

NEW ANALYTIC GEOMETRY

By

SMITH

GALE & NEELLEY

斯蓋尼三氏
解析幾何學

邱調梅譯 馬地泰校訂



香港中流出版社印行

斯蓋尼三氏
解析幾何學

邱 調 梅 譯
馬 地 泰 校 訂

香 港 中 流 出 版 社 印 行

斯蓋尼三氏解析幾何學

邱調梅譯 馬地泰校訂

出版兼發行者：

中流出版社

香港歌賦街十七號

印刷者：嶺南印刷公司

香港德輔道西西安里十三號

一九七四年四月版

定價港幣七元

版權所有·不准翻印

原 序

著者於此改訂本中，凡諸教師所讚許各點，仍保留之。且依經驗所得更完成之。書中大旨，無甚變更。祇增添使學生發生興趣之幾個論題。此等重排之變更，其目的崙為前後一貫之發展，而於適當時加入更新奇與艱難之論題。

須注意者，著者以初版之新材料為本書之標準，此或為讀者所諒解。解析幾何學之課程，現當包含超越曲線，通徑方程式，圖形，及經驗方程式諸章。

許多教師欲將立體解析幾何學之課程略為縮短。現所編列，適合此要求。但更有教師希望此科為微積分之充分預備。故凡此所需之材料，本書亦一概具備。

習題亦已全部改訂。有數組標明“個別研究或特設”者，大概施於一般指定，則屬太難，乃供優材生得一研討或互相詰難之機會焉。

解析幾何

解析幾何學之意義 解析幾何學爲法人笛卡兒René Descartes氏所首創。氏爲有名之哲學家兼科學家，其在數學上之貢獻頗多，而以解析幾何學爲最著。解析幾何者，一名代數幾何，即冶代數學與幾何學於一爐，乃用坐標法以研究幾何圖形之性質之學問也。

本書之特點 本書之內容，繁簡適中，深淺合度，採作教材，最爲相宜。其編制方法，對於論理程序及學習心理二方，均能兼籌並顧。書中習題，亦頗有伸縮性。教師可以因材施教，不必更事蒐羅。故樂爲譯出之。

學習解析幾何學之方法 學習一般數學之要點，爲方法，理論與思考，解析幾何學，亦然。方法爲技術上之問題，熟後方能生巧，此習題之

學習要點

所以不能不勤作也。理論爲數學之精華，凡一定律或一定理當前，必須細究其理。是否全部明瞭？如若尚有疑點，必須時加應用。切不可徒事強記，以免食而不化。理論或應用題，須時加思考，務使觸類旁通，得心應手，方稱善讀。總之：天資雖有高下，成功端賴努力，更毋一暴十寒，則成績斐然，可預卜也。

須熟繪各種圖形 初等代數學中之坐標法，即爲解析幾何學之初步。應用此法，能使幾何圖形用方程式表出之。解析幾何學所涉及之圖形頗多。除直線形與圓外，尚有圓錐曲線，高次曲線，超越曲線，及一次與二次之面。讀者應熟習此種圖形之性質及其畫法，則在繪圖時可得不少便利。

目 錄

第一章 供參考用之公式及表

節	頁
1. 幾何學,代數學,與三角法中之公式	1
2. 特別角之三角函數真數值	4
3. 三角函數符號之規則	4
4. 三角函數之真數值	5
5. 希臘字母	5

第二章 笛卡兒坐標

6. 解析幾何學	6
7. 笛卡兒直坐標,斜坐標	6
8. 方向線	9
9. 長	10
10. 分一線段成定比之點	12
11. 幾何學定理之應用	13
12. 傾角與斜率	16
13. 平行或垂直線之檢驗法	17
14. 角之公式	18
15. 面積	20

第三章 曲線及方程式

16. 曲線(點之軌跡)之方程式	25
17. 方程式之軌跡	28
18. 方程式之討論	31
19. 摘要	36
20. 水平與垂直漸近線	39
21. 交點	43

第四章 直線

22. 直線方程式之次數	46
23. 任意一次方程式之軌跡	46

節	頁
24. 繪直線法, 定理, 分解因子作圖法	48
25. 點與斜率式	51
26. 兩點式	51
27. 截部式	52
28. 三線相交於一點之條件	52
29. 直線之法線方程式	55
30. 法線式之化法	56
31. 一線至一點之垂直距離	59
32. 直線系	63
33. 過兩已知線交點之直線系	66

第五章 圓

34. 圓之方程式	71
35. 圓之檢驗法	72
36. 三條件決定之圓	73
37. 根軸	78
38. 切線之長	79
39. 圓系	81

第六章 拋物線, 橢圓, 與雙曲線

40. 拋物線	85
41. 拋物線之作圖法	87
42. 拋物線拱	87
43. 繪拋物線法	89
44. 橢圓	91
45. 橢圓之作圖法	93
46. 繪橢圓法	95
47. 特例	95
48. 雙曲線	97
49. 雙曲線之作圖法	99
50. 繪雙曲線法	100
51. 共軛雙曲線及其漸近線	102
52. 等邊或直角雙曲線	105
53. 摘要	105
54. 圓錐曲線	105
55. 圓錐曲線系	105

第七章 坐標之變換

節	頁
56. 緒言	108
57. 移軸法	108
58. 用移軸法化簡方程式	110
59. 定理	114
60. 圓錐曲線之標準方程式	114
61. 轉軸法	116
62. 用轉軸法化簡方程式	118
63. 任意二次方程式之軌跡	120
64. 繪二次方程式之軌跡法	122
65. 特例. 等邊(直角)雙曲線. 等邊雙曲線之作圖法	127
66. 圓錐曲線之另一定義	129
67. 坐標之一般變換	129
68. 軌跡之分類	130

第八章 切線

69. 切線之方程式	132
70. 普遍定理	135
71. 法線之方程式	136
72. 次切線與次法線	137
73. 已知斜率之切線	138
74. 過曲線外一已知點之切線	139
75. 斜率已知時之切線公式	140
76. 圓錐曲線之切線與法線之性質	143

第九章 極坐標

77. 極坐標	148
78. 極方程式之作圖法	150
79. 極方程式之作圖捷法	154
80. 直坐標與極坐標之關係	156
81. 應用. 直線與圓	157
82. 圓錐曲線之極方程式	159
83. 交點	160
84. 用極坐標求軌跡法	162

第十章 超越曲線

85. 自然對數. 指數曲線與對線曲線	166
---------------------	-----

節	頁
86. 正弦曲線.....	171
87. 週期性.....	173
88. 繪正弦曲線法.....	174
89. 其他三角曲線.....	176
90. 縱坐標之加法.....	178
91. 界限曲線.....	181
第十一章 通徑方程式與軌跡	
92. 通徑方程式作圖法.....	184
93. 自通徑方程式化成直坐標方程式.....	186
94. 同一曲線之各種通徑方程式.....	187
95. 用通徑方程式解軌跡問題.....	190
96. 用對應線之交點以確定軌跡.....	196
97. 圓錐曲線之直徑.....	199
第十二章 函數, 圖形, 及經驗方程式	
98. 函數. 函數之記法.....	204
99. 函數之圖形. 簡單函數之例.....	205
100. 函數之立式與作圖.....	208
101. 以經驗確定之函數.....	211
102. 直線定律.....	212
103. 平均法.....	213
104. 上例評註.....	214
105. 具二常數諸定律.....	217
106. 乘冪定律.....	218
107. 指數與雙曲線諸定律.....	221
108. 拋物線諸定律.....	225
109. 平均法應用於普遍拋物線定律.....	227
110. 代數方程式之圖解法.....	229
111. 超越方程式之圖解法.....	232
第十三章 空間之笛卡兒坐標	
112. 笛卡兒坐標.....	235
113. 重要關係式.....	237
114. 直線之方向餘弦.....	239

節	頁
115. 直線之方向數	239
116. 長	242
117. 二方向直線間之角	242
118. 平行或垂直線之檢驗法	243
119. 分一線段成定比之點	244
120. 空間之軌跡	247
121. 面之方程式	248
122. 曲線之方程式	248
123. 方程式之軌跡. 二個聯立方程式之軌跡	249

第十四章 空間之平面與直線

124. 平面方程式之法線式	251
125. 任意一次方程式之軌跡. 化作法線式法	252
126. 特種平面	254
127. 平面之截部與踪線. 平面之作圖法	254
128. 二平面間之角	257
129. 三條件決定之平面	258
130. 平面方程式之截部式	260
131. 一平面至一點之垂直距離	262
132. 平面系	264
133. 直線之普遍方程式	267
134. 直線方程式之各種形式	271
135. 直線之投影面. 投影式	272
136. 直線與平面相關之位置	276

第十五章 特種曲面

137. 球面	280
138. 圓柱面	283
139. 圓錐面	284
140. 曲面方程式之討論	287
141. 二次曲面	290
142. 橢圓面	290
143. 單葉雙曲面	292
144. 兩葉雙曲面	293
145. 橢圓拋物面	295
146. 雙曲線拋物面	297

第十六章 空間幾何補編

節	頁
147. 旋轉面	300
148. 法面	303
149. 二次法面. 直母線	304
150. 斜圓柱面	306
151. 曲線之投影圓柱面	307
152. 空間曲線之通徑方程式	311

第十七章 坐標之變換 各種坐標制

153. 移軸法	314
154. 轉軸法	314
155. 三元二次方程式之軌跡	317
156. 三元二次普遍方程式之化簡法	318
157. 極坐標	320
158. 球面坐標	321
159. 圓柱面坐標	321

第一 章

供參考用之公式及表

1. 茲將幾何學，代數學，三角學中已證明之公式與定理寫下，以便以後諸章之引用。

幾 何 學

(1) 下列諸公式中， r 表半徑， a 表高， B 表底面積， s 表斜高。

圓 (Circle). 圓周 $= 2\pi r$. 面積 $= \pi r^2$.

角柱體 (Prism). 體積 $= Ba$.

角錐體 (Pyramid). 體積 $= \frac{1}{3}Ba$.

直圓柱體 (Right circular cylinder). 體積 $= \pi r^2 a$. 側面積 $= 2\pi r a$. 總面積 $= 2\pi r(r + a)$.

直圓錐體 (Right circular cone). 體積 $= \frac{1}{3}\pi r^2 a$. 側面積 $= \pi r s$. 總面積 $= \pi r(r + s)$.

球 (Sphere). 體積 $= \frac{4}{3}\pi r^3$. 面積 $= 4\pi r^2$.

代 數 學

(2) 二次方程式 $Ax^2 + Bx + C = 0$.

[解] 1. 分解因子法：分解 $Ax^2 + Bx + C$ ，命各因子等於零而解 x 。

2. 配方法：移 C 於等號之右端，以 x^2 之係數除各項，加 x 係數之半之平方於等號之兩端，而求其平方根。

3. 用公式
$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

根之性質. 根號內 $B^2 - 4AC$ 式稱為判別式 (Discriminant). 兩根之為不等實根，等實根，或虛根，全視判別式之為正，為零，或為負而定。

(3) 對數.

$$\log ab = \log a + \log b. \log a^n = n \log a. \log 1 = 0.$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b. \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a. \log_a a = 1.$$

三 角 法

(4) 直角三角形 銳角 A 之函數, 其定義如下:

$$\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{弦}},$$

$$\csc A = \frac{\text{弦}}{\text{對邊}},$$

$$\cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{弦}},$$

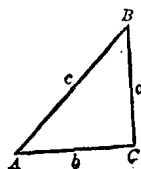
$$\sec A = \frac{\text{弦}}{\text{鄰邊}},$$

$$\tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}},$$

$$\cot A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}.$$

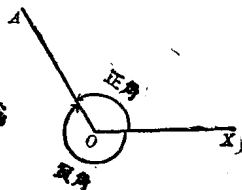
定理 直角三角形之一邊等於弦與此邊所對角之正弦之乘積, 或弦與此邊相鄰角之餘弦之乘積.

(5) **普通角** 角 XOA 可視作一線自 OX 旋轉至 OA 所成. 此線如依逆時針方向旋轉時, 則所成之角爲正, 而順時針方向旋轉時, 則所成之角爲負. 此定線 OX 謂之始線 (Initial line), 而 OA 稱謂終線 (Terminal line). (見下圖).



(6) **角之量法** 量角之大小, 常有二法; 即角之單位有兩種.

度制 (Degree measure). 此單位角爲全周之 $\frac{1}{360}$, 而稱之曰一度 (Degree).



弧度 (Circular measure). 此單位角爲與半徑等長之弧所對之圓心角, 而稱之曰一弧度 (Radian).

兩種單位角之關係, 可以方程式

$$180 \text{ 度} = \pi \text{ 弧度} (\pi = 3.14159 \dots);$$

表之, 又解此式, 得

$$1 \text{ 度} = \frac{\pi}{180} = 0.0174 \dots \text{ 弧度}; \quad 1 \text{ 弧度} = \frac{180}{\pi} = 57.29 \dots \text{ 度}.$$

從上定義，得 $\text{一角之弧數} = \frac{\text{所張之弧}}{\text{半徑}}$ 。

此等方程式可將一種量法化成他種量法。

(7) 三角函數間之關係。

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad \csc x = \frac{1}{\sin x};$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x; \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$$

(8) 化成正銳角諸公式

角	正弦	餘弦	正切	餘切	正割	餘割
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$
$90^\circ - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$
$90^\circ + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$-\csc x$	$\sec x$
$180^\circ - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$-\sec x$	$\csc x$
$180^\circ + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$-\sec x$	$-\csc x$
$270^\circ - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$-\csc x$	$-\sec x$
$270^\circ + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$\csc x$	$-\sec x$
$360^\circ - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$

(9) $(x+y)$ 與 $(x-y)$ 之三角函數。

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}; \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

(10) $2x$ 與 $\frac{1}{2}x$ 之三角函數。

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}};$$

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x; \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

(11) 任意三角形之關係 餘弦定律. 在任意三角形內, 一邊之平方等於其他兩邊之平方和減去此二邊與所夾角之餘弦乘積之兩倍; 即

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

三角形之面積 任意三角形之面積等於其二邊與所夾角之正弦之乘積之半; 即

$$\text{面積} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

2. 特別角之三角函數真數值.

角弧度	角度	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	∞	0	∞	1
π	180°	0	-1	0	∞	-1	∞
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	∞	0	∞	-1
2π	360°	0	1	0	∞	1	∞

角弧度	角度	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	∞	0	∞	1

3. 三角函數符號之規則.

象 限	sin	cos	tan	cot	sec	csc
第一象限	+	+	+	+	+	+
第二象限	+	-	-	-	-	+
第三象限	-	-	+	+	-	-
第四象限	-	+	-	-	+	-

4. 三角函數之真數值.

角弧度	角度	sin	cos	tan	cot		
.000	0°	.000	1.000	.000	∞	90°	1.571
.017	1°	.017	1.000	.017	57.29	89°	1.553
.035	2°	.035	.999	.035	28.64	88°	1.536
.052	3°	.052	.999	.052	19.08	87°	1.518
.070	4°	.070	.998	.070	14.30	86°	1.501
.087	5°	.087	.996	.088	11.43	85°	1.484
.175	10°	.174	.985	.176	5.67	80°	1.396
.262	15°	.259	.966	.268	3.73	75°	1.309
.349	20°	.342	.940	.364	2.75	70°	1.222
.436	25°	.423	.906	.466	2.14	65°	1.134
.524	30°	.500	.866	.577	1.73	60°	1.047
.611	35°	.574	.819	.709	1.43	55°	.960
.698	40°	.643	.766	.839	1.19	50°	.873
.785	45°	.707	.707	1.000	1.00	45°	.785
		cos	sin	cot	tan	角度	角弧度

5. 希臘字母.

字母	名稱	字母	名稱	字母	名稱
A	α Alpha	I	ι Iota	P	ρ Rho
B	β Beta	K	κ Kappa	Σ	σ^s Sigma
Γ	γ Gamma	Δ	λ Lambda	T	τ Tau
Δ	δ Delta	M	μ Mu	T	υ Upsilon
E	ϵ Epsilon	N	ν Nu	Φ	ϕ Phi
Z	ζ Zeta	Ξ	ξ Xi	X	χ Chi
H	η Eta	O	\omicron Omicron	Ψ	ψ Psi
Θ	θ Theta	Υ	π Pi	Ω	ω Omega