

697114

331

4282

数学物理方法

习题解答



697114

331

4282

4282

数学物理方法习题解答

斯颂乐 徐世良 高永椿 编
张官南 张立志

天津科学技术出版社

数学物理方法习题解答

斯颂乐 徐世良 高永椿 编
张官南 张立志

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津市蓟县印刷厂印刷

天津市新华书店发行

*

开本 850×1168毫米 1/32 印张 15 1/2 字数 368,000

一九八二年十月第一版

一九八二年十月第一次印刷

印数: 1—28,500

统一书号: 13212·42 定价: 1.90元

前 言

“数学物理方法”是物理类专业的重要基础课程，它不仅为后继课程研究有关的数学物理问题作准备，也为实际工作中遇到的数学物理问题的求解提供基础。为了掌握这门课程中解决问题的方法，在学习过程中解算一定数量的习题是至关重要的。

斯颂乐、徐世良、高永椿、张官南、张立志等同志将我编写的《数学物理方法》（第二版）的习题一一解答出来，有的习题还有几种解法，以资比较，并对整个题解进行了反复的修订。我认为这样一份题解可以起如下几方面的作用：

担任这门课程的老师，在给学生布置习题作业之前，需要先解算大量的习题，然后从中挑选适当的习题布置给学生，而《数学物理方法》习题的解算往往是很费时间的。《题解》可以节约任课老师挑选习题的时间，让他们把精力用于更好地提高教学质量。

学习这门课程的大学生或自修这门课程的读者，在独立思考 and 独立解算基础上，可以与《题解》进行比较，以总结自己解法的优缺点。如果某些习题虽经反复思考犹有困雄，那么，从《题解》可以找出困难的症结所在，这就前进了一步。但是，这里需要强调的是独立思考，切不可依赖《题解》，依赖《题解》对于学习是有害无益的。

实际工作者遇到有关数学物理问题时也可能从《题解》中取得某些借鉴。

原书由于编写时间十分仓促，习题答案有某些不妥之处，

解题时已作了订正。

在《数学物理方法习题解答》行将出版之际，天津科学技术出版社的编辑同志要我写个简短的前言，我就把上面的想法写了出来，以就教于各方人士。

梁 昆 森

一九八一年元月

内 容 提 要

本书对梁昆森教授所编《数学物理方法》(第二版)中的全部习题作出了解答。内容分复变函数论、傅里叶级数和积分、数学物理方程三个部份,共十七章包括习题约四百条,有些习题列出了多种解法。

本书是配合综合大学、高等师范院校物理类专业数学物理方法课程的教学用书,也可为工科院校有关专业的工程数学课程所选用,对于有关科学技术工作者也有一定的参考价值。

目 录

第一篇 复变函数论

第一章 复变函数	1
§ 1. 复数与复数运算 [1] § 2. 复变函数 [12] § 3. 多值函数 [18] § 4. 导数 (微商) [20] § 5. 解析函数 [23] § 6. 平面标量场 [32]	
第二章 复变函数的积分	41
§ 9. 科希公式 [41]	
第三章 幂级数展开	43
§ 11. 幂级数 [43] § 12. 泰勒级数 [49] § 14. 罗朗级数 [57] § 15. 奇点分类 [70]	
第四章 留数定理	72
§ 16. 留数定理 [72] § 17. 应用留数定理计算实变函数定积分 [79]	
第五章 拉普拉斯变换	100
§ 21. 拉普拉斯变换 [100] § 22. 拉普拉斯变换的反演 [104] § 23. 运算微积应用例 [114]	

第二篇 傅里叶级数和积分

第六章 傅里叶级数	126
§ 24. 周期函数的傅里叶级数 [126] § 25. 奇的和偶的周期函数 [145] § 26. 有限区间上的函数的傅里叶级数 [156] § 27. 复数形式的傅里叶级数 [168]	
第七章 傅里叶积分	172
§ 28. 非周期函数的傅里叶积分 [172] § 29. δ 函数和它的傅里	

叶积分〔180〕

第三篇 数学物理方程

第八章 定解问题	184
§ 31. 数学物理方程的导出〔184〕	
§ 32. 定解条件〔193〕	
§ 33. 二阶线性偏微分方程的分类〔197〕	
第九章 行波法	207
§ 34. 行波法〔207〕	
第十章 分离变数(傅里叶级数)法	223
§ 35. 分离变数法介绍〔223〕	
§ 36. 齐次的泛定方程(傅里叶级数法)〔227〕	
§ 37. 非齐次的泛定方程(傅里叶级数法)〔292〕	
第十一章 分离变数(傅里叶积分)法	308
§ 38. 齐次的泛定方程(傅里叶积分法)〔308〕	
§ 39. 非齐次的泛定方程(傅里叶积分法)〔323〕	
第十二章 二阶常微分方程级数解法 本征值问题	332
§ 40. 特殊函数常微分方程〔332〕	
§ 41. 常点邻域上的级数解法〔339〕	
§ 42. 正则奇点邻域上的级数解法〔346〕	
第十三章 球函数	363
§ 44. 轴对称球函数〔363〕	
§ 45. 一般的球函数〔384〕	
第十四章 柱函数	393
§ 46. 贝塞耳函数〔393〕	
§ 47. 球贝塞耳方程〔422〕	
§ 48. 路积分表示式与渐近公式〔433〕	
第十五章 数学物理方程的解的积分公式	438
§ 50. 格林公式应用于拉普拉斯方程和泊松方程〔438〕	
§ 51. 推广的格林公式及其应用〔445〕	
第十六章 拉普拉斯变换法	450
§ 52. 拉普拉斯变换法〔450〕	
第十七章 保角变换法	458
§ 54. 某些常用的保角变换〔458〕	
编后记	487

第一篇 复变函数论

第一章 复变函数

§1. 复数与复数运算

1. 下列式子在复数平面上各具有怎样的意义?

$$(1) |z| \leq 2.$$

$$\text{解一: } |z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \leq 2,$$

$$\text{或 } x^2+y^2 \leq 4.$$

这是以原点为圆心而半径为2的圆及其内部。

解二: 按照模的几何意义, $|z|$ 是复数 $z = x+iy$ 与原点间的距离, 若此距离总是 ≤ 2 , 则即表示以原点为圆心而半径为2的圆及其内部。

$$(2) |z-a| = |z-b| \quad (a, b \text{ 为复常数}).$$

$$\text{解一: 设 } z = x+iy, \quad a = a_1+ia_2, \quad b = b_1+ib_2;$$

$$|z-a| = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2},$$

$$|z-b| = \sqrt{(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2},$$

于是

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2,$$

$$\text{即 } (2y-a_2-b_2)(b_2-a_2) = (2x-a_1-b_1)(a_1-b_1)$$

亦即

$$\frac{y - \frac{a_2 + b_2}{2}}{x - \frac{a_1 + b_1}{2}} = \frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2}.$$

这是一条直线, 是一条过点 a 和点 b 连线的中点 $\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$ 且与该连线垂直的直线.

解二: 等式的几何意义是, 点 z 到定点 a 和点 b 的距离相等的各点的轨迹, 即表示点 a 和点 b 的连线的垂直平分线.

$$(3) \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}.$$

解: 设 $z = x + iy$, 则 $\operatorname{Re} z = x$, 故原式为 $x > \frac{1}{2}$, 它表示

$x > \frac{1}{2}$ 的半平面, 即直线 $x = \frac{1}{2}$ 右边的区域 (不包括该直线).

$$(4) |z| + \operatorname{Re} z \leq 1.$$

解: 设 $z = x + iy$, 则原式即 $x^2 + y^2 \leq (1 - x)^2$, 亦即 $y^2 \leq 1 - 2x$, 它表示抛物线 $y^2 = 1 - 2x$ 及其内部.

$$(5) \alpha < \arg z < \beta, a < \operatorname{Re} z < b \quad (\alpha, \beta, a \text{ 和 } b \text{ 为实常数}).$$

解: 注意到 $\arg z = \varphi$, $\operatorname{Re} z = x$, 则原二式

$$\text{即} \quad \begin{cases} \alpha < \varphi < \beta, \\ a < x < b. \end{cases}$$

为两直线 $x = a$ 、 $x = b$ 和两射线 $\varphi = \alpha$ 、 $\varphi = \beta$ 所围成的区域 (不包括边界).

$$(6) 0 < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{解: 因为 } \frac{z-i}{z+i} = \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{[x+i(y+1)][x-i(y+1)]} \\
&= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} + i \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} \\
&\equiv X+iY=Z.
\end{aligned}$$

所以，原式即 $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ 。如以 X 轴为实轴， Y 轴为虚轴，上式在复平面 Z 上表示由射线 $\Phi = 0$ 和 $\Phi = \frac{\pi}{4}$ 所围成的区域（不包括射线本身），这就意味着要求 $X > 0$ 和 $Y > 0$ ，即要求 $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} > 0$ 和 $\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} > 0$ ，

亦即

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + y^2 - 1 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

又由 $0 < \arg Z < \frac{\pi}{4}$ 得 $0 < \operatorname{arctg}(Y/X) < \frac{\pi}{4}$ ，即

$$0 < \operatorname{arctg}\left(\frac{-2x}{x^2+y^2-1}\right) < \frac{\pi}{4},$$

亦即 $0 < \frac{-2x}{x^2+y^2-1} < 1$ ，注意到 (1) 式，

则

$$\begin{cases} -2x > 0, \\ -2x < x^2 + y^2 - 1. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + y^2 + 2x - 1 > 0. \end{cases} \quad (2)$$

在 $x < 0$ 的条件下，凡满足 $x^2 + y^2 + 2x - 1 > 0$ 的点必定也满足 $x^2 + y^2 - 1 > 0$ 。所以，(1) 式无需单独提出，而 (2) 式表示复平面上的左半平面 $x < 0$ ，但除去圆周 $(x+1)^2 + y^2 = 2$ 及其内部（图1-1）。

注意：应排除

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + y^2 - 1 < 0, \end{cases}$$

$$\text{及 } (x+1)^2 + y^2 < 2$$

(这相当于 $X < 0, Y < 0$;

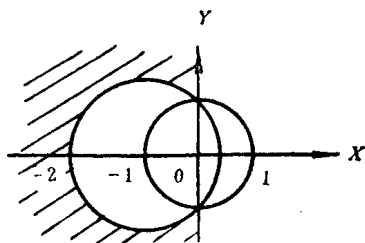


图 1-1

即 $\pi < \Phi < \frac{5}{4}\pi$, $\pi < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{5}{4}\pi$) 这个解。

$$(7) \quad \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \left| \frac{z-1}{z+1} \right| &= \left| \frac{(x-1) + iy}{(x+1) + iy} \right| \\ &= \frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \leq 1, \end{aligned}$$

$$\text{即 } (x-1)^2 + y^2 \leq (x+1)^2 + y^2,$$

亦即 $0 \leq x$, 这表示连同 Y 轴在内的右半平面。

$$(8) \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 2.$$

$$\text{解: } \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2},$$

$$\text{故 } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = 2, 2x^2 + 2y^2 = x,$$

$$\text{即 } \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{16}.$$

这是中心在 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ 而半径为 $\frac{1}{4}$ 的圆周。

$$(9) \quad \operatorname{Re} z^2 = a^2 \quad (a \text{ 是实常数}).$$

$$\text{解: } z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy,$$

故 $\operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2$, 则原式即为

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

此轨迹为双曲线 $x^2 - y^2 = a^2$.

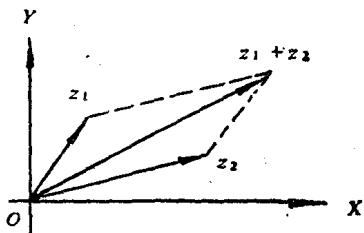
$$(10) |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

解：这是一个恒等式，对于复平面上任意的 z_1 和 z_2 都成立，因为

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \\ &\quad + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 \\ &= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2. \end{aligned}$$

它表示平行四边形对角线的平方和等于两邻边平方和的两倍。

此外，如把 z_1 和 z_2 表示成复平面上的矢量，那么 z_1 和 z_2 的加减运算与相应的矢量的加减运算（平行四边形法则）是相同的，



这可由图1-2清楚地看出。

图 1-2

2. 把下列复数用代数式、三角式和指数式几种形式表示出来。

(1) i .

解： i 本身即为代数式，此时在 $z = x + iy$ 中， $x = 0$ 、 $y = 1$ ；

三角式： $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ ，

$$\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \arctg\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } z = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2};$$

$$\text{指数式: } z = i = e^{i \frac{\pi}{2}}.$$

$$(2) -1.$$

解: -1 本身即为代数式,

$$\text{三角式: } z = \cos\pi + i\sin\pi,$$

$$\text{指数式: } z = e^{i\pi}.$$

$$(3) 1 + i\sqrt{3}.$$

解: $z = 1 + i\sqrt{3}$ 本身即为代数式,

$$\text{三角式: } \rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \varphi = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\text{指数式: } z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$(4) 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \quad (\alpha \text{ 是实常数}).$$

解: $z = (1 - \cos\alpha) + i\sin\alpha$ 本身即为代数式,

$$\text{三角式: } \rho = \sqrt{(1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{2(1 - \cos\alpha)}$$

$$= 2\sin \frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}, \quad \tg\varphi = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \ctg \frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{\alpha}{2},$$

在主值范围内 $\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$, 所以

$$z = 2\sin \frac{\alpha}{2} \left[\cos \left(\arctg \ctg \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\arctg \ctg \frac{\alpha}{2} \right) \right],$$

或
$$z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$$

 $(0 \leq \alpha \leq \pi),$

指数式: $z = 2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\arctg\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}},$

或
$$z = 2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}.$$

(5) $z^3.$

解: 代数式: $z^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$

三角式: $z^3 = \rho^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi),$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right);$

指数式: $z^3 = \rho^3 e^{i3\varphi}.$

(6) $e^{1+i}.$

解: 指数式即为 $z = e^{1+i} = e \cdot e^i$, 显然, 其中 $\rho = e, \varphi = 1;$

三角式: $z = e(\cos 1 + i\sin 1);$

代数式: $z = e\cos 1 + iesin 1.$

(7) $\frac{1-i}{1+i}.$

解: 代数式: $z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{1}{2}(1-i)^2 = -i.$

三角式: 因 $\rho = 1, \varphi = \arctg\left(\frac{-1}{0}\right) = \frac{3}{2}\pi$, 所以

$$z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2};$$

指数式: $z = e^{i\frac{3\pi}{2}}.$

3. 计算下列数值 (a, b 和 φ 为实常数) .

$$(1) \sqrt{a+ib}.$$

解：先化 $a+ib$ 为三角式

$$a+ib = \sqrt{a^2+b^2} (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

其中 $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 于是

$$\begin{aligned} \sqrt{a+ib} &= \sqrt[4]{a^2+b^2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ &= \sqrt[4]{a^2+b^2} \left[\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)} \right. \\ &\quad \left. + i \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)} \right] \\ &= \sqrt[4]{a^2+b^2} \left[\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)} \right. \\ &\quad \left. + i \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2} + a} \right. \\ &\quad \left. + i \sqrt{\sqrt{a^2+b^2} - a} \right). \end{aligned}$$

$$(2) \sqrt[3]{i}.$$

解：因 $i = 1 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \right]$,

所以

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{i} &= \sqrt[3]{1} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} n\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{3} n\pi \right) \right], \end{aligned}$$

$$\text{或 } \sqrt[3]{i} = e^{i \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} n\pi \right)} \quad (n = 0, 1, 2).$$

(3) i^i .

解: 因 $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}$, 所以

$$i^i = \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} \right]^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2n\pi} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

(4) $i\sqrt{i}$.

解: 仿上题,

$$i\sqrt{i} = \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} \right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

(5) $\cos 5\varphi$.

(6) $\sin 5\varphi$.

解: 由乘幂的公式

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

及二项式定理

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots \\ &\quad + \frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k}b^k + \dots. \end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned} \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 \\ &= \cos^5\varphi + i5\cos^4\varphi\sin\varphi \\ &\quad - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi \\ &\quad - i10\cos^2\varphi\sin^3\varphi \\ &\quad + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi, \end{aligned}$$

比较等式两边的实部和虚部得

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$

$$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi.$$

$$(7) \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos n\varphi.$$

$$(8) \sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \dots + \sin n\varphi.$$