Z 各个击破

ZHUANTI DIANJI

专题点击

以专题为编写线索

针对性、渗透性强

体例新颖、注重能力培养

适用区域广泛

高中数学

·代数二·

12

主　编　张绍春　罗彦东

东北师范大学出版社

Z 各个击破

ZHUANTI DIANJI

专题点击

以专题为编写线索

针对性、渗透性强

体例新颖、注重能力培养

适用区域广泛

12

高中数学

·代数二·

主　编　张绍春　罗彦东

东北师范大学出版社·长春

图书在版编目（CIP）数据

专题点击. 高中代数. 2/张绍春主编. —长春：东北师范大学出版社，2003. 5
ISBN 7-5602-3324-4

Ⅰ. 专… Ⅱ. 张… Ⅲ. 代数课—高中—数学参考资料… Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 026533 号

ZHUANTI DIANJI

□策划创意：一编室
□责任编辑：孟繁波　□责任校对：李敬东
□封面设计：张　然　□责任印制：张文霞

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号　邮政编码：130024
电话：0431—5695744　5688470　传真：0431—5695734
网址：www.nnup.com　电子函件：sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版
沈阳新华印刷厂印装
沈阳市铁西区建设中路 30 号（110021）
2003 年 5 月第 1 版　2003 年 7 月第 2 次印刷

幅面尺寸：148mm × 210mm　印张：13.5　字数：438 千
印数：10 001—15 000 册

定价：16.00 元

本书作者

ZHUANTI DIANJI GAOZHONG SHUXUE

主　编　张绍春　罗彦东

本册主编　赵雪梅　于利和　兰培娟

编　者　张月柱　周振文　李风芝　金英山

李庚烈　赵勤学　赵莉红　陈　曦

于　斌　薛红莉　刘宇辉　卢　伟

郭艳春　李艳霞　赵永先　余丽华

CHUBANZHE DE HUA

出版者的话

《专题点击》丛书的创意始于教材改革的进行，教材的不稳定使教辅图书市场异彩纷呈，新旧图书杂糅，读者即使有一双火眼金睛，也难以取舍。但无论各版别的教材如何更新、变革，万变不离其宗的是，删改陈旧与缺乏新意的内容，增加信息含量，增强人文意识，培养创新精神，增添科技内涵，活跃思维，开发学生的创新、理解、综合分析及独立解决问题等诸多能力，而这些目标的实现均是以众多不断调整的知识板块、考查要点串连在一起的。不管教材如何更改，无论教改的步子迈得多大，这些以丰富学生头脑，开拓学生视野，提高其综合素养为宗旨的知识链条始终紧密地联系在一起，不曾有丝毫的断裂，而我们则充分关注形成这一链条的每一环节，这也是"专题"之切入点。

《专题点击》丛书的出版正是基于此种理念，涵盖初高中两个重点学习阶段所学语文、英语、数学、物理、化学等五个学科，各科以可资选取的知识板块作为专题，进行精讲，精解，精练。该丛书主要具有以下特点：

一、以专题为编写线索

语文、英语、数学、物理、化学五主科依据初高中各年级段整体内容及各学科的自身特点，科学、系统地加以归纳、分类及整理，选取各科具有代表性的知识专题独立编写成册，并以透彻的讲解、精辟的分析、科学的练习、准确的答案为编写思路，再度与一线名师携手合作，以名师的教学理念为图书的精髓，以专题为轴心，抓住学科重点、知识要点，以点带面，使学生对所学知识能融会贯通。

二、针对性、渗透性强

"专题"，即专门研究和讨论的题目，这就使其针对性较明显。其中语文、英语两科依据学科试题题型特点分类，数学、物理、化学各科则以知识板块为分类依据，各科分别撷取可供分析讨论的不同板块，紧抓重点难点，参照国家

课程标准及考试说明，于潜移默化中渗透知识技能，以收“润物细无声”之功效。

三、体例新颖，注重能力培养

《专题点击》丛书体例的设计，充分遵循了学生学习的思维规律，环环相扣，逻辑性强。基础知识的讲解，注重精练，循序渐进，以至升华；典型例题，以实例引航，达到举一反三，触类旁通；把知识点融入习题，鼓励实战演练，做到学以致用。本丛书一以贯之、自始至终遵循的是对学生能力的培养。

四、适用区域广泛

《专题点击》丛书采用“专题”这一编写模式，以人教版教材为主，兼顾国内沪版、苏版等地教材，汲取多种版本教材的精华，选取专题，使得本套书在使用上适用于全国的不同区域，可活学活用，不受教材版本的限制。

作为出版者，我们力求以由浅入深、切中肯綮的讲解过程，化解一些枯燥的课堂教学，以重点、典型的例题使学生从盲目的训练中得以解脱，以实用、适量的练习减少学生课下如小山般的试卷。

我们的努力是真诚的，我们的探索是不间断的，希望我们的努力使学生有更多的收获。成功并不属于某一个人，它需要我们共同创造，需要我们携手前行。

东北师范大学出版社

第一编辑室

ZHUANTI DIANJI

目录

专题点击

专
题
点
击

专题点击

第一章

平面向量

向量是数学中的重要概念之一. 向量这一概念是由物理学和工程技术抽象出来的. 反过来,向量的理论和方法又成为解决物理学和工程技术问题的重要工具. 向量的有关知识也是进一步学习数学、物理及其他科学的有效工具. 通过向量可把空间图形的性质转化为向量的运算,这样就能较容易地研究空间的直线和平面的有关问题.

本章将学习向量的概念、向量的几何表示和坐标表示、向量的线性运算、平面向量的数量积、线段的定比分点和中点坐标公式、平移公式、解斜三角形等.

第一节 向量、向量的加法与减法

1 知识点击 循序渐进

一、有向线段

1 方 向

在数学中,我们通常用点表示位置,用射线表示方向. 在平面内,从任一点出发的所有射线,可以分别用来表示平面内的各个方向.

如果两条射线平行,并且它们位于过两个端点的直线的同侧,我们就说这两条射线同方向. 如图 1 - 1(1)中的射线 AB 和 CD 就是同方向的.

如果两条射线平行,并且它们位于过两个端点的直线的两侧,我们就说这两条射线反方向. 如图 1 - 1(2)中的射线 AB 和 CD 就是反方向的.

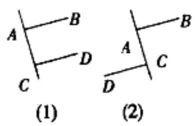

图 1 - 1

当两条射线位于同一条直线上(即共线)时,我们又作如下规定:如果两条射线中的一条包含另一条,我们就

说这两条射线同方向，如图 1 - 2(1)中的 AB 和 CD；如果两条射线共线，并且它们互不包含，我们就说这两条射线反方向，如图1 - 2(2)中的射线 AB 和 CD.

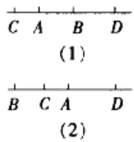

图 1 - 2

2 有向线段

在线段 AB 的两个端点中，我们规定一个顺序：A 为起点，B 为终点，我们就说线段 AB 具有射线 AB 的方向(图 1 - 3).

(1)有向线段

具有方向的线段叫做有向线段.

通常在有向线段的终点处画上箭头表示它的方向. 以 A 为起点，B 为终点的有向线段记作$\overrightarrow{AB}$. 注意：起点一定写在终点的前面.

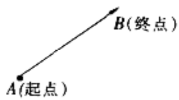

图 1 - 3

(2)有向线段的长度

已知$\overrightarrow{AB}$，线段 AB 的长度也叫做有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度(或叫做模)，$\overrightarrow{AB}$的长度记作$|\overrightarrow{AB}|$.

(3)三要素

有向线段包含三个要素：起点、方向、长度. 知道了有向线段的起点，它的终点被它的方向和长度唯一确定.

二、向量的概念

1 数 量

仅用一个实数就可以表示的量叫做数量.

例如距离、时间、面积和质量等，在选定度量单位后就可以用一个实数来表示它们. 这些量都是数量.

2 向 量

我们把既有大小又有方向的量叫做向量.

例如物理学中的位移、速度、加速度、力等都是向量.

(1)向量的表示

一个向量可用一条有向线段来表示. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示一个向量时，我们也说成向量$\overrightarrow{AB}$.

(2)向量的长度

向量$\overrightarrow{AB}$的大小，也就是向量$\overrightarrow{AB}$的长度(或称模)，记作$|\overrightarrow{AB}|$.

(3)零向量

长度为 0 的向量叫做零向量，记作 **0**. 零向量的方向不确定(零向量与任一向量平行).

(4)单位向量

长度等于 1 个单位长度的向量，叫做单位向量.

(5)平行向量

方向相同或相反的非零向量叫做平行向量.

向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$. 我们规定 **0** 与任一向量平行.

(6)相等向量

长度相等且方向相同的向量叫做相等向量.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.零向量与零向量相等. 任意两个相等的非零向量，都可以用一条有向线段来表示，并且与有向线段的起点无关（与起点无关的向量称为自由向量，本章学习的主要是自由向量).

(7)共线向量

如图 1 - 4，任作一条与 $\boldsymbol{a}$ 所在的直线平行的直线 l，在 l 上任取一点 O，则可在 l 上分别作出 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 这就是说，任一组平行向量都可移到同一直线上，因此，平行向量也叫做共线相量.

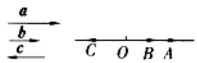

图 1 - 4

3 学习向量应注意以下两点：

1. 由于方向不能比较大小，因此“大于”、“小于”对向量来说是没有意义的.

2. 共线向量有如下分类：

$$\text{共线向量}\begin{cases}\text{同向向量}\begin{cases}\text{相等向量}\\\text{同向不等向量}\end{cases}\\[2ex]\text{反向向量}\begin{cases}\text{相反向量(反向模相等)}\\\text{反向模不等向量}\end{cases}\end{cases}$$

三、向量的加法与减法

1 向量的加法

如果一个质点由点 A 移到点 B(用 $\overrightarrow{AB}$ 表示)，又由点 B 移到点 C(用 $\overrightarrow{BC}$ 表示)，那么显然存在一个从点 A 到点 C 的位移(用 $\overrightarrow{AC}$ 表示)，与上面两次连续位移的结果等效(效果相同). 这时，我们可以说，质点从 A 到 C 的位移是质点由 A 到 B 再由 B 到 C 两次位移的和(如图 1 - 5).

从位移的求和，我们可以引出向量的加法法则.

(1)求和的三角形法则

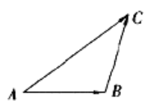

图 1 - 5

已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$（如图 1 - 6），在平面上任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，作向量 $\overrightarrow{AC}$，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

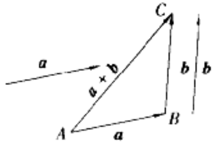

图 1 - 6

上述求两个向量和的作图法叫做求和的三角形法则.

对于零向量与任一向量 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

(2)向量加法满足交换律与结合律

(i) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（交换律）

(ii) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（结合律）

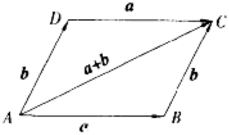

图 1 - 7

证明:(i) 如图 1 - 7，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则有 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

再作 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 则四边形 $ABCD$ 是平行四边形，于是向量 $\overrightarrow{DC}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向且等长，即 $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$，所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AC}$.

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

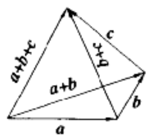

图 1 - 8

运算律(ii)的证明，请同学们根据图 1 - 8 自己完成. 从上述向量加法交换律的证明过程，我们可以得到求作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的另一种方法(图 1 - 7).

(3)求和的平行四边形法则

作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，则对角线上的向量 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这个法则又叫做求和的平行四边形法则.

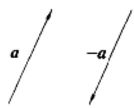

图 1 - 9

对于三个或三个以上向量的求和法则，可根据两个向量的求和法则加以推广.

2 向量的减法

(1)相反向量

与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等，方向相反的向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 如图 1 - 9，即 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由向量加法的定义知道，$\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{a}$ 等长而且方向相反.

(2)向量的减法法则

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，我们定义 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

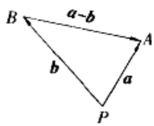

图 1 - 10

下面介绍求两个向量差的作图法则（如图 1 - 10）.

作 $\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PA}+$

$(-\overrightarrow{PB})=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

这就是说,如果把表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的有向线段的起点放在一起,那么 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是以表示减量 $\boldsymbol{b}$ 的有向线段的终点为起点,表示被减向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段的终点为终点的有向线段所表示的向量.

2 实例引航 举一反三

例1 判断下列命题的正误:

(1)单位向量都共线; (2)单位向量都相等;

(3)共线的单位向量必相等; (4)与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的单位向量是 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

解:(1),(2),(3),(4)均不正确. 对于(2),单位向量长度为 1 个单位,它们的方向可以不同. 对于(3),共线的单位向量方向可能相同或相反. 对于(4),与 $\boldsymbol{a}$ 共线的单位向量有两个:$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

例2 判断下列命题的正误:

(1)若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线;

(2)若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角;

(3)若向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线,则 A,B,C,D 四点一定共线;

(4)长度相等且方向相反的两个向量不一定是平行向量.

解:(1)正确,(2),(3),(4)不正确.

说明 必须注意两个向量共线与两条线段共线不同. 两个平行向量与两条平行线段是不同的. 因为两个平行向量可以移到同一条直线上去.

例3 下列各情形中,向量的终点的集合构成什么图形?

(1)把所有单位向量的起点平移到同一点 O;

(2)把平行于某一直线的所有单位向量的起点平移到同一点;

(3)把平行于某一直线的所有向量的起点平移到同一点.

解:(1)以 O 为圆心的单位圆;(2)两个点;(3)与已知直线平行的一条直线.

说明 方向相同或相反的向量都可以平移到同一条直线上.

例4 如图 1 - 11,向量 $\boldsymbol{a}$ 的长为 5 个单位,方向与 x 轴的正方向成 60°角,向量 $\boldsymbol{b}$ 的长为 4 个单位,方向与 x 轴的负方向相同,试求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的长度与方向.

解析 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形 $OADB$，则 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

在 $\triangle OBD$ 中，由余弦定理得

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\overrightarrow{OD}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2-2|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\cos 60^\circ$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ=5^2+4^2-2\times 5\times 4\times\frac{1}{2}=21$$

$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{21}$

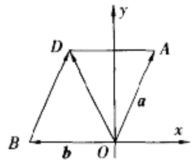

图 1 - 11

又 $\cos\angle BOD=\dfrac{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2}{2|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{21+16-25}{2\sqrt{21}\times 4}$

$$=\frac{3}{2\sqrt{21}}\approx 0.3273,$$

$\therefore \angle BOD\approx 70^\circ 54'$，$\angle xOD\approx 109^\circ 6'$.

因此 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的长为 $\sqrt{21}$ 个单位，方向与 x 轴的正方向成 $109^\circ 6'$ 的角.

说明 确定向量的因素是长度和方向. 现阶段没有介绍坐标，一般由向量与 x 轴正方向所成的角来确定方向.

例 5 如图 1 - 12，如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足条件 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，它们是否一定会构成三角形？如果能，写出 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 还要满足的条件.

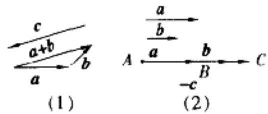

图 1 - 12

解析 如图 1 - 12 (1)，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 能构成三角形. 如图 1 - 12(2)，不能构成三角形.

由图 1 - 12(1) 知 $\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，而且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线.

由图 1 - 12(2) 知 $\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共线，或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中有零向量.

$\therefore$ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 不一定构成三角形. 若构成三角形，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 必须不共线.

说明 能组成封闭图形的若干个向量的和为 $\boldsymbol{0}$(这些向量要首尾相接).

例 6 表示方向相同或相反的向量的有向线段能否在同一条直线上？如果它们的起点相同，那么它们的终点位置如何？

解析 一定能在同一条直线上，因为它们平行，平行的自由向量可以平移至同一条直线上.

当向量相等时，终点重合；当两个向量或几个向量不相等时，其终点不重合.

说明 有向线段是由起点和终点的相对位置决定的. 由于是平行移动，所以起点动，则终点也动，起点不动，则终点也不动.

例 7 化简：

(1) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}$；(2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$；(3) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$.

(1) **解法一：** $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$.

解法二：$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO})+\overrightarrow{OM}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{AB}$.

(2)**解法一**：$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}$.

解法二：$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

(3)**解法一**：$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$.

解法二：$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\mathbf{0}$.

解法三：$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\mathbf{0}$.

说明 (1)根据向量减法的定义，向量的加法、减法可以统一成加法，那么减法也符合相应的运算律. 如：

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}=(-\boldsymbol{b})-(-\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$；

$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$；

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$.

(2)三个或三个以上向量的求和法则，可根据两个向量的求和法则推广如下：

已知向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，在平面内任取一点 O，作$\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，$\overrightarrow{A_2A_3}=\boldsymbol{a}_3,\cdots,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，则向量$\overrightarrow{OA_n}$就是$n$个向量的和，即

$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{OA_n}$.

(3)向量的加法与减法运算，有时要去括号重新组合，有时要适当添括号.

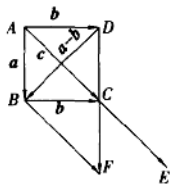

图 1 - 13

例 8 如图1 - 13，已知正方形$ABCD$的边长等于1，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$. 求作向量：(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；(2)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

解析 (1)由已知得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，又$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，

∴ 延长AC到E，使$|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{AC}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AE}$，$|\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{2}$.

(2)作$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}$，则$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DF}$，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{DF}$，且$|\overrightarrow{DF}|=2|\boldsymbol{a}|=2$.

说明 对于 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，只须按照向量减法的三角形法则作图. 另外，对于不共线向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，有$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. 若$A$，$B$，$C$三点共线，也有$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

例 9 已知任意四边形$ABCD$，E为AD中点，F为BC中点.

求证：$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

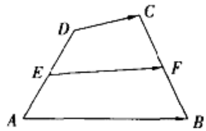

图 1 - 14

证法一：如图 1 - 14，$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\mathbf{0}$，

$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\mathbf{0}$，

$\therefore\ \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$，

两式相加得　$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BF}$

$\because\ E,F$分别为AD,BC的中点，

$\therefore\ \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BF}=\mathbf{0}$，

$\therefore\ 2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$，$\therefore\ \overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

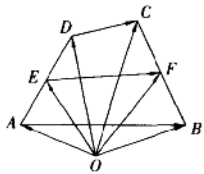

图 1 - 15

证法二：在平面内取点 O，作$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$（如图1 - 15）.

$\because\ E,F$分别为AD,BC的中点，

$\therefore\ \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})$，$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

又$\because\ \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}$，

$\therefore\ \overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}[(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})]=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

说明　(1)证法一通过两个封闭图形得出$\overrightarrow{EF}$，相加得出结论．(2)证法二把向量$\overrightarrow{EF}$放在$\triangle OEF$中，应用三角形法则得出$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{OE}$和$\overrightarrow{OF}$的关系，在$\triangle OAD$和$\triangle OBC$中得出$\overrightarrow{OE}$与$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}$的关系和$\overrightarrow{OF}$与$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}$的关系，然后根据$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$进行等式变形得出结论．(3)在学习向量的坐标运算后，也可用坐标运算完成本题的证明.

例 10　用向量方法证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

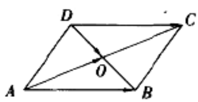

图 1 - 16

证明：设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于 O 点，且互相平分，如图1 - 16．从图中可以看出

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC}$

因此，$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$，且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，即四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

例 11　已知互不共线的三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$，试证明顺次将它们的终点与起点联结而成一个三角形的充要条件是它们的和是零向量.

证明：如图 1 - 17.