数学分析中的问题与例题

张人智　刘柏林　编

数学分析中的问题与例题

张人智　刘柏林　编

数学分析中的问题与例题

张人智　刘柏林　编

江西人民出版社出版

（南昌市第四交通路铁道东路）

江西省新华书店发行　江西印刷公司印刷

开本787×1092 1/32　印张8　字数17万

1984年12月第1版　1984年12月第1次印刷

印数：1—10,000

统一书号：7110·483　定价：0.69元

前　　言

随着科学技术的深入发展，数学分析在工程技术与自然科学各个领域中的运用越来越广。为了向具有微积分基础知识的读者提供一些自学数学分析的素材，帮助工程技术人员、电大与高等院校理工科学生进修或复习数学分析的内容，我们广泛搜集了数学分析中的问题，选择了适当的解题方法，编写了这本《数学分析中的问题与例题》。

编写本书时，在材料的选取上，我们侧重于基本方法的训练与运用的广泛性两个方面；在内容的安排上，采取了大致在古典数学分析的系统下，按方法来叙述。本书有别于微积分的教科书，也不同于某一本书的习题解答。因为本书是通过例题来说明一种数学方法的，所以它比抽象的叙述要丰富，要具体。它可使读者从中学到一些感到新鲜，而且只要稍加思考就能接受的问题。学完这些问题，可以帮助读者掌握数学分析的方法。读者在阅读本书时，请不要疏忽书中的注释，因为在那里读到的并非闲话。对一些应用广泛的问题（特别是一些不等式），我们尽可能用了多种方法证明，读者只要读书中的某些片断就能掌握它。

本书内容包括实数序列与实值级数，函数的连续性，微分，积分与一致收敛五章，其中介绍了数学分析中的若干基本方法，选编了大量的命题与例题，并作了详细的证明与解答。

在编写本书过程中，戴执中教授曾给予我们大力支持和热情鼓励；张秀芝、张剑青副教授对书稿提了许多宝贵的修改意

见；王仁藻同志对本书初稿多处作了修改，并对书中有些问题提供了较好的证明方法；黄志俊同志仔细审阅了本书的原稿，提出了宝贵的修改意见。借此机会谨向他们表示衷心的感谢。

由于我们的水平有限，书中谬误之处在所难免，我们诚恳地期望读者批评指正。

编　者

一九八四年元月

内 容 简 介

本书介绍了数学分析中的若干基本方法，同时从实数序列与实值级数，函数的连续性，微分，积分与一致收敛中选编了大量的命题与例题，并作了详细的证明或解答，以使读者通过学习能够提高分析问题与解决问题的能力。

本书在编排、取材上条理清晰，概念准确，层次分明，便于自学，可作为具有微积分基础知识的读者、工程技术人员、中学教师、电大和高等院校理工科学生自学、进修或复习数学分析基本内容的指导书。

目　　录

第一章　实数序列与实值级数

§1　有穷不等式……1

§2　序列的极限……14

§3　实值级数的敛散性……38

§4　关于级数的重排……52

第二章　函数的连续性

§1　函数的极限……58

§2　函数的连续性……71

§3　关于不动点与函数方程的若干命题……89

第三章　微　分

§1　可微性……93

§2　导数的应用……102

§3　凸函数……117

§4　有限差分及其应用……123

第四章　积　分

§1　可积性……131

§2　积分作为和式的极限……142

§3　关于定积分的极限问题……149

§4　带核的积分……160

§5　积分不等式……169

第五章　一致收敛

§1　一致收敛与伪一致收敛……179

§2　逼近定理……………………………………………… 193
§3　关于二重极限的换序问题……………………… 208
§4　函数序列与函数级数的若干问题……………… 219
§5　关于级数的求和…………………………………… 232
主要参考书目……………………………………………… 248

第一章　实数序列与实值级数

§1　有穷不等式

不等式所涉及的是数量之间大小的比较，它较明显地表现出变量之间在变化过程中的关系，在实际问题中，这种关系是大量存在的。从某种意义上来说，不等式所反映的关系比等式所反映的关系更为普遍。因此，对不等式的研究就更为重要。

根据变量的不同情况，不等式大致可分为有穷不等式（即初等不等式）、无穷不等式以及积分不等式。初等不等式的证明，采用的方法主要有数学归纳法、应用导数的性质及二次型的正定性。而无穷不等式经常是由初等不等式经极限过程得到的。关于积分不等式，在第四章将专门有一节对它进行讨论。

1·1　试证：

（i）$2^n>n$，　$(n=0,1,2,\cdots\cdots)$

（ii）$2^n>n^2$，$(n=5,6,7,\cdots\cdots)$

证明：（i）由二项式定理，得

$$2^n=(1+1)^n=1+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}>\binom{n}{1}=n$$

（ii）当 $n=5$ 时，不等式显然成立，假定对正整数 $k\,(>5)$ 有 $2^k>k^2$，因为当 $k\geqslant5$ 时

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^2=1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\leqslant1+\frac{2}{5}+\frac{1}{25}<2$$

所以

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\cdot k^2<2\cdot2^k$$

即 $$2^{k+1}>(k+1)^2$$

1·2　若 b、d 为正数，且$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，则

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

证明：因$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$及b,d均为正数，我们有$ad<bc$，因此$ab+ad<ab+bc$，即$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$。类似地可以得到另一边的不等式。

1·3　设 $S=\left\{\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \cdots,\ \frac{a_n}{b_n}\right\}$，其中 $b_k>0(k=1,2,\cdots n)$ 为有穷分数组，则

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{a_k}{b_k}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{a_k}{b_k}$$

证明：(1·2) 为 $n=2$ 的情况，一般容易在分数的个数上作归纳证明。

1·4　设 $n\geqslant2$ 且 $a_1,a_2,\cdots,\ a_n$ 为正数，则

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

证明：显然，$(1+a_1)(1+a_2)=1+a_1+a_2+a_1a_2>1+(a_1+a_2)$。容易在 n 上用数学归纳法证得一般情况。

1·5　习题：

(i) 设 a,b 为非负实数，证明，对任意自然数 n，有

$$a^n+b^n\leqslant(a+b)^n$$

(ii) 设 $n\geqslant2$，且 $a_1,a_2,\cdots,\ a_n$ 为小于 1 的正数，则

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-(a_1+\cdots+a_n)$$

(iii) 若 $0<a<1$，证明，对任意的自然数 n，有

$$1+a+\cdots+a^n<\frac{1}{1-a}$$

1·6 试证：（i）$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<1$

（ii）$1+2^{-2}+3^{-2}+\cdots+n^{-2}<2$

证明：（i）我们采用裂项法，由$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$立即可得

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}<1$$

（ii）因$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k\cdot k}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}(k=2,3,\cdots n)$

因此

$$1+2^{-2}+\cdots+n^{-2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}<1+\left(1-\frac{1}{n}\right)<2$$

1·7 习题：当$n\geqslant 2$时，试证

（i）$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$

（ii）$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

1·8 （Bernoulli不等式），设$p>0$，$x\geqslant -1$则

当$p>1$时，　$(1+x)^p\geqslant 1+px$；

当$p<1$时，　$(1+x)^p\leqslant 1+px$

证明：如果p为正整数，容易用二项式定理直接得到在p为一般实数时，令　$F(x)=(1+x)^p-(1+px)$，则　$F'(x)=p(1+x)^{p-1}-p$，因此当$p>1$时

$$F'(x)\begin{cases}<0 & (-1\leqslant x<0)\\ =0 & (\quad x=0\quad)\\ >0 & (\quad x>0\quad)\end{cases}$$

所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处取到极小值 $F(0)=0$。故当 $x\geqslant -1$ 时，$F(x)\geqslant 0$。类似地可以得到另一个不等式。

1·9 试证：$\frac{1}{p+1}n^{p+1}<1^p+2^p+\cdots+n^p<\frac{1}{p+1}(n+1)^{p+1}$ $(p>0)$

证明：由（1·8），当 $p>1$ 时，有 $(1+x)^p\geqslant 1+px$ $(x\geqslant -1)$

取 $x=\frac{1}{n}$ 得到 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}\geqslant 1+\frac{p+1}{n}$，因此 $n^p\leqslant\frac{1}{p+1}[(n+1)^{p+1}-n^{p+1}]$。令 n 遍取1·2,…，n 并求和，得到

$$1^p+2^p+\cdots+n^p\leqslant\frac{(n+1)^{p+1}-1}{p+1}<\frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$$

取 $x=-\frac{1}{n}$，类似地得到

$$\frac{1}{p+1}n^{p+1}<1^p+2^p+\cdots+n^p$$

当 $0<p<1$ 时，可以完全类似地从（1·8）的另一个不等式得到。

1·10 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正数，且 $a_1a_2\cdots a_n=1$，则

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n$$

证明：在 n 上作归纳证明。当 $n=2$ 时，由于 $a_1a_2=1$，可设 $a_2=\frac{1}{a_1}$。从 $(a_1-1)^2\geqslant 0$ 知 $a_1^2+1\geqslant 2a_1$，即 $a_1+\frac{1}{a_1}\geqslant 2$。故结论成立。

假设 $n=k$ 时，成立 $a_1+a_2+\cdots a_k\geqslant k$，要证 $n=k+1$ 时结论成立，也就是：如果 $a_1\cdots a_k,a_{k+1}$ 均为正数，且 $a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}=1$，那么 $a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}\geqslant k+1$。

当 $a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}=1$ 时，等号显然成立。当 $a_1,a_2,$

$\cdots$, a_{k+1} 不全相等时，则必有其中之一大于1，而另有一个小于1。不妨设 $a_1>1$，$a_{k+1}<1$。从

$$(a_1a_{k+1})a_2\cdots a_k=1$$

并由归纳假设，有

$$a_1a_{k+1}+a_2+\cdots+a_k\geqslant k$$

故

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}\\=&a_1a_{k+1}+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+a_1-a_1a_{k+1}\\\geqslant&k+a_{k+1}+a_1-a_1a_{k+1}\\=&(k+1)+(a_{k+1}-1)(1-a_1)>k+1\end{aligned}$$

1·11 对任意的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，试证：

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

（几何平均数≤算术平均数）

这个重要的不等式的证明方法很多，我们这里介绍两种常见的证明方法。

证一：分两个步骤进行。第一步证明当 $n=2^k$ 时成立，我们在自然数 K 上作归纳证明。当 $k=1$ 时，由于

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2-a_1a_2=\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2\geqslant0$$

得到

$$a_1a_2\leqslant\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$$

假设 $n=2^k$ 时不等式成立，要证 $n=2^{k+1}$ 时成立，于是不等式对 n 为2的任一幂次成立。由归纳假设

$$a_1a_2\cdots a_{2^k}\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}$$

因此

$$a_1a_2\cdots a_{2^k}\cdot a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}=(a_1a_2\cdots a_{2^k})(a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}})$$

$$\leqslant\left(\frac{a_1a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}\cdot\left(\frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)^{2^k}$$

$$\leqslant\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right]^2\right\}^{2^k}$$

$$=\left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$$

第二步：假设 n 不是 2 的幂次，则存在正整数 m，使得 $2^m<n<2^{m+1}$。置 $p=2^{m+1}$，$a=\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$，添加 $p-n$ 个数 $a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=a_p=a$，则由第一步，我们可得到

$$a_1a_2\cdots a_n\cdot a^{p-n}\leqslant\left(\frac{a_1+\cdots+a_n+(p-n)a}{p}\right)^p$$

$$=\left(\frac{na+(p-n)a}{p}\right)^p=a^p$$

两边除以 a^{p-n} 得到

$$a_1\cdots a_n\leqslant a^n=\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^n$$

证二：令 $g=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$，则

$$\frac{a_1}{g}\cdot\frac{a_2}{g}\cdots\frac{a_n}{g}=1。\text{由}(1\cdot10)\text{知}$$

$$\frac{a_1}{g}+\frac{a_2}{g}+\cdots+\frac{a_n}{g}\geqslant n$$

所以

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant g=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

1·12　为了证明Hölder不等式，我们可先证明如下结果：设 $x>0$，则（i）当 $0<\alpha<1$ 时，有 $x^\alpha-\alpha x\leqslant1-\alpha$

（ii）当 $\alpha>1$ 时，　　有 $x^\alpha-\alpha x\geqslant1-\alpha$

证明：我们证(ii)，(i)可完全类似地得到。作 $f(x)=x^\alpha-\alpha x$，则$f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)$，因$\alpha>1$，所以当$0<x<1$时，$f'(x)<0$；$x>1$时，$f'(x)>0$，故$f(1)=1-\alpha$为其极小值，也就是说，当$x>0$时，$f(x)\geqslant1-\alpha$。

1·13　给定正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，设 $q_1,\cdots,q_n>0$ 且 $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$，则

$$a_1^{q_1}\cdots a_n^{q_n}\leqslant q_1a_1+\cdots+q_na_n$$

值得注意的是，(1·11) 是这个不等式的直接结果。（令 $q_1=\cdots=q_n=\dfrac{1}{n}$）

证明：我们在 n 上作归纳证明。当 $n=2$ 时，由$q_1,q_2>0$，$q_1+q_2=1$ 知，若在(1·12,(i))中取 $x=\dfrac{a_1}{a_2}$，则

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{q_1}-q_1\frac{a_1}{a_2}\leqslant1-q_1=q_2$$

故

$$a_1^{q_1}-q_1a_1a_2^{-1+q_1}\leqslant q_2a_2^{q_1}$$

即

$$a_1^{q_1}-q_1a_1a_2^{-q_2}\leqslant q_2a_2^{1-q_2}$$

两边同乘 $a_2^{q_2}$ 得到

$$a_1^{q_1}a_2^{q_2}\leqslant q_1a_1+q_2a_2$$

假设当 $n=k$ 时成立，即如果 $a_1,\cdots,a_k,q_1,\cdots,q_k>0$，$q_1+\cdots+q_k=1$有

$$a_1^{q_1}\cdots a_k^{q_k}\leqslant q_1a_1+\cdots+q_ka_k$$

当 $n=k+1$ 时，令 $q=q_1+\cdots+q_k$，有 $q+q_{k+1}=1$，则

$$a_1^{q_1}\cdots a_k^{q_k}a_{k+1}^{q_{k+1}}=(a_1^{q_1}\cdots a_k^{q_k})a_{k+1}^{q_{k+1}}=\left(a_1^{\frac{q_1}{q}}\cdots a_k^{\frac{q_k}{q}}\right)^q a_{k+1}^{q_{k+1}}$$

$$\leqslant q\left(a_1^{\frac{q_1}{q}}\cdots a_k^{\frac{q_k}{q}}\right)+q_{k+1}a_{k+1}$$

$$\leqslant q\left(\frac{q_1}{q}a_1+\cdots+\frac{q_k}{q}a_k\right)+q_{k+1}a_{k+1} \qquad \text{(归纳假设)}$$

$$=q_1a_1+\cdots+q_ka_k+q_{k+1}a_{k+1} \qquad \text{证毕}$$

注：当 $q_1>1$ 时，若 $q_1+q_2=1$，则由(1·12,(ii))可以直接得到

$$a_1^{q_1}a_2^{q_2}\geqslant q_1a_1+q_2a_2$$

1·14　设 a,b 为正数，如果 $k>1$，$\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$，则

$$ab\leqslant\frac{1}{k}a^k+\frac{1}{k'}b^{k'}\text{；如果 }0<k<1,\ \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$$

则 $ab\geqslant\frac{1}{k}a^k+\frac{1}{k'}b^{k'}$

这是(1·13)的直接结果

1·15　(Hölder 不等式) 设 $a_i>0$、$b_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$

(i) 如果 $k>1$，则 $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$

特别地，当 $k=k'=2$ 时，得到 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(ii) 如果 $0<K<1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}b^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

证明：只证 (ii)，第一步，先假设 $\sum_{i=1}^{n}a_i^k=\sum_{i=1}^{n}b_i^{k'}=1$，要证 $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant1$　在(1·14)中，取 $a=a_i$、$b=b_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$

则由$\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$ 知

$$a_ib_i\geqslant\frac{1}{k}a_i^k+\frac{1}{k'}b_i^{k'}$$

不等式的两边对 i 求和，得到

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}a_i^k+\frac{1}{k'}\sum_{i=1}^{n}b_i^{k'}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$$

第二步，一般情况，令 $a'_i=\frac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}}$，$b_i'=\frac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}}$

（这一过程称为标准化的过程），那么$\sum\limits_{i=1}^{n}a'^k_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b'^k_i=1$，

根据第一步所证 $\sum\limits_{i=1}^{n}a'_ib'_i\geqslant1$。也就是

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_ib_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^k\right)^{\frac{1}{k'}}}\right]\geqslant1$$

不等式两边同乘以$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$ 就可得到所需要的结果。

关于不等式（i），可以由(1·14)的另一个不等式得到。

注：Cauchy-Schwarz 不等式有明显的几何意义，如 $\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots b_n)$ 为 n 维欧氏空间中的两个向量，定义

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib}{(\sum a_i^2)^{1/2}(\sum b_i^2)^{1/2}}$$

Cauchy-Schwarz 不等式说明两向量夹角余弦值不超过1。而我们在证明中的标准化的过程，就是将向量单位化的过程。