常微分方程研究新论

赵临龙 著

西安地图出版社

常微分方程研究新论

赵临龙　著

陕西省教委专项科学研究基金资助项目常微分方程
可积性的专题研究（项目批准号 99JK092）

西安地图出版社

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程研究新论/赵临龙著. —西安：西安地图出版社. 2000.1

ISBN 7－80545－816－2

Ⅰ.常…　Ⅱ.赵…　Ⅲ.常微分方程—研究　Ⅳ.0715.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 68241 号

常微分方程研究新论

赵临龙　著

西安地图出版社出版发行

（西安市友谊东路 124 号　邮政编码 710054）

新华书店经销　陕西安康天宝印务公司印刷

850×1168 毫米　1/32 开本　6.5 印张　150 千字

2000 年 1 月第 1 版　　2000 年 1 月第 1 次印刷

印数 1－1000

ISBN 7－80545－816－2/O・10

定价：16.00 元

序

常微分方程是一门重要的数学基础课，在实际应用方面也是一种十分重要的方法。因此，受到人们普遍的重视，改革开放以来，我国在常微分方程理论与应用方面取得了飞速的发展，在它的许多研究方向上达到国际先进水平。但是，常微分方程作为师范院校的一门基础课，我们对这门课程的理论研究和教学研究，相对说研究成果较少。赵临龙同志在多年的教学实践与研究的基础上，对常微分方程可积性理论和常微分方程教学作了专题研究，经系统总结著成本书，书中内容大多是作者最新科研成果，其中 *Riccati* 方程的可积条件，曾在《科学通报》上发表，并被《*SCI*》收录，曾在全国学术会议上获奖，此成果不仅丰富了常微分方程的可积性理论，而且也丰富了师范院校常微分方程课程的教学内容。本书对师范院校的常微分方程课程的教学改革和建立突出师范性，并反映现代理论的常微分方程教材产生积极的影响。

俞 元 洪

1999 年 11 月于北京中关村

前　言

常微分方程不仅历史悠久，而且还是一门正在发展的普适性技术学科，广泛地应用于现实生活之中。尤其，它是当今“大众数学”观下的“问题解决”——数学建模的重要工具。因此，加强常微分方程理论研究，既有理论研究意义，又有实际应用价值。

另外，作为高师院校的常微分方程，它与中学的代数方程同属“方程”范畴，必然存在一定联系。因此，在常微分方程教学研究与实践中，采用高初结合方法，加强常微分方程的思想方法研究和寻求它与中学数学的关联，并逐步形成高观点下的初等数学，是师范院校常微分方程教学研究的重要课题之一。

我曾两度从高师院校毕业，先后在中学数学教学和中学数学教研岗位上，工作 9 年。1992 年秋从事高师数学教学与研究工作，1993 年春开始主讲数学教育专业的《常微分方程》课程和非数学教育专业的《高等数学》（含常微分方程）课程。这为高初结合，开展常微分方程教学研究，创造良好条件。

同时，在主持和承担陕西省教委专项科研基金资助项目（99*JK*092）和“陕西高等教育面向 21 世纪的师专高等数学课程教学内容和体系的研究与实践”课题（984037）中，对常微分方程可积性，作了较深入的讨论，所给出的一些可积类型，极大地丰富了常微分方程的可积理论。尤其所给出的《*Riccati* 方程新的可积条件》（科学通报，中文版 1998. 1；英文版 1998. 5），不仅被

美国《*SCI*》(1998. 1～6）收录和《中国数学文摘》(1999. 1）摘录，而且获1998年全国第二届青年常微分方程理论和应用学术会优秀奖（仅设此奖）和1999年陕西省教委科技进步三等奖，成果还在1999年微分方程及应用国际学术研讨会交流并收入会议论文集（美国出版）；另外，在常微分方程教学中，所构思的突出师范特色并反映现代理论成果的常微分方程课程体系框架，获我校1997～1999学年度优秀教学成果二等奖。因此，本书内容是作者近年来教学、科研成果的结晶。

全书分上下两篇，上篇从理论上研究常微分方程的可积性。共分六章，分别对*Riccati*方程、*Bernoulli*方程、一阶线性方程、二阶线性方程、三阶线性方程、高阶线性方程进行专题研究。下篇从教学角度，对常微分方程的教学开展讨论。分两章，分别对常微分方程的思想方法和它与中学数学的关联进行研究与实践。不仅丰富了常微分方程的可积理论，还充实了常微分方程的教学内容。因此，如果本书对在读大学生、中学数学教师及广大数学爱好者有所裨益的话，笔者将感到无限欣慰。

本书虽从1999年5月起笔，但整个基础工作却是从1993年的《常微分方程》教学开始，甚至是从1981年的中学数学教学开始，尽管教学实践与理论探索及书稿构思时间较长，毕竟常微分方程本身是一本正在发展的学科，加之，笔者至今未见到微分方程教学研究方面的专著。因此，本书难免存在不足，其目的是抛砖引玉，并敬请前辈、同行及读者批评指正。

赵临龙

1999年5月于安康

内 容 提 要

本书是作者在高师《常微分方程》课程教学研究与实践中，对常微分方程的可积性作了专题研究，以及对常微分方程的教学作了深入讨论。它是在系统研究常微分方程可积性理论基础之上，加强常微分方程观点下的中学数学的研究与实践，所取得的科研和教学成果，极大地丰富了常微分方程的可积理论和教学内容。它主要包括：*Riccati* 方程的可积性，*Bernoulli* 方程的可积性，一阶线性方程的可积性，二阶线性方程的可积性，三阶线性方程的可积性，高阶线性方程的可积性，常微分方程的思想方法，常微分方程与中学数学的关联。

本书可作为高等院校数学专业师生和中学数学教师以及有关科研人员的参考书。

目　　录

下篇　常微分方程的教学研究

上篇 常微分方程的可积性研究

300 多年前，牛顿(Newton,1642 ～ 1727) 和莱布尼兹(Leibniz,1646 ～ 1716) 所创立的微积分，是人类科学史上划时代的重大发现. 而微积分的产生与发展，和微分方程的求解密切相关.

19 世纪初，柯西(Cauchy,1789 ～ 1857) 证明了微分方程解的存在性和唯一性定理，奠定了微分方程的基本理论. 但在实际中，微分方程求解却遇到了越来越多的困难，人们逐渐明确了能用初等函数表达其解的微分方程是个别的. 然而，科学研究和实际问题又急需求解微分方程，这就促使人们从各方面研究微分方程的求解问题，形成了微分方程解析理论这一重要分支.

19 世纪下半叶，庞加莱(Poincare,1854 ～ 1912) 首先直接根据微分方程的结构来研究微分方程的属性，开始了微分方程的定性研究，后随李雅普诺夫(Lyaponov,1857 ～ 1918) 稳定性理论的创建，开辟了微分方程的研究新领域.

本篇着重在常微分方程解析理论方面，对常微分方程可积性作进一步研究，给出一些新的可积形式，以丰富常微分方程可积性理论.

第一章　*Riccati* 方程的可积性

1841 年，刘维尔（Liouville，1809 ～ 1882）证明了大多数微分方程不能用初等积分求解，但用初等求积分方法研究微分方程，至今仍不失其重要性. 这正如丁同仁[1] 教授指出："这是因为，一方面，能用初等积分法求解的方程虽属特殊类型，然而它们在实际应用中却显得很常见和重要；另一方面，掌握这些方法与技巧，也是学好本课程和其他数学分支的基本训练之一."

刘维尔指出，即使形式上很简单的黎卡提（Riccati，1676 ～ 1754）方程（例如 $y' = y^2 + x^2$），一般也不能用初等积分法求解. 但就像丁同仁[1] 指出："黎卡提方程在历史上和近代都有重要应用. 例如，它曾用于证明贝塞尔（Bessel，1784 ～ 1846）方程的解不是初等函数，另外它也出现在现代控制论和向量场分支理论的一些问题中."

§1.1　*Riccati* 方程的可积条件

1841 年，刘维尔[1] 证明了 *Riccati* 方程：

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad (PR \neq 0) \tag{1}$$

一般无初等积分解.

1938 年，*Mitrinovitch*[2]给出方程（1）的可积充分条件：

$$R = kPe^{2\int Q\mathrm{d}x} \quad (k \text{ 为常数}) \tag{2}$$

1982 年，李鸿祥[3]对广义 *Riccati* 方程：

$$y' = P(x)y^n + Q(x)y + R(x) \quad (n \neq 0、1, PR \neq 0) \tag{3}$$

给出一个可积充分条件：

$$R = kPe^{n\int Q\mathrm{d}x} \quad (k \text{ 为常数}) \tag{4}$$

因此，寻求 *Riccati* 方程可积新条件，是可积理论的重要课题.

定义 将方程（3）的系数所具有的关系：

$$I_1 = PR^{n-1} \tag{5.1}$$

$$I_2 = P'/P + (n-1)Q \tag{5.2}$$

$$\text{或 } I_2' = R'/R - Q \tag{5.2'}$$

称为方程（3）的不变量.

引理 方程（3）经线性变换：

$$y = \varphi(x)Z \qquad (\varphi(x) \neq 0) \tag{6}$$

化为方程：

$$Z' = A(x)Z^n + B(x)Z + C(x) \qquad (AC \neq 0) \tag{7}$$

的条件是：

$$I_1 = PR^{n-1} = AC^{n-1} \tag{8.1}$$

$$I_2 = P'/P + (n-1)Q = A'/A + (n-1)B \tag{8.2}$$

$$\text{或 } I_2' = R'/R - Q = C'/C - B \tag{8.2'}$$

证明 方程（3）经变换（6），化为方程：

$$Z' = P\varphi^{n-1}(x)Z^n + (Q - \varphi'(x)/\varphi(x))Z + R/\varphi(x) \tag{9}$$

结合（7），得：

$$A = P\varphi^{n-1}(x) \tag{10.1}$$

$$B = Q - \varphi'(x)/\varphi(x) \tag{10.2}$$

$$C = R/\varphi(x) \tag{10.3}$$

由（10.1）和（10.3）得：

$$I_1 = PR^{n-1} = AC^{n-1} \tag{11}$$

又由（10.1），得：

$$\varphi'(x)/\varphi(x)=1/(n-1)[(A/P)'/(A/P)]$$
$$=1/(n-1)[A'/A-P'/P] \quad (12)$$

结合（10.2），得：

$$B=Q-1/(n-1)[A'/A-P'/P] \quad (13)$$

即 $I_2=P'/P+(n-1)Q=A'/A+(n-1)B$ （14）

另外，由（11）得：

$$(A/P)'/(A/P)=[(R/C)^{n-1}]'/(R/C)^{n-1} \quad (12')$$

即 $A'/A-P'/P=(n-1)(R'/R-C'/C)$ （13′）

结合（12），得：

$$\varphi'(x)/\varphi(x)=R'/R-C'/C \quad (14')$$

由（10.2）得到不变量（8.2）的等价关系：

$$I_2'=R'/R-Q=C'/C-B \quad (15')$$

反之，当（8.1）和（8.2）（或（8.2′））成立，即（11）和（14）（或（15′））成立．在变换（6）下，（11）和（14）（或（15′））等价于（10.1）、（10.2）、（10.3），故方程（3）经变换（6）化成方程（7）．

现在方程(7)中，若系数具有“纯公因式”形式：$A(x)=\alpha D(x)$，$B(x)=\beta D(x)$，$C(x)=\gamma D(x)$（α、β、γ 为常数），则方程（7）有积分形式：

$$\int\frac{\mathrm{d}Z}{\alpha Z^n+\beta Z+\gamma}=\int D\mathrm{d}x \quad (15)$$

此时，方程（3）可积充分条件是：

$$I_1=PR^{n-1}=\alpha\gamma^{n-1}D^n \quad (16.1)$$

$$I_2=P'/P+(n-1)Q=D'/D+(n-1)\beta D \quad (16.2)$$

或 $I_2'=R'/R-Q=D'/D-\beta D$ （16.2′）

定理 1 对方程（3），若存在常数 k、β 及函数 $D(x)\neq 0$，满足：

$$R = kPe^{n\int(Q-\beta D)\mathrm{d}x} \quad (k\ 为常数) \tag{17}$$

则方程（3）可积.

证明 由（16.2′），得：

$$R = k_1De^{\int(Q-\beta D)\mathrm{d}x} \quad (k_1\ 为常数) \tag{18}$$

结合（16.1），得：

$$\begin{aligned} Pe^{n\int(Q-\beta D)\mathrm{d}x} &= P(k_1{}^{-1}D^{-1}R)^n \\ &= k_1{}^{-n}PR^nD^{-n} \\ &= k_1{}^{-n}\alpha\gamma^{n-1}R \end{aligned} \tag{19}$$

于是，有结论（17）.

显然，当 $\beta=0$，（17）为（4）. 即此可积充分条件是（4）的推广.[4]~[5]

定理 2 对方程（3），若存在常数 a、b、c，满足：

$$R = \frac{aPe^{n\int Q\mathrm{d}x}}{\left[b\int e^{(n-1)\int Q\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right]^{\frac{n}{(n-1)}}} \quad (a、b、c\ 为常数) \tag{20}$$

则方程（3）可积.

证明 由（16.2），得：

$$Pe^{(n-1)\int Q\mathrm{d}x} = k_1De^{(n-1)\beta\int D\mathrm{d}x} \quad (k_1\ 为常数) \tag{21}$$

对（21）再积分，得：

$$b\int Pe^{(n-1)\int Q\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c = e^{(n-1)\beta\int D\mathrm{d}x} \quad (b、c\ 为常数) \tag{22}$$

结合（17），得结论（20）.

显然，当 $b=0$，$c=1$，（20）为（4）. 即此可积充分条件是（4）的推广.

另外，对于方程（1）的可积充分条件，是非常丰富的．现仍用 *Riccati* 方程的不变量探讨方程（1）的可积条件.

方程（1）的不变量关系是：

$$I_1 = PR \tag{23.1}$$

$$I_2 = P'/P + Q \tag{23.2}$$

$$\text{或 } I_2' = R'/R - Q \tag{23.2'}$$

对（23.2′），只须对方程（1）作变换 $y=\dfrac{1}{Z}$，得：

$$Z' = -RZ^2 - QZ - P \tag{24}$$

于是，有（23.2）的等价关系（23.2′）.

现对方程（1），作变换：

$$y = \frac{a(x)Z + b(x)}{c(x)Z + \mathrm{d}(x)} \quad (ad \neq bc) \tag{25}$$

1° 当 $c(x)=0, d(x)\neq 0$，变换为：

$$y = y_0 + A(x)Z, A(x) = \frac{a(x)}{d(x)}, \quad y_0 = \frac{b(x)}{d(x)} \tag{26}$$

2° 当 $c(x)\neq 0, d(x)=0$，变换为：

$$y = y_0 + \frac{A(x)}{Z}, A(x) = \frac{b(x)}{c(x)}, \quad y_0 = \frac{a(x)}{c(x)} \tag{27}$$

3° 当 $c(x)\neq 0, d(x)\neq 0$，变换为：

$$y = y_0 + \frac{A(x)}{Z + B(x)}, A(x) = \frac{bc - ad}{c^2}, B(x) = \frac{d}{c}, y_0 = \frac{a}{c} \tag{28}$$

若记方程（1）为：

$$L[y] = -y' + Py^2 + Qy + R \tag{29}$$

则有可积充分条件.

定理 3 对方程(1)，若存在常数 a、b、c 及非特解函数 $y_0(x)$，则方程（1）可积的充分条件是：

$$L[y_0]=\frac{aPe^{2\int(Q+2y_0P)\mathrm{d}x}}{[b\int Pe^{\int(Q+2y_0P)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c]^2} \tag{30}$$

证明 方程（1）经变换（26），化为方程：

$$Z'=APZ^2+(-A'/A+2y_0P+Q)Z+L[y_0]/A \tag{31}$$

于是，由引理，得方程（31）的可积充分条件：

$$I_1=PL[y_0]=\alpha\gamma D^2 \tag{32.1}$$

$$I_2=P'/P+2y_0P+Q=D'/D+\beta D \tag{32.2}$$

或 $$I_2'=\frac{L'[y_0]}{L[y_0]}-2y_0P-Q=D'/D-\beta D \tag{32.2'}$$

现由（32.2′），得：

$$L[y_0]=kDe^{\int(Q+2y_0P-\beta D)\mathrm{d}x} \quad (k\text{ 为常数}) \tag{33}$$

结合（32.1），得：

$$L[y_0]=k_1Pe^{2\int(Q+2y_0P-\beta D)\mathrm{d}x} \quad (k_1\text{ 为常数}) \tag{34}$$

又由（32.2），得：

$$Pe^{\int(Q+2y_0P)\mathrm{d}x}=k_2De^{\int\beta D\mathrm{d}x} \quad (k_2\text{ 为常数}) \tag{35}$$

即 $$b\int Pe^{\int(Q+2y_0P)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c=e^{\int\beta D\mathrm{d}x} \quad (b、c\text{ 为常数}) \tag{36}$$

结合（34），得结论（30）.

推论 [6] 对方程(1)，若存在常数 k、β 及函数 $D(x)\neq 0$ 和非特解 $y_0(x)$，满足：

$$L[y_0]=kPe^{2\int(Q+2y_0P+\beta D)\mathrm{d}x} \tag{37}$$

则方程（1）可积.

显然，取 $y_0=0$，则 $L[y_0]=R$. 即(37)为(2)，故(37)是它的一个推广.[7]~[8]

另外，对方程（1），作变换（27）. 变换（27）可视为由变换