

951.49  
436



机会的数学原理  
Taking Chances

[英] 约翰·黑格 著 李大强 译

吉林人民出版社

Taking chances

by John haigh

本书由 Oxford University Press 1999 年版翻译

吉林省版权局著作权合同登记

图字:07—2000—382

(吉)新登字 01 号

机会的数学原理——明知其输而博赢的概率分析

---

著 者 [英]约翰·黑格

译 者 李大强

责任编辑 范春萍 黄式刚

责任校对 黄式刚

封面设计 翁立涛

版式设计 胡学军

---

出 版 者 吉林人民出版社 0431—5649710  
(长春市人民大街 124 号 邮编 130021)

发 行 者 吉林人民出版社

制 版 者 吉林人民出版社激光照排中心 0431—5637018

印 刷 者 长春市人民印刷材料厂

---

开 本 850×1168 1/32

印 张 14

字 数 300 千字

版 次 2001 年 8 月第 1 版

印 次 2001 年 8 月第 1 次印刷

印 数 1—6 200 册

---

标准书号 ISBN 7-206-03818-2/F·791

定 价 26.00 元

---

如图书有印装质量问题,请与承印工厂联系。

## 内容简介

概率与我们的日常生活息息相关。当我们过马路的时候，当我们上保险的时候，当我们买彩票的时候，我们都在和不确定性打交道。然而，普通人对概率所知甚少。在我们关于概率的知识中，有许多本应避免的错误。本书的目的是让普通人获得应用概率知识的能力。书中深入探讨了彩票、轮盘赌、扑克游戏等以概率为核心的问题，引人入胜的分析经常使读者茅塞顿开。你可以把它当做一本精妙的小说，也可以把它当做一本实战指导手册。

## 前 言

几乎每一个你有意识地作出的决定都与概率相关。当你穿衣服时，你的决定取决于你对天气的判断；当你过马路时，你的决定取决于你对发生车祸的可能性的估计，你储备备用灯泡，是为了应付某种可能性；你向保险公司投保，理由是“以防万一”。对于概率，人类一定拥有非常充分的直觉，否则人类文明不可能演化到现在的状态。

另一方面，尽管人类对于概率有非常好的直觉，多数人对概率的理解是不充分的。最显著的问题有两个：其一，某些事件发生的概率值极低，如何定量地分析这些很小的概率值之间的差别？比较两个判断。A：“事件 a 发生的概率为  $1/1\ 000$ ”；B：“事件 a 发生的概率为  $1/1\ 000\ 000$ ”。通常人们以为这两句话的意义是一样的，都是说事件 a 发生的可能性很小。事实上，这两个概率值不同，前者是后者的 1 000 倍；其二，面对具体的判断时，如何避免错误信息的干扰？一个小例子：我给你一张美女照片，你的任务是猜测此人的职业：模特还是职员？很多人会猜前者。实际上，模特的数量比职员的数量少得多，所以，从概率上说这种判断是不明智的。

当你买彩票时，当你玩扑克游戏或骰子游戏时，当你赌马时，你清醒地意识到你在和随机事件打交道。即使你不懂如何计算概率，经验和直觉也能帮助你作出判断。在很多场合，这些粗糙的判断是简单有效的；也有很多场合，除非经过缜密的分析和精确的计算，你的结论会错得离谱。假设你作为陪审团的一名成员出庭，被告被指控犯有谋杀（或绑架）罪。法庭掌握了一些事实。如果被告是无辜的，则这些事实发生的概率为100万分之一。有些人可能认为这个判断等同于“在这些事实已发生的前提下，‘被告是无辜的’的概率为100万分之一”。大错特错！请比较以下两个判断：“珍妮在下雨天遗忘外套的概率为1%”以及“在珍妮遗忘外套的时候正在下雨的概率为1%”。二者的含义显然不同。

vii 在本书中，我介绍了许多与机会有关的问题，我的着眼点是趣味性、启发性和知识性。有些例子读者很熟悉，有些例子读者会觉得陌生，全部内容都与概率相关。每一章围绕统一的主题，某些章后面有附言，附言是对某些概率论方法的发挥。通常，我们的分析方法可以适用于两（或多）个人（或队伍）对抗的游戏。如果你认真地分析其中的概率问题，你往往会在游戏中获利——通常这就是吸引我们关注这些问题的原因。

本书是为初学者写的，希望没受过严格的科学和数学训练的读者可以接受它。据说，在通俗读物中每增加一条数学公式就会赶走一半读者，所以我在正文中尽量避免符号化的表达方式。当然，我不能删除所有的公式。书末有5个附录，其中涉及到比较复杂的数学知识。我在正文中加了一些方框，方框中的文字通常是比较复杂的数学分析。对数学没兴趣的读者可以略过这些内容。我希望读者不会因此感到不便。如果你认真地读下去，你会发现很多精妙的思想其实惊人地简单。

为便于阅读，我对许多数字取了整。当我说某个概率值是 50%，这个值有可能是精确值（比如抛一枚硬币，正面向上的概率是 50%），也有可能是近似值（比如在某场球赛中主队获胜的概率为 50%）。通过上下文可以区分这两种情况。通过有效数字的位数可以判断近似值的精度：77% 表示精确值在 76.5% 和 77.5% 之间，60% 表示精确值在 55% 和 65% 之间，等等。在计算几个数的乘积时，最好的策略是使每个数都保持足够的精度，最后对计算结果取整。在某些场合，我用字母 K 表示 1 000，也就是说，25K 英镑表示 25 000 英镑。

你可以把这本书当做一个挑战。当你读完书中的问题之后，建议你不要直接看我的分析和结论，先独立地考虑一下。在某些章之后，我准备了练习题，目的是检验读者是否已经掌握了书中介绍的方法。在书末有答案。关于阅读顺序，建议先读第一章，在第十章以前先读第六章，在第十二章以前先读第八章，最后读第十三章。除此之外，你可以随意安排顺序。

本书不是系统化的数学教材。许多人的著作、演讲和谈话<sup>viii</sup>影响了我关于概率的理解，我不可能一一列出。本书中用到的技巧，除非特别声明，不是我首创的。在参考文献中，我仅列出了书中直接引用过的著作。我想向一些直接帮助过我的人致谢。牛津大学出版社的苏珊·哈里森（Susan Harrison）鼓励我写这本书，并通读了全文。吉夫·亚德兰（Geoff Adlam），约翰·巴雷特（John Barrett），特雷夫·波蒙特（Trevor Beaumont），麦克·博克特（Mike Birkett），唐比·布莱雷顿（Toby Brereton），约翰·克拉切尔（John Croucher），弗兰克·德克华兹（Frank Duckworth），约翰·维恩（John Gwynn），鲍勃·亨纳利（Bob Henery），雷顿·华封·威廉姆斯（Leighton Vaughan Williams），哈里·乔（Harry Joe），罗伯特·马修（Robert Matthews），哈格·莫

顿 (Hugh Morton), 路易丝·O·克纳 (Louise O' s Connor), 汉斯·利德维尔 (Hans Riedwyl), 乔纳森·西蒙 (Jonathan Simon), 伊安·沃克 (Ian Walker), 格雷格·伍德 (Greg Wood) 和比尔·辛巴 (Bill Ziemba) 为本书提供了宝贵的资料。本书关于大英帝国彩票的资料来自于网站 <http://lottery.merseyworld.com/>, 感谢理查德·拉伊德 (Richard Lloyd) 对这个网站的维护和更新。我对数学知识最初的兴趣来自于我以前的老师, 他们是伯特·劳治 (Bert Lodge), 詹福里·拉伊德 (Jeffrey Lloyd), 乔夫里·怀特海 (Geoffrey Whitehouse), 肯·西尼尔 (Ken Senior), 菲莉斯·鲍曼 (Phyllis Bowman), 约翰·利维斯 (John Lewis), 大卫·肯道 (David Kendall) 和约翰·凯曼 (John Kingman)。我的许多知识得自于我未曾谋面的人——威廉·费勒 (William Feller), 他的著作启发了一代概率学家的成长。亚当·黑格和丹尼尔·黑格 (Adam and Daniel Haigh) 教会我如何用家用电脑写作, 凯·黑格 (Kay Haigh) 机智的评论也给我巨大的启发。

尽管我已尽最大的努力, 我相信本书依然难免存在错误。希望这些错误不会构成对读者的误导。概率论是一个复杂的领域。如果您发现我在某些地方犯了原则性错误, 请您告诉我。

ix 在这个领域, 比我强得多的数学家也犯过错误。

# 目 录

---

- 第一章 什么是概率/1
  - 直观的考虑/4
  - 不变的法则/5
  - 两个基本概念/6
  - 多次重复的事件/10
  - 平均值与变异性/13
- 第二章 彩票/17
  - 你获奖的机会/19
  - 获胜策略? /27
  - 不止一张彩票/36
  - 号码果真是随机产生的吗? /39
  - 小结/49
- 第三章 足球彩票与增值彩票/51



足球彩票/51

增值彩票/59

最佳选择? /65

#### 第四章 一枚硬币，多种游戏/69

错误的直觉/70

硬币游戏/72

潘尼游戏/75

正面和反面：哪个出现的次数多? /83

抛多少次硬币出现首次正面和反面出现的次数一样多的情况/84

频率倒转/85

最后平衡点/88

排队问题/91

小结/92

练习题/93

#### 第五章 骰子/95

一枚骰子的情况/96

两个骰子的游戏——西洋双陆棋/99

两个骰子的游戏——垄断棋/112

两个骰子的游戏——双骰赌博/116

三个或更多骰子的游戏/117

四个骰子——凯夫勒·德·米勒问题/119

后发制人/121

投标游戏/122

**第六章 抉择较少的游戏/126**

约会游戏/127

一个简单的游戏/129

钓鱼问题/130

回到表 6.2/132

如何使游戏公平? /136

如何发现最佳策略? /137

其他游戏/140

一方有两种选择, 另一方有多种选择的问题/148

筹码游戏/150

动物之间的游戏/155

两性博弈/162

附言/165

小结/167

练习题/169

**第七章 等待, 等待, 再等待/171**

生日问题/171

《破坏者》问题二/175

通用的计算方法/176

多个人生日相同的概率/178

扑克牌问题一/179

扑克牌问题二/182

搜集卡片/185

- 选秘书问题/191
- 第八章 三局两胜/194**
- 第一类比赛：斯诺克式比赛/195
- 第二类比赛：壁球式比赛/202
- 第三类比赛：网球式比赛/205
- 小结/210
- 第九章 电视游戏/212**
- 挑盒子/212
- 猜猜看/215
- 幸运转盘/232
- 抢答游戏/235
- 附言/241
- 第十章 赌场中的游戏/243**
- 轮盘赌/244
- 赌场扑克/265
- 比九点/275
- 其他游戏/280
- 练习题/281
- 第十一章 赌马，赛马彩票与差额赌博/284**
- 赌马/284
- 你可以利用赌博公司赚钱吗？/296
- 赛马彩票/300
- 差额赌博/303
- 第十二章 体育生涯/312**

---

	足球/312
	高尔夫球/319
	板球/322
	网球/326
	锦标赛的比赛规则/330
第十三章	其他需要运气的问题/334
	扑克牌问题/334
	洗牌问题/344
	分配奖金/345
	元音还是辅音/347
	本福德法则/351
	猜背面颜色/355
	至少两张 A/357
	对哪一方有利? /361
附录 1	计数/363
附录 2	概率/371
附录 3	平均值与变异性/384
附录 4	拟合良度检验/397
附录 5	克里策略/406
	练习题答案/412
	索引/419

## 第一章 什么是概率

无论概率是什么，你不能忽视它。当你向保险公司付保险费时，你的行为反映了保险公司付给你赔偿金的概率，以及赔偿金的数额。你是否应该为预防感冒注射疫苗？你必须考虑因注射疫苗而危害你的健康的可能性和因不注射疫苗而危害健康的可能性，并在二者之间做出权衡。如果你是一个刑事案件的陪审团成员，判决的依据是你相信被告的罪行是“没有疑问的”；而当你裁决民事案件时，相应的原则是“在各种可能性之间权衡”。当你买（或不买）大英帝国彩票时，你的行动可能仅仅出于兴趣或冲动，但是在一定程度上也依赖于你对获奖的可能性的估计。当你面临各种决定时，如果你对概率有深刻的理解，通常你能做出更好的决定。我的信条是有知识总比无知好，而获得关于概率的知识的主要途径在于研究那些依赖于机会的游戏。我的目标是展示一些主要的方法：如何评价你在游戏中获胜的可能性，以及在什么情况下你的机会可以增加。

精通概率本身不足以帮助你做出正确的决定。在很多情况下，你的知识只是帮助你在犯错误以后寻找失误的原因——事实如此。但是，知识总是有好处的，比较而言，如果你对概率

有更好的理解，你在生活和游戏中更容易做出好的决定。本书不是概率理论的教科书，它是一系列与概率相关的智力挑战。

语言的魅力在于同一个事物可以用不同的方法表达。在一副洗好的扑克牌中抽出最上面的一张<sup>①</sup>，你可以说：“这张牌是黑桃的概率是四分之一。”下面三句话的意义与此完全相同：

1. 这张牌是黑桃的机会是四分之一。
2. 这张牌是黑桃的比率是一比三。
3. 这张牌不是黑桃的机会是这张牌是黑桃的机会的三倍。

另外一些词汇可以粗略地表达与“概率”相近的含义，比如“风险”、“几率”等等，相应地我们要涉及“预期”、“可能性”。然而，无论我们用什么词汇表达，我们希望表达的含义是什么？为什么我们要选择四分之一而非其它的数值？

“四分之一”这个数来源于一个理想化模型：一共有 52 张牌，其中 13 张是黑桃，在洗好牌后每一种可能分配出现的机会都是相等的——如果以上假设都正确，则这张牌是黑桃的概率是四分之一。以上表述并非绝对无懈可击，但已经可以足够精确地描述实际情况，而且不会引起误解。为了研究物理世界中的事件，不一定需要绝对完美的模型，即使在向月亮和火星发射火箭时，我们使用的模型也仅仅是近似的。

抽扑克牌的事件可以多次重复。为了检验我们的答案是否正确，我们可以把实验重复很多次，然后计算统计结果。如果重复的次数足够多，平均而言，结果是黑桃的情况将占全部实

---

<sup>①</sup> 译者注：西方人玩扑克牌的习惯是去掉王牌

验次数的四分之一。需要强调的是，我们没有说每抽四张牌就会恰好抽出一张黑桃，事实很可能是这样：我们连续好多次抽出黑桃，或者连续十几次都抽不出黑桃。这里有一个问题：我们刚刚用到的两个词——“平均”和“足够多”——是什么意思？100次算不算足够多？1万次呢？很不幸，这个问题没有简单的答案。

有时我们也讨论一次性事件的概率，比如明年股票市场的价格指数上涨10%以上的概率，或者巴西队夺取下一届世界杯足球赛冠军的概率。对于这种概率，无法用重复实验的方法检验，因为事件本身是不可重复的。关于概率的讨论也不一定限制为对未来事实的预测，比如，一个学者可以说“莎士比亚是《麦克白》的作者的概率是80%”，这种关于概率的表达也是有意义的。

在以上各个例子中，概率都可以理解为对“相信的程度”的表达。我们对一个事件相信的程度越高，相应的概率值也就越大。如果我想表达我相信“股票市场价格指数将上涨一定数量”的程度，我可以和一个经纪人打赌，并且约定一定的赔率：比如说1赔2。换句话说，如果我赌一块钱并且获胜，我将拿回3块钱（原有的1块钱加上赢得的2块钱）。此时，我的行为就反映了我对这件事的概率的估计。如果我觉得1赔2是对我有利的，就说明我认为其概率高于三分之一；如果我觉得1赔2是对我不利的，就说明我认为其概率低于三分之一。当然，你也可以就这件事打赌，并且你的结论很可能与我不同——这说明概率的值是因人而异的。在抽扑克牌的例子中，我们的观点是一致的，因为我们有一个基本一致的检验模型。在其它情况下——尤其是当我们掌握的信息不同时——我们的判断可能有巨大的差异。比如说，在一次赛马中，一匹马的训练

师和经纪人以及普通下注者的预期就不一样。

在涉及到掷骰子、抛硬币、赌扑克牌之类的例子时，存在一些已经被广泛接受的计算方法，大家很少产生分歧。大家可能出于不同的原因得出“某个轮盘赌是公平的”的结论，但是每个人的计算方法都是一样的。本书的多数内容将讨论这类情况。但是在某些情况下，专家的意见与普通人的意见截然不同。去发现这种分歧是否对我们的决定或结论产生重要的影响，是很有价值的。

## 直观的考虑

维多利亚时代的学者弗兰西斯·高顿（Francis Galton）提出了一个容易算错的问题：如果抛三枚硬币，结果三枚硬币都是正面向上或都是反面向上的概率是多少？首先看一个马虎的计算：

在三枚硬币中，至少有两枚结果是一样的，或者都是正面向上，或者都是反面向上。而第三枚硬币出现正面和反面的概率是相等的，即它有二分之一的机会与另外两枚结果相同，同样有二分之一的机会与另外两枚结果不同。于是得出结论：三枚硬币都是正面向上或都是反面向上的概率是二分之一。

抓住以上论证中的错误需要逻辑技巧。一个办法是给三枚硬币编号，分别标为1号、2号和3号，在排列所有可能结果时按编号顺序表示。通过这个办法可以避免高顿给出的错误结论。

你会发现，一共有8种可能结果，即

正正正，正正反，正反正，反正正，正反反，反正反，反



反正，反反反。

其中正好有两种结果符合要求。于是我们得出一个不同的答案：三枚硬币都是正面向上或都是反面向上的概率是八分之二，即四分之一。

高顿方法的错误在于一个意义模糊的词组——“第三枚硬币”。如果我们不对三枚硬币编号，我们怎么知道哪枚硬币是第三枚硬币呢？如果三枚硬币中恰好有两枚是正面，那么剩下的一枚就是第三枚硬币——可是这枚硬币必须是反面，高顿方法中的结论“第三枚硬币出现正面和反面的概率是相等的”是错误的。如果三枚硬币都是正面，那么无论我们把哪一枚当做第三枚硬币，第三枚硬币都应该是正面。无论如何，“第三枚硬币出现正面和反面的概率是相等的”这一结论是错误的。

错误的判断足以引起财产的损失。假设安迪知道正确的答案是四分之一，他愿意按 2 赔 1 的赔率赌三枚硬币的结果不同。他相信他将在赌博中获利：如果每次下注一块钱，在每四局他将赢三局，即赢三块钱，输两块钱。平均而言，在每四局中他将赢一块钱。假设波林相信高顿给出的错误结论，波林将很高兴地接受安迪的条件。他认为他有二分之一的机会输一块钱，但是有二分之一的机会赢两块钱，所以赌博对他有利。两个人都愿意赌，可是波林的分析是错误的——赌得越多，输得越惨。他应该反省自己的分析。

## 不变的法则

在表达概率的词汇中有一些描述程度的词，比如“不大可能”、“有可能”、“很可能”、“几乎确定”，等等。可是，当你