数学物理方法

习题解答

数学物理方法习题解答

斯颂乐 徐世良 高永椿
张官南 张立志
编

天津科学技术出版社

数学物理方法习题解答

斯颂乐　徐世良　高永椿
张宫南　　　　　张立志　编

*

天津科学技术出版社出版
天津市赤峰道124号
天津市蓟县印刷厂印刷
天津市新华书店发行

*

开本 850×1168毫米 1/32 印张 15 1/2 字数 368,000
一九八二年十月第一版
一九八二年十月第一次印刷
印数：1—28,500
统一书号：13212·42　定价：1.90元

前　言

"数学物理方法"是物理类专业的重要基础课程，它不仅为后继课程研究有关的数学物理问题作准备，也为实际工作中遇到的数学物理问题的求解提供基础。为了掌握这门课程中解决问题的方法，在学习过程中解算一定数量的习题是至关紧要的。

斯颂乐、徐世良、高永椿、张官南、张立志等同志将我编写的《数学物理方法》（第二版）的习题一一解答出来，有的习题还有几种解法，以资比较，并对整个题解进行了反复的修订。我认为这样一份题解可以起如下几方面的作用：

担任这门课程的老师，在给学生布置习题作业之前，需要先解算大量的习题，然后从中挑选适当的习题布置给学生，而《数学物理方法》习题的解算往往是很费时间的。《题解》可以节约任课老师挑选习题的时间，让他们把精力用于更好地提高教学质量。

学习这门课程的大学生或自修这门课程的读者，在独立思考和独立解算基础上，可以与《题解》进行比较，以总结自己解法的优缺点。如果某些习题虽经反复思考犹有困难，那么，从《题解》可以找出困难的症结所在，这就前进了一步。但是，这里需要强调的是独立思考，切切不可依赖《题解》，依赖《题解》对于学习是有害无益的。

实际工作者遇到有关数学物理问题时也可能从《题解》中取得某些借鉴。

原书由于编写时间十分仓促，习题答案有某些不妥之处，

解题时已作了订正。

在《数学物理方法习题解答》行将出版之际，天津科学技术出版社的编辑同志要我写个简短的前言，我就把上面的想法写了出来，以就教于各方人士。

梁 昆 森

一九八一年元月

内 容 提 要

本书对梁昆淼教授所编《数学物理方法》(第二版)中的全部习题作出了解答。内容分复变函数论、傅里叶级数和积分、数学物理方程三个部份，共十七章包括习题约四百条，有些习题列出了多种解法。

本书是配合综合大学、高等师范院校物理类各专业数学物理方法课程的教学用书，也可为工科院校有关专业的工程数学课程所选用，对于有关科学技术工作者也有一定的参考价值。

目　　录

第一篇　复变函数论

第二篇　傅里叶级数和积分

第三篇　数学物理方程

第一篇　复变函数论

第一章　复变函数

§1. 复数与复数运算

1.下列式子在复数平面上各具有怎样的意义？

（1）$|z|\leqslant 2$.

解一：$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 2$，

或　$x^2+y^2\leqslant 4$.

这是以原点为圆心而半径为2的圆及其内部.

解二：按照模的几何意义，$|z|$是复数$z=x+iy$与原点间的距离，若此距离总是$\leqslant 2$，则即表示以原点为圆心而半径为2的圆及其内部.

（2）$|z-a|=|z-b|$（a、b为复常数）.

解一：设$z=x+iy$，$a=a_1+ia_2$，$b=b_1+ib_2$；

$$|z-a|=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2},$$

$$|z-b|=\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2},$$

于是

$$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2=(x-b_1)^2+(y-b_2)^2,$$

即　$$(2y-a_2-b_2)(b_2-a_2)=(2x-a_1-b_1)(a_1-b_1)$$

亦即

$$\frac{y-\frac{a_2+b_2}{2}}{x-\frac{a_1+b_1}{2}}=\frac{a_1-b_1}{b_2-a_2}.$$

这是一条直线，是一条过点 a 和点 b 连线的中点$\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$且与该连线垂直的直线.

解二：等式的几何意义是，点 z 到定点 a 和点 b 的距离相等的各点的轨迹，即表示点 a 和点 b 的连线的垂直平分线.

（3）$\mathrm{Re}z>\frac{1}{2}$.

解：设 $z=x+iy$，则 $\mathrm{Re}z=x$，故原式为 $x>\frac{1}{2}$，它表示 $x>\frac{1}{2}$ 的半平面，即直线 $x=\frac{1}{2}$ 右边的区域（不包括该直线）.

（4）$|z|+\mathrm{Re}z\leqslant 1$.

解：设 $z=x+iy$，则原式即 $x^2+y^2\leqslant(1-x)^2$，亦即 $y^2\leqslant 1-2x$，它表示抛物线 $y^2=1-2x$ 及其内部.

（5）$\alpha<\arg z<\beta, a<\mathrm{Re}z<b$（$\alpha$、$\beta$、$a$ 和 b 为实常数）.

解：注意到 $\arg z=\varphi$，$\mathrm{Re}z=x$，则原二式

即
$$\begin{cases}\alpha<\varphi<\beta,\\ a<x<b.\end{cases}$$

为两直线 $x=a$、$x=b$ 和两射线 $\varphi=\alpha$、$\varphi=\beta$ 所围成的区域（不包括边界）.

（6）$0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$.

解：因为 $\frac{z-i}{z+i}=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}$

$$= \frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{[x+i(y+1)][x-i(y+1)]}$$

$$= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$$

$$\equiv X+iY = Z.$$

所以，原式即 $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$．如以X轴为实轴，Y轴为虚轴，上式在复平面Z上表示由射线 $\Phi=0$ 和$\Phi=\frac{\pi}{4}$所围成的区域（不包括射线本身），这就意味着要求$X>0$和$Y>0$，

即要求 $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}>0$ 和$\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}>0$，

亦即

$$\begin{cases} x<0, \\ x^2+y^2-1>0. \end{cases} \qquad (1)$$

又由$0<\arg Z<\frac{\pi}{4}$得 $0<\mathrm{arctg}(Y/X)<\frac{\pi}{4}$，即

$$0<\mathrm{arctg}\left(\frac{-2x}{x^2+y^2-1}\right)<\frac{\pi}{4},$$

亦即 $0<\frac{-2x}{x^2+y^2-1}<1$，注意到(1)式，

则

$$\begin{cases} -2x>0, \\ -2x<x^2+y^2-1. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x<0, \\ x^2+y^2+2x-1>0. \end{cases} \qquad (2)$$

在$x<0$的条件下，凡满足$x^2+y^2+2x-1>0$的点必定也满足$x^2+y^2-1>0$．所以，(1)式无需单独提出，而(2)式表示复平面上的左半平面$x<0$，但除去圆周$(x+1)^2+y^2=2$及其内部（图1-1）．

注意：应排除

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + y^2 - 1 < 0; \end{cases}$$

及$(x+1)^2 + y^2 < 2$

$\Big($这相当于$X < 0, Y < 0$；

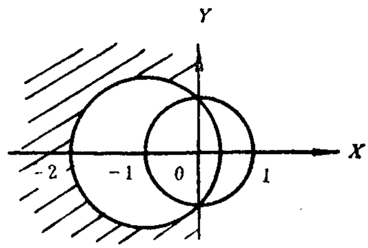

图 1-1

即$\pi < \Phi < \dfrac{5}{4}\pi$，$\pi < \arg\dfrac{z-i}{z+i} < \dfrac{5}{4}\pi\Big)$这个解．

（7）$\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1$.

解：$\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = \left|\dfrac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}\right|$

$$= \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} \leqslant 1,$$

即 $(x-1)^2 + y^2 \leqslant (x+1)^2 + y^2$,

亦即$0 \leqslant x$，这表示连同Y轴在内的右半平面．

（8）$\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = 2$.

解：$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$,

故 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{x}{x^2+y^2} = 2, 2x^2 + 2y^2 = x$,

即 $\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{16}$.

这是中心在$\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$而半径为$\dfrac{1}{4}$的圆周．

（9）$\mathrm{Re}z^2 = a^2$（a是实常数）．

解：$z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + i\cdot 2xy$,

故$\mathrm{Re}z^2 = x^2 - y^2$，则原式即为

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

此轨迹为双曲线$x^2 - y^2 = a^2$.

（10） $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

解：这是一个恒等式，对于复平面上任意的z_1和z_2都成立，因为

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \\ &\quad + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 \\ &= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.\end{aligned}$$

它表示平行四边形对角线的平方和等于两邻边平方和的两倍.

此外，如把z_1和z_2表示成复平面上的矢量，那么z_1和z_2的加减运算与相应的矢量的加减运算（平行四边形法则）是相同的，这可由图1-2清楚地看出.

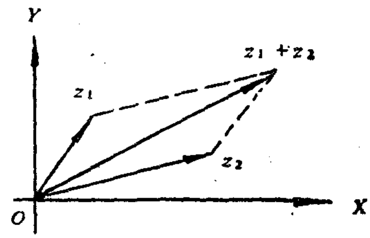

图 1-2

2.把下列复数用代数式、三角式和指数式几种形式表示出来.

（1） i.

解：i本身即为代数式，此时在$z = x + iy$中，$x = 0$、$y = 1$；

三角式：$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{argtg}\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2},$$

所以 $z = i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$;

指数式：$z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

（2）-1。

解：-1本身即为代数式；

三角式：$z=\cos\pi+i\sin\pi$；

指数式：$z=e^{i\pi}$。

（3）$1+i\sqrt{3}$。

解：$z=1+i\sqrt{3}$本身即为代数式；

三角式：$\rho=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$，

所以 $$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

指数式：$z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$。

（4）$1-\cos\alpha+i\sin\alpha$（α是实常数）。

解：$z=(1-\cos\alpha)+i\sin\alpha$本身即为代数式；

三角式：$\rho=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{\alpha}{2},$$

在主值范围内 $\varphi=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$ $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$，所以

$$z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

或 $$z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$$

$(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$；

指数式：$z=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$，

或 $$z=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}.$$

（5）z^3.

解：代数式：$z^3=(x+iy)^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$

三角式：$z^3=\rho^3(\cos3\varphi+i\sin3\varphi)$，

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$；

指数式：$z^3=\rho^3e^{i3\varphi}$.

（6）e^{1+i}.

解：指数式即为$z=e^{1+i}=e\cdot e^i$，显然，其中$\rho=e$，$\varphi=1$；

三角式：$z=e(\cos1+i\sin1)$；

代数式：$z=e\cos1+ie\sin1$.

（7）$\frac{1-i}{1+i}$.

解：代数式：$z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{1}{2}(1-i)^2=-i$.

三角式：因$\rho=1,\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{0}\right)=\frac{3}{2}\pi$，所以

$$z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2};$$

指数式：$z=e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

3.计算下列数值（a、b和φ为实常数）.

（1）$\sqrt{a+ib}$.

解：先化$a+ib$为三角式

$$a+ib=\sqrt{a^2+b^2}\ (\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

其中 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，于是

$$\begin{aligned}\sqrt{a+ib}&=\sqrt[4]{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\\&=\sqrt[4]{a^2+b^2}\left[\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)}\right.\\&\quad\left.+i\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)}\ \right]\\&=\sqrt[4]{a^2+b^2}\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}\right.\\&\quad\left.+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}\right]\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}\right.\\&\quad\left.+i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\ \right).\end{aligned}$$

（2）$\sqrt[3]{i}$.

解：因 $i=1\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]$,

所以

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{i}&=\sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right.\right.\\&\quad\left.\left.+\frac{2}{3}n\pi\right)\right],\end{aligned}$$

或 $$\sqrt[3]{i}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}n\pi\right)}\quad(n=0,1,2).$$

(3) i^i.

解：因 $i=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}$，所以

$$i^i=\left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right]^i=e^{-\frac{\pi}{2}-2n\pi}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

(4) $\sqrt[i]{i}$.

解：仿上题，

$$\sqrt[i]{i}=\left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right]^{\frac{1}{i}}=e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

(5) $\cos5\varphi$.

(6) $\sin5\varphi$.

解：由乘幂的公式

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi,$$

及二项式定理

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots$$

$$+\frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k}b^k+\cdots.$$

可知

$$\begin{aligned}\cos5\varphi+i\sin5\varphi&=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5\\&=\cos^5\varphi+i5\cos^4\varphi\sin\varphi\\&\quad-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi\\&\quad-i10\cos^2\varphi\sin^3\varphi\\&\quad+5\cos\varphi\sin^4\varphi+i\sin^5\varphi,\end{aligned}$$

比较等式两边的实部和虚部得

$$\cos5\varphi=\cos^6\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$

$$\sin5\varphi=5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi.$$

(7) $\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$.

(8) $\sin\varphi+\sin2\varphi+\sin3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$.