向量串	150
	習題	152
§34.	方陣的 Jacobi 氏標準形	153
	習題	157
§35.	方陣的有理標準形	157
	習題	170
§36.	方陣的 Jordan 氏標準形	170
	習題	175
§37.	方陣之直和的最小多項式與特徵多項式	175
	習題	181
第九章	方陣的對角形	182
§38.	一般方陣演變爲對角形的條件	182

習 題.....	188
§39. Hermitian方陣及實對稱方陣的對角形	188
習 題.....	197
§40. skew-Hermitian 方陣及實斜對稱方陣的對角形.....	197
§41. U-交方陣及實直交方陣的對角形.....	198
習 題.....	202
附篇 I 合成方陣	204
§42. 合成方陣的簡單性質.....	204
§43. 合成方陣的行列式及積.....	207
習 題.....	213
附篇 II 終結式	215
§44. 以行列式表終結式.....	215
§45. 以根的對稱函數表終結式.....	219
§46. 二個終結式 D 與 $R(f, g)$ 的關係.....	220
習 題.....	222

第一章 行列式

§1. 行列式的來源

凡已讀過初等代數學的皆略知行列式的意義及其一般基本性質。然為何如斯下行列式之定義及其歷史之來源非初等代數學所能詳言。實際，行列式起源於二元及三元線性聯立方程式之解法。編者欲求系統完整起見，先從二元三元線性聯立方程式着手循序以進而下 n 次行列式之定義並推演其一般性質。

茲欲解二個二元 x 及 y 之線性聯立方程式

$$(1) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = k_1, \\ a_2x + b_2y = k_2, \end{cases}$$

則以第一個及第二個方程式分別乘以 b_2 及 $-b_1$ ，而後加其結果乃得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = k_1b_2 - k_2b_1.$$

同理若以一二兩方程式分別乘以 $-a_2$ 及 a_1 而加之，則得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1k_2 - a_2k_1.$$

若 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ，則

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{k_1b_2 - k_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \frac{a_1k_2 - a_2k_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases}$$

反之，如斯之 x 及 y 之值確能滿足(1)式。故當 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 時，(1)之解確為(2)。至此，有一問題生焉，即(2)式雖可用為一般二元線性聯立方程式之解之公式，然(2)式頗不易記憶。故為方便記憶起見，不得不將(2)式改書另一記號。

若令 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ ，則記號 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 實便於記憶，即將方程式(1)中 x 之係數書為第一縱行， y 之係數書為第二縱行，而將第一個方程式之係數書為第一橫行，第二個之係數書為第二橫行（為術語簡單計，吾人以後恆曰縱行為行，橫行為列）而本無意義之符號 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ，吾人今以其代表有意義之數 $a_1b_2 - a_2b_1$ 者，兩相比較乃可規定 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 中自左上角至右下角二數相乘加上自左下角至右上角二數相乘之反號，即得 $a_1b_2 - a_2b_1$ ，由此規定，又知 $k_1b_2 - k_2b_1 = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ， $a_1k_2 - a_2k_1 = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}$ ，而(1)之解遂為

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

此為一較便利於記憶之形。

茲再轉論三元線性聯立方程式

$$(3) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3. \end{cases}$$

以 $b_2c_3 - b_3c_2$, $b_3c_1 - b_1c_3$, $b_1c_2 - b_2c_1$ 分別乘(3)之第一，二，三個方程式而再加其結果即得

$$\begin{aligned} & (a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)x \\ & = k_1b_2c_3 - k_1b_3c_2 + k_2b_3c_1 - k_2b_1c_3 + k_3b_1c_2 - k_3b_2c_1. \end{aligned}$$

若 $a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \neq 0$,

則
$$x = \frac{k_1 b_2 c_3 - k_1 b_3 c_2 + k_2 b_3 c_1 - k_2 b_1 c_3 + k_3 b_1 c_2 - k_3 b_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}.$$

此式又不易記憶，若與解(1)同樣而令(3)中 x, y, z 之係數書為第一，二，三行(縱行)，第一，二，三個方程式之係數書為第一，二，三列(橫行)，即以

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1,$$

則 x 之分子與分母所不同者只是分母之 a_1, a_2, a_3 分別換成了 k_1, k_2, k_3 ，故

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

而為一便於記憶之式，且同樣可得，

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

若令 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ，而由

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

觀之，可得下列二事項：——

i) D 爲 a, b, c 之乘積共 6 項之代數和，而每項均爲 a, b, c 三文字之積， a 居首， b 居次， c 居末；再將 a, b, c 之右下角附以 1, 2, 3 三數字之所有排列（共 $3! = 6$ 個排列）。

ii) 若視 123 爲自然順序，則 132 爲由 123 中 2 與 3 兩數字互調而成；231 由 123 中先互調 1 與 3 兩數字，然後將其結果再互調 2 與 3 即得（共互調兩次）；213 僅由 123 中互調 1 與 2；312 乃由 123 中先互調 1 與 3，再將其結果互調 1 與 2 共互調兩次而成；321 僅由 123 中互調 1 與 3。且由 D 之 6 項觀之，知 $a_i b_j c_k$ 或附以正號或附以負號於其前，純依 $(i j k)$ 爲由 (123) 或互調二數字偶數次〔註：此時僅互調 2 次，或 0 次如 123 是〕或奇數次〔註：此時均爲互調 1 次〕而定。

然吾人所應注意者， D 之第一，二，三行各別全爲 a, b, c ；而於各文字之右下角各別附書 1, 2, 3 以表示 D 之第一，二，三列。故上述之 i) 及 ii) 兩事項又可言表如次：——

將 D 之第一，二，三行之文字 a, b, c 依順序排列後，再使列之順序作種種之排列（即使右下角之數字 1, 2, 3 作種種之排列）；若排列 $(i j k)$ 由 1, 2, 3 互調二數字偶數次而成時，則將 $a_i b_j c_k$ 冠以正號；苟 $(i j k)$ 由 1, 2, 3 互調二數字奇數次而成時，則將 $a_i b_j c_k$ 冠以負號。

至此，又有一問題生焉。如 132 本可由 123 中互調 2 與 3 二數字一次而成（奇數次）。若將 123 中先互調 1 與 2 得 213，再互調 2 與 3 得 312，最後互調 1 與 3 即得 132，故 132 又可視爲由 123 中互調二數字共 3 次而成。互調 1 次與 3 次雖均爲奇數次，然則吾人能否可由 123 互調二數字偶數次亦得 132 乎？爲回答此問題，乃考更一般之 n 個文字 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 之多項式

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \cdots (x_1 - x_n) \\ (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \cdots (x_2 - x_n) \\ (x_3 - x_4) \cdots (x_3 - x_n) \\ \cdots \cdots \cdots \\ (x_{n-1} - x_n),$$

此爲 $x_1, \dots, x_n$ 之交代式, 可證如次: ——

今互調任二文字 x_k 與 x_l 而考 P 之變化 P 之 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個一次因子中不含 x_k 與 x_l 者對此互調不受影響, 含 x_k 與 x_l (僅一因子) 者對此互調僅變更其符號, 至含 x_k 不含 x_l 與含 x_l 不含 x_k 者可兩兩合併而書爲 $\pm(x_k - x_i)(x_l - x_i) (i \neq k, i \neq l)$ 形, 如斯之因子之積對此互調亦不受影響。故結局, 互調 x_k 與 x_l , 則 $P(x_1, \dots, x_n)$ 僅相差一符號, 即

$$P(\dots, x_k, \dots, x_l, \dots) = -P(\dots, x_l, \dots, x_k, \dots),$$

故 $P(x_1, \dots, x_n)$ 爲 $x_1, \dots, x_n$ 之交代式。

茲令 $(i_1 i_2 \dots i_n)$ 爲 $(12 \dots n)$ 之一排列。某甲由 $(12 \dots n)$ 互調二個數字 m 次乃得 $(i_1 i_2 \dots i_n)$, 某乙乃由 $(12 \dots n)$ 互調二個數字 l 次而得 $(i_1 i_2 \dots i_n)$ 。且當 $(12 \dots n)$ 中某二個數字互調時, 令 $(x_1 x_2 \dots x_n)$ 中相對應的二文字亦作如斯之互調[如 i 與 j 二數字互調時, P 中二文字 x_i 與 x_j 亦令其互調]; 故某甲所得之結果爲

$$P(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = (-1)^m P(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

而某乙所得爲

$$P(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = (-1)^l P(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

因之 $(-1)^m P(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^l P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

然 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 非恆等於零, 故由上恆等式兩邊消去之即得

$$(-1)^m = (-1)^l.$$

故 m 與 l 或同爲偶數或同爲奇數。由是乃知: 由 $(12 \dots n)$ 互調二數字若一度爲偶數次而得 $(i_1 i_2 \dots i_n)$ 者, 則不論用何方法互調 $(12 \dots n)$ 中二數字而得 $(i_1 i_2 \dots i_n)$ 恆爲偶數次之互調也。苟一度爲奇數次, 則恆

爲奇數次。至此, 吾人之問題乃完全獲解矣。因之, 若名 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

曰三次行列式, 則得 $D = \sum (-1)^{l_{a_i b_j c_k}} a_i b_j c_k$, 而 $(i j k)$ 爲 (123) 之一排

列, λ 爲由互調 (123) 中二數字而得 (i, j 者) 之互調之次數 [因之, λ 或恆爲偶或恆爲奇]. 此展開法亦適用於 $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$, 蓋 $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$
 $= \sum (-1)^{\lambda} a_i b_j$ 甚爲明顯. 吾人名 $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$ 曰二次行列式. 茲爲推廣計, 命 n^2 個數 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 如次排列而成之正方形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

名曰 n 次行列式, 而令其爲

$$\sum (-1)^{\lambda} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

式中 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 爲 $(12 \cdots n)$ 之一排列, λ 爲互調 $(12 \cdots n)$ 中二數字而得 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 者之互調之次數, Σ 乃代表 $n!$ 個排列所成 $n!$ 項之代數和. 據 $P(x_1, \dots, x_n)$ 爲交代式之理, 此定義實可容許. 故行列式之思想起源於聯立方程式之解法, 至此甚明.

§2. 行列式的基本性質

行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中的 a_{ij} 稱爲 D 之元素. 第一, 二,

$\dots, n$ 行之元素順次換爲第一, 二, $\dots, n$ 列之元素, 而第一, 二, $\dots, n$ 列者順次又換爲第一, 二, $\dots, n$ 行 (簡言之, 行與列互換) 所得之新行列式恆表以

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

若令 $a_{ij} = b_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 則由行列式之定義, 知