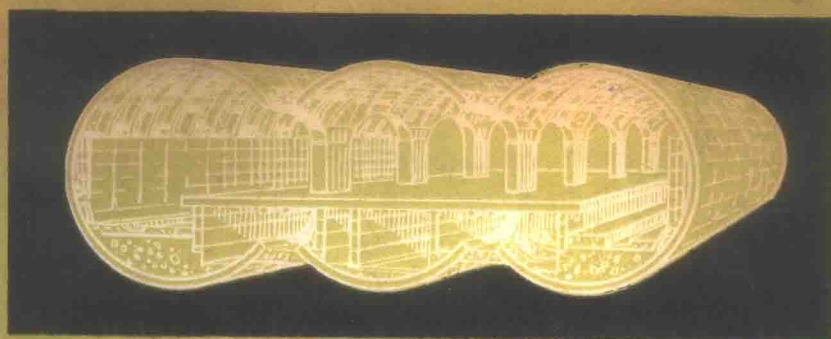




〔苏〕A.Φ.斯米尔诺夫 主编

GANXI PINGBAN JI KETI
JISUAN FANGFA

杆系、平板及壳体计算方法

中国铁道出版社

杆系、平板及壳体计算方法

〔苏〕 A.Φ.斯米尔诺夫 主编

李德寅 黄式梁 李席珍 译

曾 华 校

算

出

中 国 铁 道 出 版 社

1982年·北京

内 容 简 介

本书分上、下两篇,上篇内容主要介绍了平板的数值算法,论述了带肋的、表面转折的褶皱体系和扁壳在集中荷载作用下的计算。下篇主要介绍空间体系的计算方法,并考虑了非线性问题。

本书可供科研、工程设计人员及大专院校师生参考。

под общей редакцией А.Ф. СМЕРНОВА
МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ,
ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭВМ
СТРОЙИЗДАТ
МОСКВА 1976

杆系、平板及壳体计算方法

〔苏〕А.Ф.斯米尔诺夫 主编

李德寅 黄式梁 李席珍 译

曾 华 校

中国铁道出版社出版

责任编辑 冯秉明 封面设计 王毓平

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本: 787×1092 $\frac{1}{4}$ 印张: 21.5 字数: 539千

1982年3月第1版 1982年3月第1次印刷

印数: 0001—4,000册 定价: 2.65元

前 言

由于建筑业及机械制造业的不断增长、发展和完善，对构筑物和机械的结构计算方法提出了越来越高的要求。由于在计算业务中大规模地采用了现代化的电子计算机，因此在计算中广泛地采用数值分析法，例如边界问题的数值解。此外，结构力学问题的直接解法也在快速地发展着。在各种形式的结构中，广泛采用位移法。杆件、平板和壳体等复杂体系的许多问题都是用这种经典方法来计算的，这种方法可以和实用弹性理论的方法如级数解相配合。有限单元法作为现代结构的强度、动力和稳定计算中的一种基本方法也被广泛地采用着。

在本书中发展了位移法及结构力学中的一些其它数值方法，并用以计算各种不同的结构体系。

由于不同功率的计算机的多样性，甚至同一类型的问题因为在计算中选用的计算机不同而求解方法也不一样。因此结构物及其构件的计算问题的求解方法也不一样。例如，对具有复杂外形、切口等的连续体系应该转为离散计算图式来进行计算，正如计算由大量构件所组成的并具有简单外形的规则离散体系一样，只是在计算的特定阶段利用其连续模式才是比较合理的。在本书中作者力图详尽地叙述各种计算方法，在每种情况中述及它们的可能应用范围，并使得读者能根据所要解决的问题的特点、计算手段、电子计算机的数学功能等来选择合适的方法。

本书上篇中叙述了有限单元法的原理。编书时作者主要是根据自己的研究成果。但考虑到在苏联书籍中有限单元法都写得不够完善，书中也加进了这一方法的一般概述。大家知道，有限单元法可以作为解弹性理论问题的变分-差分方法提出来。这个方法在这里是作为结构力学基本方法中的一种即位移法的进一步的发展而提出来的，同时也说明了它和里兹法的关系。除此之外，还引进了平板的数值计算方法，这种方法是弹性荷载法的进一步发展。

对褶皱体系和扁壳的计算给予了很大重视。它们在现代建筑实践中是被广泛地推广着的。位移法的正则形式，结合着利用同一的三角级数可以很容易地来计算非连续因素：肋、壳面转折、集中荷载等。书中给出了计算规则体系的连续-离散法的基础。

本书下篇特别着重于空间体系的计算。空间体系的稳定和振动是重要而困难的计算问题，书中推广了包括平板和壳体结构体系这类问题的求解方法。同时采用和推广了近代的离散计算图形。用离散图形计算复杂的空间体系要建立和求解非常大量的方程式，相应地要求计算机有足够的容量，要耗费大量的机时与计算费，很不理想。因此，必须建立方程式数量尽可能少的近似简化计算方法，此时在特定的阶段可采用合理的连续化计算图形。书中详尽地阐明了采用这种计算图形的方法。

前三章讨论用有限单元法计算在静荷载作用下的壳体，并用来计算平板的振动与稳定。特别着重在电子计算机上实现有限单元法。第四章讨论用连续加载法求解由平板与扁壳组成的轴对称体系的几何物理的非线性问题。第五章和第六章讨论采用弹性力法原理计算在弹性阶段和弹塑性阶段复杂形状的平板，这里叙述了复杂形状平板的振动计算方法。第七章和第八章给出计算规则的二维和三维体系在连续-离散模式中的位移法。

目 录

上 篇

第一章 用位移法计算杆系的一些问题	1
§ 1. 柔度矩阵和刚度矩阵	1
§ 2. 平面矩形单元刚度矩阵的性质	3
§ 3. 变换广义力向量和广义位移向量时柔度矩阵和刚度矩阵的转换	9
§ 4. 用矩阵形式计算杆系的位移法	13
§ 5. 高斯子块消去法的物理意义	22
§ 6. 用位移法计算杆系时采用复杂的基本体系	25
§ 7. 空间杆件的反力矩阵	30
第二章 用有限单元法解平面问题和平板的弯曲问题	32
§ 1. 有限单元法的实质	32
§ 2. 有限单元法与里兹法的联系	37
§ 3. 求刚度矩阵的公式	42
§ 4. 任意三角形单元反力矩阵的求法	45
§ 5. 矩形单元的反力矩阵及其性质	49
§ 6. 有限单元柔性连接的计算	56
§ 7. 受弯单元的刚度矩阵求法	59
§ 8. 利用勒让德多项式建立刚度矩阵	63
§ 9. 弹性地基上的薄板计算	70
第三章 用虚力法计算正交异性板	73
§ 1. 一般概念	73
§ 2. 将微分算子分解成分部	73
§ 3. 虚力法原理	74
§ 4. 解特殊形式的矩阵方程式	79
§ 5. 外荷载的转换矩阵	83
§ 6. 局部荷载的情形	85
§ 7. 虚力的计算	86
§ 8. 虚拟体系的固定方法	87
§ 9. 组成便于电算形式的方程式	88
§ 10. 任意荷载正交异性板的计算例题	90
§ 11. 解的精度与网格密度的关系	94
§ 12. 正交异性板用支座弯矩局部加载时的弯曲	95
§ 13. 自由支承边	102

§ 14. 有混合边界条件平板的计算	107
§ 15. 用力法计算混合边界条件的板	108
§ 16. 校核问题	115
§ 17. 有混合边界条件平板的计算例题	121
第四章 褶皱体系和双曲扁壳的计算	128
§ 1. 一般概念	128
§ 2. 位移法的基本体系及其一般的计算方法	129
§ 3. 正交异性板的基本体系单元	132
§ 4. 各向同性壳体的基本体系单元	139
§ 5. 正交异性壳体的基本体系单元	146
§ 6. 变厚度弹性正交异性扁壳的几何非线性方程	154
第五章 周期性体系的连续-离散算法	159
§ 1. 一般概念	159
§ 2. 方法的基本原理	159
§ 3. 在连续体系中应用这一方法的特点	165
§ 4. 等刚度离散体系的计算。基本的和局部的（从属的）未知量的划分	167
§ 5. 按组合杆件变形图式的稳定性和计算	173

下 篇

第一章 利用有限单元法计算壳体复杂的有限单元	177
§ 1. 用平面矩形单元计算褶皱体系和圆筒壳体	177
§ 2. 求双曲扁壳在平面中为矩形单元的反力矩阵	180
§ 3. 复杂的等参数单元	189
第二章 用有限单元法计算振动与稳定	209
§ 1. 一般概念	209
§ 2. 确定平板的频率和振型	209
§ 3. 求平板稳定计算的反力矩阵	210
第三章 在电子计算机上实行有限单元法的几个问题	213
§ 1. 一般概念	213
§ 2. 分块法的组成和有限单元法线性方程组的求解	213
§ 3. 利用复杂的基本体系计算空间结构	217
§ 4. 形成方程组的按行计算方法	219
§ 5. 用有限单元法计算组合体系	224
第四章 在非线性问题中计算组合的轴对称平板和扁壳的连续加载法	227
§ 1. 一般概念	227
§ 2. 求解问题的一般方法	228
§ 3. 等截面圆形板的弯曲微分方程及其线性化	231
§ 4. 变厚度和沿径线方向带曲率的柔性扁壳的变形方程	235
§ 5. 平板与壳体线性化边界问题的数值解	238

§ 6. 建立基本体系单元的《瞬时》刚度矩阵	241
§ 7. 弹性平板与壳体的计算例题	244
§ 8. 轴对称体系几何物理的非线性问题解法	247
§ 9. 在连续加载法中关于柯西 (Коши) 问题的求解	252
第五章 平板在复杂边界条件下的强度和振动	255
§ 1. 一般概念	255
§ 2. 基本体系与赘余未知数	255
§ 3. 建立与求解正则方程	256
§ 4. 考虑边界条件	259
§ 5. 带有混合边界条件的复杂连续平板的计算例题	260
§ 6. 带有混合边界条件平板的自由振动	264
第六章 超过弹性极限的平板弯曲	271
§ 1. 一般概念	271
§ 2. 超过弹性极限平板弯曲理论的简述	272
§ 3. 弹塑性变形范围的确定	273
§ 4. 弯矩和扭矩的计算	275
§ 5. 计算附加荷载 δq	278
§ 6. 在任意荷载作用下矩形平板超过弹性极限的计算	280
§ 7. 带有混合边界条件的平板超过弹性极限的计算	289
第七章 用连续-离散法计算二维离散介质	298
§ 1. 问题的提出	298
§ 2. 在斜角坐标网格上节点体系的微分方程和边界条件的公式	300
§ 3. 已知方程矩阵的对称特性体系双向对称单元的情况	304
§ 4. 由双向对称单元组成的介质的平面应力状态和弯曲	306
§ 5. 带有复杂构造介质的平衡方程和运动方程	315
第八章 三维离散介质的空间体系的计算	321
§ 1. 一般概念	321
§ 2. 在斜角坐标网格上节点体系的平衡微分方程	322
§ 3. 具有三个对称平面单元的体系	325
§ 4. 带有离散介质体系的计算例题	329
§ 5. 复杂离散介质计算的某些问题	335

上 篇

第一章 用位移法计算杆系的一些问题

§ 1. 柔度矩阵和刚度矩阵

对于在图1a中所示的梁，有：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \vec{y} = A\vec{P} \quad (1)$$

式中 δ_{ij} ——由于点 j 处作用的单位力在点 i 处产生的位移。

矩阵 A 称为柔度矩阵。这个矩阵的元素都是由于单位力产生的位移。这样，第一列就是由于点 1 处（图1b）作用的单位力在点 1、2、3 处产生的位移。因为柔度矩阵的元素都是位移，所以这个矩阵也称为位移矩阵。将等式（1）的两边乘以 A^{-1} ，得：

$$\vec{P} = A^{-1}\vec{y} = B\vec{y} \quad (2)$$

式中

$$B = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

B 是刚度矩阵；它的元素是由于点 1、2、3 处有单位位移在这些点处产生的反力。这样，第一列就是由于点 1 处有单位位移而其余各点均为固定时（图1c）在点 1、2、3 处的反力。因为刚度矩阵的元素都是反力，所以这个矩阵也就称为反力矩阵。在以后，刚度（反力）矩阵将用字母 B 或者 R 来表示。柔度矩阵和刚度矩阵总是对称矩阵。

建立图2a所示杆件的刚度矩阵。图2b表示杆件的变形和作用在杆件上的正方向的反

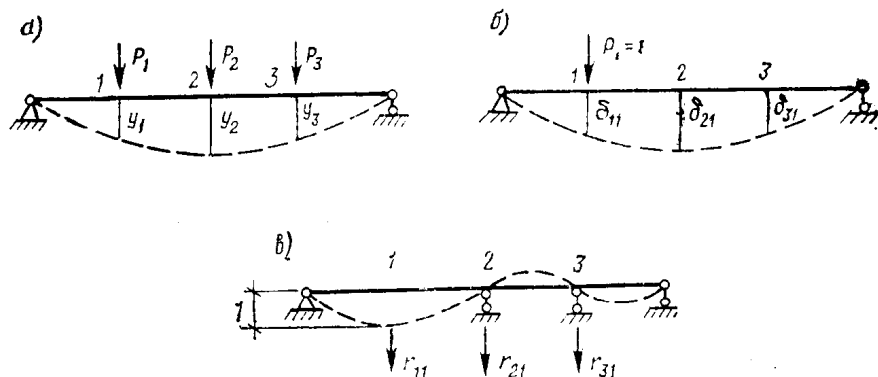


图 1

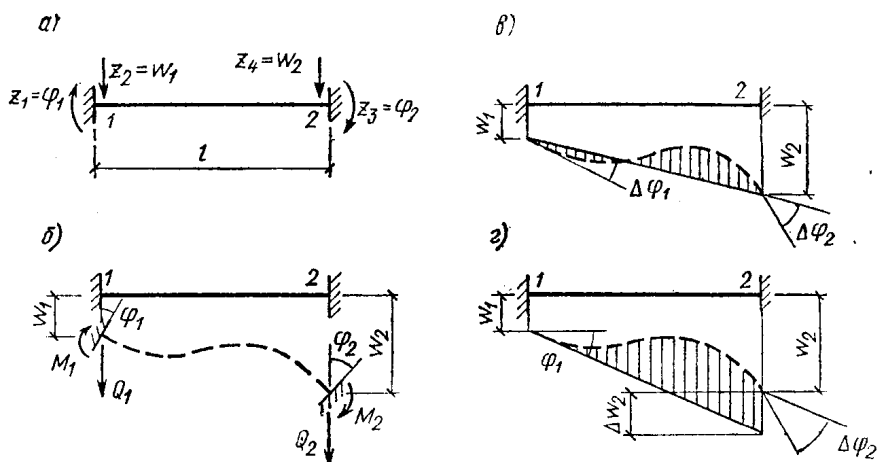


图 2

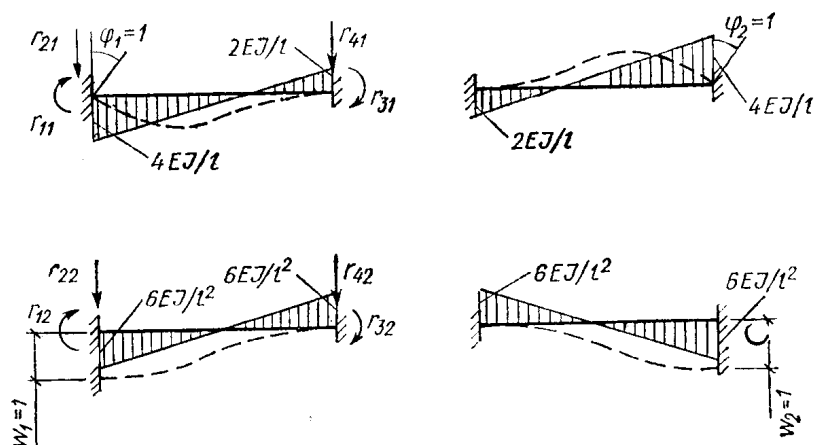


图 3

力。

$$\vec{P} = R \vec{Z} \quad (3)$$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} M_1 \\ Q_1 \\ M_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}; \quad \vec{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_1 \\ \varphi_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

式中 R ——反力矩阵;
 $\vec{P}$ ——广义内力向量;
 $\vec{Z}$ ——广义位移向量。

图 3 表示出当梁端有单位线位移和单位角位移时, 梁内产生的弯矩图。

利用图形相乘的矩阵形式来建立刚度矩阵 (这个反力矩阵也可以用截取节点的方法来得
 到) :

$$\begin{aligned}
 R &= \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & -\frac{2EI}{l} \\ \frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} & -\frac{4EI}{l} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} \end{bmatrix} \times \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \vdots & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \vdots & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \vdots & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \vdots & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & \vdots & R_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{21} & \vdots & R_{22} \end{bmatrix} \quad (4)
 \end{aligned}$$

式中 R_{11}, R_{22} ——二阶子块，它的元素是由于截面 1、2 处（图 2）的单位移动在同一截面处所产生的反力；

R_{21}, R_{12} ——子块，它的元素是由于截面 1 和 2 处的相互作用而产生的反力。

反力矩阵（4）是没有逆矩阵的，这是因为它的秩等于 2（第二行和第四行只是符号不同，第二行可由一、三两行相加而得）。反力矩阵的秩等于矩阵阶数减去作为刚体杆件的位移数的差值。图 26 所示杆件的变形可视为一刚性移动以及对应于此刚性移动的变形。在图 26 上是取这样的杆件位移作为刚性移动的，即点 1 移动了 w_1 ，点 2 移动了 w_2 。对应于刚性移动的变形是用转角 $\angle\varphi_1$ 和 $\angle\varphi_2$ 来确定的（在图 26 上这一变形用细划线表示着）。也可以取平移 w_1 和转角 φ_1 （图 2i）来作为刚性移动。这时，对应于刚性移动的变形将用相对挠度 $\angle w_2$ 和相对转角 $\angle\varphi_2$ 来确定。

类似的概念可以随意设想，但每一次对应于刚性移动的变形都要用两个参数来表示。在点 1、2 中如果每一点取三个可能的移动（ φ 、 u 、 w ，式中 u ——水平移动），那么刚度矩阵将为 6×6 阶，它的秩等于 3，因为这时杆件作为刚体可能有三种移动（例如，转动及水平和垂直方向的平移）。

因此，柔度矩阵并不总是可以用求逆来得到刚度矩阵，因为后者可能是奇异矩阵而没有逆矩阵。柔度矩阵总是非奇异的，因此等式 $B = A^{-1}$ 总是成立的。

§ 2. 平面矩形单元刚度矩阵的性质

我们来研究图 4 所示的平面矩形框架型式的构件。设此框架在其自身平面内和平面外变形。我们取点 1、2、3、4 的三个线位移（在图 4 中用单箭头向量表示）和三个角位移（用双箭头向量表示）作为广义位移，它们能表示出框架轴线上全部点在空间的位置。角点的位移向量和点 1、2、3、4 处产生的力为：

$$\vec{Z}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_i^x \\ \varphi_i^y \\ \varphi_i^z \end{bmatrix} \quad \vec{P}_i = \begin{bmatrix} Q_i^x \\ Q_i^y \\ Q_i^z \\ M_i^x \\ M_i^y \\ M_i^z \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (5)$$

因此, 可以用24个自由度来确定框架的变形。我们用式(5)的符号写出整个单元位移和结点力的全向量:

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \\ \vec{z}_3 \\ \vec{z}_4 \end{bmatrix} \quad \vec{P} = \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \\ \vec{P}_4 \end{bmatrix}$$

由向量 $\vec{Z}$ 过渡到向量 $\vec{P}$ 可写为

$$\vec{P} = R\vec{Z}$$

式中 R —— 24 × 24 阶刚度矩阵。

因为图4所示单元是对称的, 所以其刚度矩阵有着大量的相同的元素。将反力矩阵写成子块形式:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中 R_{ij} —— 六阶矩阵, 其元素是由于点 j 处的单位位移在点 i 处产生的反力 ($i, j = 1, 2, 3, 4$)。

反力子块 R_{ij} 为:

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} r_{u_i u_j} & r_{u_i v_j} & \vdots & \vdots & r_{u_i \varphi_j^x} & r_{u_i \varphi_j^y} & r_{u_i \varphi_j^z} \\ r_{v_i u_j} & r_{v_i v_j} & \vdots & \vdots & r_{v_i \varphi_j^x} & r_{v_i \varphi_j^y} & r_{v_i \varphi_j^z} \\ \hline & & r_{w_i w_j} & r_{w_i \varphi_j^x} & r_{w_i \varphi_j^y} & r_{w_i \varphi_j^z} & \\ & & r_{\varphi_i^x w_j} & r_{\varphi_i^x \varphi_j^x} & r_{\varphi_i^x \varphi_j^y} & r_{\varphi_i^x \varphi_j^z} & \\ & & r_{\varphi_i^y w_j} & r_{\varphi_i^y \varphi_j^x} & r_{\varphi_i^y \varphi_j^y} & r_{\varphi_i^y \varphi_j^z} & \\ \hline r_{\varphi_i^z u_j} & r_{\varphi_i^z v_j} & \vdots & \vdots & r_{\varphi_i^z \varphi_j^x} & r_{\varphi_i^z \varphi_j^y} & r_{\varphi_i^z \varphi_j^z} \end{bmatrix} \quad (7)$$

根据反力的互等定理, 有

$$R_{ij} = R_{ji}^T$$

在式(7)中每一个反力都有字母脚标, 而字母脚标本身还带着数字脚标。按照反力的互等

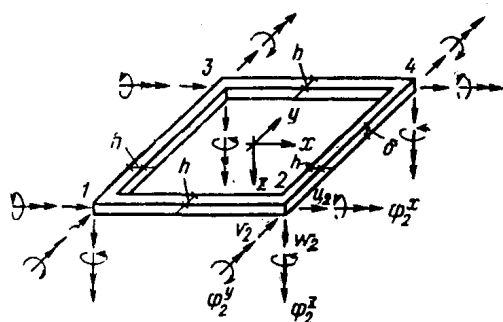


图 4

定理, 字母脚标可以改换位置, 但此时原先的数字脚标却仍跟随着(例如, $r_{u_i u_j} = r_{u_j u_i}$)。另一方面, 当字母脚标不变, 而只改换数字脚标 (i 换成 j ; j 换成 i) 时, 根据双向对称条件, 这时元素的系数依然保留, 只是符号要改变。因此, 全部子块 R_{ij} 都是按系数来说是对称的矩阵, 而位于其主对角线上 ($i = j$) 的矩阵则是完全对称的。

反力矩阵 R (6) 的第一列子块代表由于点 1 的单位位移在点 1、2、3、4 处产生的反力, 而第二列子块则代表由于点 2 的单位位移在点 1、2、3、4 处产生的反力, 其余类推。根据单元的对称条件 (见图 4), 由于点 1 和点 2 的位移产生的类似反力之间只有脚标符号上的差别。因此, 第一列子块和第二列相同的子块之间只是符号不同。对其它列而言也是这样。

对第一列子块我们规定符号为: $R_{11} = A_{11}$; $R_{21} = B_{21}$; $R_{31} = C_{31}$; $R_{41} = D_{41}$ 。符号不同的反力子块将用同样的字母来表示。基于上述, 反力矩阵的全部子块的元素的系数, 可以根据矩阵 R 的第一列子块的元素建立起来。因此, 反力矩阵由四种型式的子块 A 、 B 、 C 、 D 组成。位于矩阵 R 的主对角线上的子块, 表示由于点 1、2、3、4 的单位位移在同一点处产生的反力, 它们之间的区别只是元素的符号不同。因此, $R_{22} = A_{22}$; $R_{33} = A_{33}$; $R_{44} = A_{44}$ (字母 A 的脚标表示符号不同)。我们再来建立位于主对角线以下的子块和第一列子块之间的相应关系。位于主对角线以上的子块, 可按矩阵 R 的对称条件建立起来, 这是因为矩阵 R 的全部子块, 按系数来说都是对称矩阵。子块 $R_{31} = C_{31}$, 而 R_{42} 则由于点 3、4 和 1、2 相对于 y 轴 (见图 4) 是对称的, 只是符号不同, 即 $R_{42} = C_{42}$ 。

对于子块 $R_{41} = D_{41}$ 和 $R_{32} = D_{32}$ 而言, 也是这样 (点 4 与点 3 对称, 而点 1 与点 2 对称)。子块 $R_{21} = B_{21}$ 和 $R_{43} = B_{43}$, 是由于相对于 x 轴是对称的, 也只是符号不同。基于前述, 图 4 所示单元的反力矩阵为:

$$R = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & C_{13} & D_{14} \\ B_{21} & A_{22} & D_{23} & C_{24} \\ C_{31} & D_{32} & A_{33} & B_{34} \\ D_{41} & C_{42} & B_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (8)$$

假设子块 A_{11} ; B_{21} ; C_{31} ; D_{41} 均为已知 (因之反力矩阵的全部元素的系数也都已知)。为了建立起其它各列 (第二、第三和第四列) 的元素的符号, 我们规定符号的两个算符。将框架的角位移分为两组。为了确定这种或那种位移属于那一组, 我们将框架沿 y 轴翻转过来。结果是点 1 放到了点 2 上, 而点 3 则放到了点 4 上。如果放置点的同一种位移 (见图 4) 的正方向重合, 则这种位移属于第一组, 如果不重合则属于第二组。对 x 轴也进行同样的作法。这样, 就有:

y 轴

x 轴

第 1 组	第 2 组
$u \varphi^y$	$uw \varphi^x \varphi^z$

第 1 组	第 2 组
$u \varphi^x$	$vw \varphi^y \varphi^z$

我们现在根据第一子块列的元素符号来建立第二和第三子块列 (相应地为算符 1 和算符 2) 的符号的算符。利用上列左表来建立算符 1, 利用上列右表来建立算符 2。

算符的符号是按照下列规则建立的: 当行和列相交时, 如果从左边所指的位移和从上边所指的位移是属于同一组的, 则放上正号 (+), 在相反的情况下, 则放上负号 (-)。为了求得第二子块列—— B_{12} ; A_{22} ; D_{32} ; C_{42} 的元素符号, 应该将算符 1 《放置》到用同样

算符 1

	u	v	w	φ^x	φ^y	φ^z
u	+	-	+	+	-	+
v	-	+	-	-	+	-
w	+	-	+	+	-	+
φ^x	+	-	+	+	-	+
φ^y	-	+	-	-	+	-
φ^z	+	-	+	+	-	+

算符 2

	u	v	w	φ^x	φ^y	φ^z
u	+	-	-	+	-	-
v	-	+	+	-	+	+
w	-	+	+	-	+	+
φ^x	+	-	-	+	-	-
φ^y	-	+	+	-	+	+
φ^z	-	+	+	-	+	+

字母 B_{21} , A_{11} , D_{41} , C_{31} 表示的第一子块列的相应的子块上去。如果第一子块列元素符号与算符里的重合, 则在第二子块列的相应的子块地点放上正号, 在相反情形下则放上负号。同样地用算符 2 根据第一列的符号来建立第三子块列的符号。为了求得第四子块列的符号, 必须在第一子块列的元素上先放上算符 1, 再放上算符 2, 或者建立算符 3 (由算符 2 加上算符 1 而得)。借此可立即根据第一列的符号得出第四列的符号。

我们再说一说矩阵 R 的第一列的子矩阵的构造。前面已经指出, 矩阵 B_{21} , C_{31} , D_{41} 是按系数对称的矩阵, 而矩阵 A_{11} 则是完全对称的。为了在子块内部确定那些位于主对角线以上的元素符号, 必须将算符 1、2、3 中位于连续阶梯线以下的部分放到位于主对角线及其下面的元素上去。在子块 A_{11} , B_{21} , C_{31} , D_{41} 中位于主对角线及其下面的元素, 在以后的叙述中将称为《初始的》元素, 因为根据这些元素, 再根据几个算符就可以建立完整的反力矩阵。

将上述内容用图 2a 所示杆件的例题来说明。根据前述, 此杆件的刚度矩阵为:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} \\ B_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

写出将位移分解成组的图式: 第一组— φ ; 第二组— w 。

符号的算符如下:

	φ	w
φ	+	-
w	-	+

设用小写字母来表示子块 A_{11} 、 B_{21} 的元素:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B_{21} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad (9)$$

则 $a_{12} = a_{21}$; $b_{12} = -b_{21}$ 。杆件反力矩阵的初始元素, 可以从当 $\varphi_1 = 1$ 和 $w_1 = 1$ (见图 3) 时用截取相应节点的方法求得:

$$\begin{aligned} a_{11} &= r_{11} = 4EI/l & b_{11} &= r_{31} = 2EI/l \\ a_{21} &= r_{21} = 6EI/l^2 & b_{21} &= r_{41} = -6EI/l^2 \\ a_{22} &= r_{22} = 12EI/l^3 & b_{22} &= r_{42} = -12EI/l^3 \end{aligned} \quad (10)$$

杆件的反力矩阵, 可从式 (10) 的初始元素并借上面引述的算符之助来求得。

再说一说刚度矩阵的初始元素的某些性质。已知图 4 所示单元有六个单位的刚性位移——三个线位移和三个角位移 (图 5)。显然, 在点 1 由于这些位移所产生的反力应当等于零。将此条件写成矩阵式 (11):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & -\frac{b}{2} \\ & 1 & & & & \frac{a}{2} \\ & & 1 & \frac{b}{2} & -\frac{a}{2} & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} + R_{12} \begin{bmatrix} 1 & & & & & -\frac{b}{2} \\ & 1 & & & & -\frac{a}{2} \\ & & 1 & \frac{b}{2} & \frac{a}{2} & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ & + R_{13} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \frac{b}{2} \\ & 1 & & & & \frac{a}{2} \\ & & 1 & -\frac{b}{2} & -\frac{a}{2} & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} + R_{14} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \frac{b}{2} \\ & 1 & & & & -\frac{a}{2} \\ & & 1 & -\frac{b}{2} & \frac{a}{2} & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

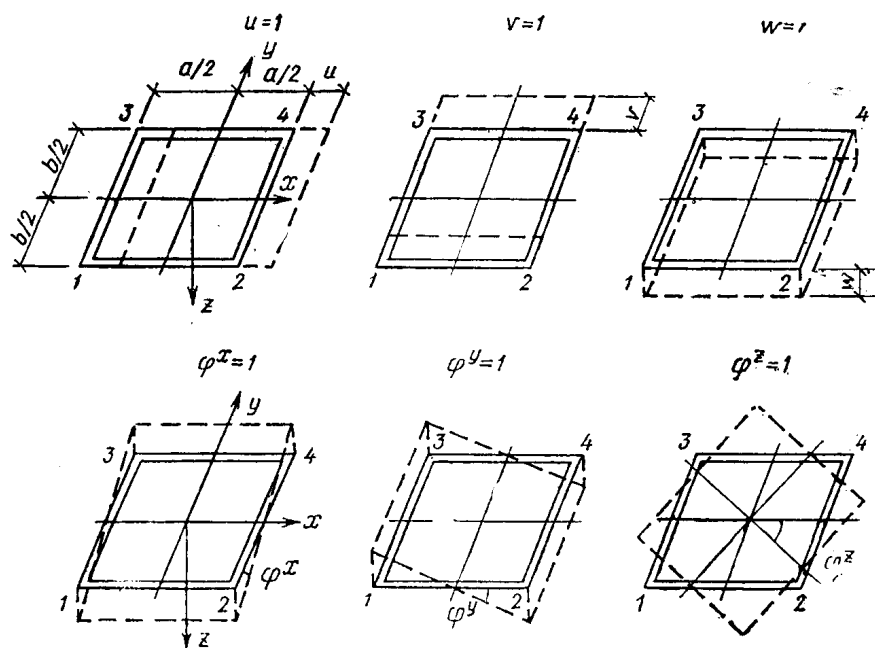


图 5

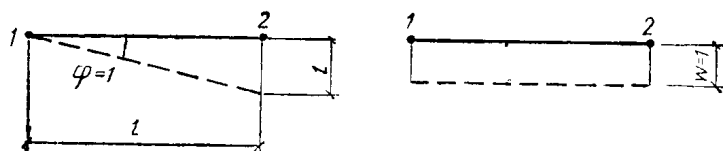


图 6

作为 $R_{(11)}$ 的乘数的矩阵，第一列是当 $u = 1$ 时点 1、2、3、4 的位移向量，第二列——是当 $v = 1$ 时，第三列——是当 $w = 1$ 时，第四列——是当 $\varphi^x = 1$ 时，余类推。根据矩阵 R 的对称条件有： $R_{12} = B_{21}^T$ ； $R_{13} = C_{31}^T$ ； $R_{14} = D_{41}^T$ 。式(11)给出了初始元素间的一系列相互关系。

用杆件例题来说明所得的这些关系。设杆件有两种刚性位移 $\varphi = 1$ 和 $w = 1$ (图 6)：

$$R_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + R_{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} = 0$$

考虑到 $R_{12} = B_{21}^T$ ，利用式 (9) 的符号规定，得到：

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ -b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} = 0 \\ \text{或} & \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} + b_{21}l & a_{21} + b_{21} \\ a_{21} - b_{21} + b_{22}l & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由等式 (12)，得：

$$\left. \begin{aligned} a_{21} &= -\frac{a_{22}l}{2} & b_{21} &= -\frac{a_{22}l}{2} \\ b_{11} &= -a_{11} + \frac{a_{22}l^2}{2} & b_{22} &= -a_{22} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

反力矩阵 (4) 的初始元素要满足式 (13) 的全部关系。

因此, 杆件反力矩阵的全部元素可通过 a_{11} 和 a_{22} 来表达。要注意我们在求取初始元素间的关系式 (13) 时, 只是利用了对称条件和平衡条件, 因此, 不论单元有着怎样的物理性质, 反力矩阵的元素都应当满足这些关系。例如, 设建立杆件反力矩阵时考虑剪切, 那末, 此矩阵的元素同样地也只与 a_{11} 和 a_{22} 有关。

§ 3. 变换广义力向量和广义位移向量时 柔度矩阵和刚度矩阵的转换

我们再来研究图 1a 所示的梁。计算力 P_1 ; P_2 ; P_3 的功, 它等于梁内蓄积的位能

$$\Omega = \frac{1}{2}(P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3) \quad (14)$$

式 (14) 可以写成矩阵形式:

$$\Omega = \frac{1}{2} \vec{P}^T \vec{y} \quad (15)$$

将 (1) 代入 (15), 得

$$\Omega = \frac{1}{2} \vec{P}^T A \vec{P} \quad (16)$$

这也就是用力向量写成的物体的位能表达式。将 (2) 代入 (15) 可得出用位移向量写成的物体的位能表达式

$$\Omega = \frac{1}{2} \vec{y}^T B \vec{y} \quad (17)$$

因此, 为了用力向量来计算位能就要用柔度矩阵, 为了用位移向量来计算位能则要用刚度矩阵。

我们来研究在力作用下的弹性体, 这些力用向量 $\vec{P}^*$ 来表示。柔度矩阵用 A^* 来表示。按照式 (16) 有

$$\Omega = \frac{1}{2} (\vec{P}^*)^T A^* \vec{P}^* \quad (18)$$

设力向量 $\vec{P}^*$ 和 向量 $\vec{P}$ 有下列关系

$$\vec{P}^* = C \vec{P} \quad (19)$$

式中 C —— 变换矩阵。

将 (19) 代入 (18), 得

$$\Omega = \frac{1}{2} \vec{P}^T A \vec{P} \quad (20)$$

式中

$$A = C^T A^* C$$

矩阵 A 是变化了的广义力向量 $\vec{P}$ 的柔度矩阵, 该 $\vec{P}$ 和向量 $\vec{P}^*$ 有 (19) 式所示的关系。

下面来求当广义位移向量变化时刚度矩阵的变换公式。我们来研究有给定变形的弹性体, 这些变形用向量 $\vec{y}$ 来表示。刚度矩阵用 B^* 来表示。按照式 (17) 有

$$\Omega = \frac{1}{2} \vec{y}^T B^* \vec{y} \quad (21)$$

设向量 $\vec{y}$ 和向量 $\vec{Z}$ 有下列关系

$$\vec{y} = C\vec{Z} \quad (22)$$

将 (22) 代入 (21), 得

$$\Omega = \frac{1}{2} \vec{Z}^T B \vec{Z}$$

式中

$$B = C^T B^* C \quad (23)$$

我们来举应用式 (23) 及 (20) 的最简单的例题。图7a示一两次超静定刚架。图7b和7c表示不考虑分组和考虑了分组时的基本体系。设图7b所示体系的柔度矩阵为

$$A^* = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}$$

显然, 根据刚架的对称条件 $\delta_{11} = \delta_{22}$ 。利用式(20)来写出图7c所示体系的柔度矩阵 A :

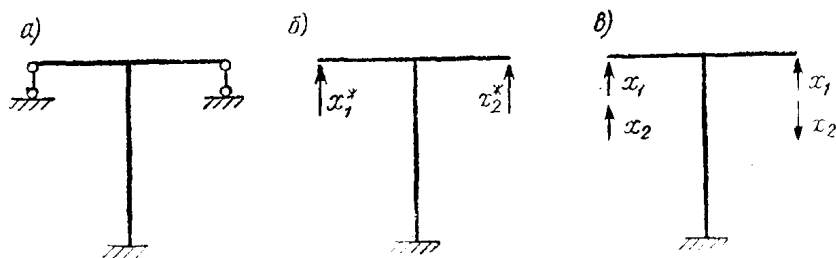


图 7

$$x_1^* = -x_1 + x_2$$

$$x_2^* = x_1 - x_2$$

即 $\vec{x}^* = C\vec{x}$, 式中 $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 。

按式 (20) 得

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} & \delta_{11} - \delta_{12} + \delta_{21} - \delta_{22} \\ \delta_{11} + \delta_{12} - \delta_{21} - \delta_{22} & \delta_{11} - \delta_{12} - \delta_{21} + \delta_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据矩阵 A^* 的双向对称条件, 有

$$A = \begin{bmatrix} 2(\delta_{11} + \delta_{12}) & 0 \\ 0 & 2(\delta_{11} - \delta_{12}) \end{bmatrix}$$

要建立柔度矩阵和刚度矩阵的困难在于: 取怎么样的荷载或位移来作为单位 (基本) 荷载呢。因此在建立这些矩阵时, 要利用那些能更简单地建立矩阵的基本荷载, 再按式 (20) 和 (23) 转向以后的步骤。设要作出图 8 所示梁的柔度矩阵,

$$\vec{y} = A\vec{P}$$

式中 A —— 柔度矩阵。

可以立即将图9a所示的图形互乘来求取柔度矩阵, 也可以先求出平衡力系*的柔度矩