高等学校教学用書

普通数学分析教程补篇

盖·伊·德林費尔特著

人民教育出版社

高等学校教学用书

普通数学分析教程补篇

菲·伊·德林费尔特著
張明樑譯

人民教育出版社

本书根据苏联哈尔科夫大学出版社(Издательство Харьковского Государственного университета)出版的盖·伊·德林费尔特(Г. И. Дринфельд)著"Дополнения к общему курсу математического анализа" 1958年版譯出。书中討論了一些在普通数学分析課程中不能詳細叙述的問題，例如：連續而无处可微的函数，函数按冪級数展开的各种方法的論証，条件极值的理論，化二次型至主軸問題看作极值問題，富氏級数的一些特异性质，二項微分式不能用初等函数来积分的証明等。

原书由苏联烏克兰苏維埃社会主义共和国高等教育部批准为綜合大学数学专业教学参考书。

本书供綜合大学或师范学院数学专业学生課外閱讀。

普通数学分析教程补篇

盖·伊·德林費尔特著

張 明 樑 譯

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第2号)

京华印书局印装 新华书店发行

統一书号 13010·796 开本 850×1168 1/32 印張 4 1/16

字数 94,000 印数 0001—6000 定价(6)¥0.42

1960年6月第1版 1960年6月北京第1次印刷

序

本书汇集了大学数学分析教程的某些补充材料。这些材料分散在各种书籍与論文内，而不是都能为学生接受的。所搜集的补充材料基本上属于大学教程中既不能避而不談，但又不可能在講授中詳細研討的問題。

作者認为，出版一部篇幅很大的补充教材是不明智的。很可能，把本书收集的某些題目換成另外一些題目会更妥善些。关于这方面的任何批評以及有关叙述方面的意見，作者都将表示感激。

作者采納了 H. H. 阿希澤尔，Л. Я. 吉尔許瓦尔特，Н. С. 郎达科夫的一系列珍貴的建議，謹此表示衷心的感謝。

目　录

第六章

第一章

§1. 在閉区間上取得最大值和最小值之間一切中間值的处处間断的函数

連續函数具有熟知的性質：保号性，在閉区間上的有界性，最大值和最小值的存在与可达到性。但容易理解，这些性質(无論按个别的說，或按全体来說)都不是仅为連續的函数所特有。也不难构造一个在閉区間$[a, b]$的个别点上間断而取得$f(a)$和$f(b)$的一切中間值的函数的例子。例如，下面的函数

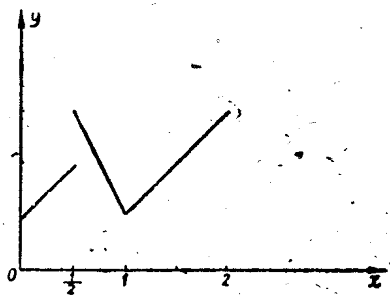

图 1

$$y=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}; \\ -2x+\dfrac{5}{2}, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1; \\ x-\dfrac{1}{2}, & 1\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$$

便是一例。

它的图形描繪如图1所示。

更难想象的是：閉区間$[a, b]$上处处間断的函数是否也能具有上面所提及的連續函数所有的性質(包括取得最大值和最小值之間一切中間值这一性質在內)。其实，这样的函数是存在的。

本节将提供相应例子的作法。

1. **函数$\omega(x)$的定义** 为确定起见，我們取閉区間$[0, 1]$。$[0,1]$中每一数值x可写成无限十进小数

$$x=0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$$

的形式。用 m 表示在数字 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中零的个数，并置

$$\omega(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}.$$

容易看出，在$[0,1]$上存在一些使函数 $\omega(x)$有定义的点，也有一些使 $\omega(x)$沒有定义的点。事实上，如果，比方說

$$x=0.010101\cdots,$$

那末，由 n 之为偶数或奇数分别得 $m=\frac{n}{2}$或$\frac{n+1}{2}$。在此两种情况下，都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\frac{1}{2},$$

于是 $\omega(x)=\frac{1}{2}$。

不难証明，函数 $\omega(x)$在每一有理点 r 皆有定义。实际上，若 r 为有理数，則可表为无穷循环小数

$$r=0.a_1a_2\cdots a_k(b_1\cdots b_l)$$

的形式(記住，有限十进小数可以看作循环节为 0 的循环小数)。

当

$$n=k+sl+p,\qquad s>0,\ 0\leqslant p<l$$

时，将有

$$m=m_1+sm_2+m_3,$$

其中 m_1 为数字 $a_1, \cdots, a_k$ 中零的个数；m_2 为数字 $b_1, \cdots, b_l$ 中零的个数；m_3 为数字 $b_1, \cdots, b_p$ 中零的个数。

这样一来，

$$\frac{m}{n}=\frac{m_1+sm_2+m_3}{k+sl+p},$$

又因当 $n\to\infty$ 时只有 $s\to\infty$，故而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\frac{m_2}{l}.$$

因此,

$$\omega(r)=\frac{m_2}{l}.$$

特别,如果 r 是一个有限十进小数,那末 $\omega(r)=1$。

再若,例如

$$x_1=0.1001001100001111000000001\cdots,$$

则当 $n=4,8,16,\cdots,2\cdot2^k,\cdots$时,有 $m=2,4,\cdots,2^k$, 而当 $n=6,12,24,\cdots,3\cdot2^k,\cdots$ 时有 $m=4,8,\cdots2\cdot2^k,\cdots$, 因之, 对 n 的第一个序列的数值来說, 有$\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$, 而对第二个却有$\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$。这就是說极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}$$

不存在,从而函数 $\omega(x)$在点 x_1 沒有定义。

2. 函数 $\omega(x)$的性質。

1°. 函数 $\omega(x)$是非負的。实际上,$\frac{m}{n}\geqslant0$,因之,如果存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}$,那末它是一个非負的数。

2°. 函数 $\omega(x)$是有界的。实际上,

$$0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant1,$$

所以,

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}\leqslant1.$$

3°. 函数 $\omega(x)$取得它的最大値(1)和最小値(0)。实际上,例如,在 $x=0.11\cdots$处 $\omega(x)=0$,而在 $x=0.22000\cdots$处 $\omega(x)=1$。

4°. 函数 $\omega(x)$取得 0 与 1 之間的一切中間値。实际上,設

$$0<l<1.$$

那末,总可以求得这样的一个有理数列

$$l_1, l_2, \cdots l_n, \cdots,$$

使得

$$\lim_{k\to\infty} l_k = l.$$

现在作无限十进小数

$$\bar{x} = 0.\alpha_{11}\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\cdots\alpha_{\nu1}\alpha_{\nu2}\cdots\alpha_{\nu\nu}\cdots,$$

使得数字組 $\alpha_{\nu1}, \alpha_{\nu2}, \cdots, \alpha_{\nu\nu}$ 中恰有$[\nu l_\nu]$个零(符号[A]，象通常一样，表示A的整数部分)。小数中第 n 位数字将属于某一个，設第 ν 个，数字組。那末

$$1+2+\cdots+(\nu-1) < n \leqslant 1+2+\cdots+\nu,$$

$$[l_1]+[2l_2]+\cdots+[(\nu-1)l_{\nu-1}] \leqslant m \leqslant [l_1]+[2l_2]+\cdots+[\nu l_\nu].$$

由是求得

$$\frac{[l_1]+[2l_2]+\cdots+[(\nu-1)l_{\nu-1}]}{1+2+\cdots+\nu} \leqslant \frac{m}{n} < \frac{[l_1]+[2l_2]+\cdots+[\nu l_\nu]}{1+2+\cdots+(\nu-1)}$$

根据施篤兹(Stolz)定理①，即"若当 $n\to\infty$ 时 $b_n\to\infty$，$b_{n+1}>b_n$，則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n},$$

要是右端的极限存在的話"，我們就有

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{[l_1]+[2l_2]+\cdots+[\nu l_\nu]}{1+2+\cdots+(\nu-1)} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{[(\nu+1)l_{\nu+1}]}{\nu} =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty}\left\{\frac{(\nu+1)l_{\nu+1}}{\nu} - \frac{s_\nu}{\nu}\right\} = \lim_{\nu\to\infty} l_{\nu+1} = l.$$

因为 $0\leqslant s_\nu<1$。

完全同样

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{[l_1]+[2l_2]+\cdots+[(\nu-1)l_{\nu-1}]}{1+2+\cdots+\nu} = l.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n} = l.$$

---

① 可参见Г.М.費赫金哥里茨著："微积分学教程"，第一卷第一分册，叶彦謙等譯，高等教育出版社，1959，59頁。

这样一来，

$$\omega(\bar{x})=l,$$

我們的論断就証明了。

5°. 函数 $\omega(x)$ 取值的重复性。函数 $\omega(x)$ 具有下列奇妙的性質：設在閉区間 $[0,1]$ 上某一确定点 ξ 处，$\omega(\xi)=a$ 或者沒有定义，那末，此时在閉区間 $[0,1]$ 的任何一点 $\bar{x}$ 的任意小邻域內皆可找到点 η，使其对应地有 $\omega(\eta)=a$ 或者在該点沒有定义。因之，函数无限次取得它的值并且 $\omega(x)$ 无限次沒有定义。事实上，設

$$\xi=0.\,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\cdots,$$

$$\bar{x}=0.\,\beta_1\beta_2\cdots\beta_k\cdots.$$

对于給定的 ε，我們取充分大的固定的 k，使得

$$\frac{1}{10^k}<\varepsilon.$$

置

$$\eta=0.\,\beta_1\beta_2\cdots\beta_k\alpha_{k+1}\cdots\alpha_n\cdots.$$

于是

$$|\eta-\bar{x}|=0.\,0\cdots0\gamma_1\gamma_2\cdots<\frac{1}{10^k}<\varepsilon.$$

同时，数 η 的十进小数表示中前 n 位数字間零的个数 m 与数 ξ 的十进小数表示中前 n 位数字間零的个数 m_1 之差不大于(固定的!) k。因此，或者

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{m_1}{n}$$

或者这两个极限都不存在，也就是說，$\omega(\eta)=\omega(\xi)$ 或者 $\omega(x)$ 的这两个函数值都不存在。

6°. 函数 $\omega(x)$ 在 $[0,1]$ 上的处处間断性。我們现在証明 $\omega(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处間断。在閉区間 $[0,1]$ 上任取一点 $\bar{x}$。若 $\omega(x)$ 在点 $\bar{x}$ 沒有定义，則 $\omega(x)$ 显然是在这一点間断的。如果 $\omega(\bar{x})=a$，$0\leqslant a\leqslant1$，那末一方面可求得这样一个固定的、正或負的数 α，使得

$$0 \leqslant a+\alpha \leqslant 1,$$

另一方面，根据函数 $\omega(x)$ 的性质 4°，可以求得这样一点 ξ，$0 \leqslant \xi \leqslant 1$，使 $\omega(\xi)=a+\alpha$。由于性质 5°，在点 $\bar{x}$ 随便多么小的邻域內，可求得 η，使 $\omega(\eta)=a+\alpha$。这样一来，就有 $|\bar{x}-\eta|<\delta$，其中 δ 为任意小，而同时，$\omega(\eta)-\omega(\bar{x})=\alpha$，其中 α 为固定的(有限数)。因此，$\bar{x}$ 是我們这函数的間断点。

附注：以我們的討論推出，函数 $\omega(x)$ 的振幅在随便多么小的区間上都是不小的。因此，即使在函数原来未定义的点上作了补充定义之后，仍和补充定义前一样，我們得不到連續函数。

§ 2. 連續的无处可微函数

在 1830 年前后，捷克学者波尔采諾[①] (Bolзано) 曾經指出，連續的无处可微函数是存在的。但是波尔采諾的手稿一直到 1920 年才被发現，而維尔斯脫拉斯(Weierstrass)于 1871 年找到的那个函数，長时期內算作在历史上第一个連續无处可微函数的例子。現今已有很多連續无处可微函数的例子。其中最簡单的是凡·德·瓦登(van der Waerden)的例子，下面就要詳細研討。

1. **波尔采諾函数**[②]。我們約定把如下五点的作图：

$$A(p,q),\quad C\left(p+\frac{\alpha}{4},\, q-\frac{\beta}{2}\right),\ D\left(p+\frac{\alpha}{2},\, q\right),\ E\left(p+\frac{3\alpha}{4},\, q+\frac{\beta}{2}\right),$$

$B(p+\alpha, q+\beta)$ 称做在 $A(p,q)$，$B(p+\alpha, q+\beta)$ 两点上的 B-运算。

---

① 譯者注：关于連續的无处可微函数方面的問题，还可参看閔嗣鶴："談一个制造处处不可微分的函数的方法"，数学通报，1955 年 7 月号；張景中、楊九高："利用二进小数构造一个連續不可微的函数"，数学通訊，1956 年 1 月号；以及 E. W. Hobson 等編："Squaring the Circle and Other Monographs" 一书中 A. H. Singh："The Theory and Construction of Non-differentiable Function" 一文。

② 关于波尔采諾与維尔斯脫拉斯函数，我們不准备作詳細的研究；而且也不来証明它們的不可微性。

容易驗証，C, D, E, B 位于同一条直綫上。

用 $B_0(x)$ 表示这样一个函数，它的图形是联結点 $A_{11}(0,0)$ 与 $A_{12}(1,1)$ 的直綫段。对这两点应用 B-运算得到点 $A_{21}(0,0)$，$A_{22}\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, $A_{23}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $A_{24}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $A_{25}(1,1)$，于是定义折綫 $A_{21}A_{22}\cdots A_{25}$ 为函数 $B_1(x)$，图 2a 上画着函数 $B_0(x)$ 和 $B_1(x)$ 的图

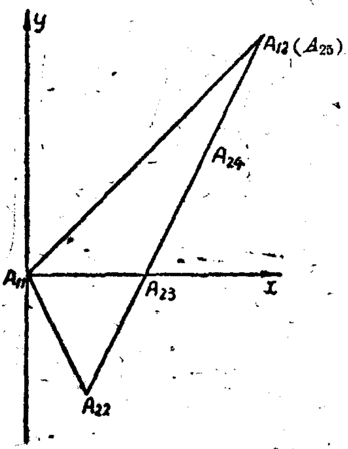

图 2a

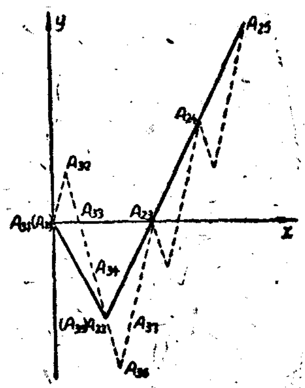

图 2б

形。在每一对点 A_{21}, A_{22}; A_{22}, A_{23}; $\cdots$ 中应用 B-运算得到点 A_{31} $(0,0)$, $A_{32}\left(\frac{1}{4^2}, \frac{1}{4}\right)$, $A_{33}\left(\frac{2}{4^2}, 0\right)$, $A_{34}\left(\frac{3}{4^2}, \frac{1}{4}\right)$, $A_{35}\left(\frac{4}{4^2}, -\frac{1}{2}\right)$, $A_{36}\left(\frac{5}{4^2}, -\frac{3}{4}\right)$, $A_{37}\left(\frac{6}{4^2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\cdots$，于是再以折綫 $A_{31}, A_{32}, \cdots$ 定义一函数 $B_2(x)$。图 2б 就是 $B_1(x)$ 和 $B_2(x)$ 的圖形。

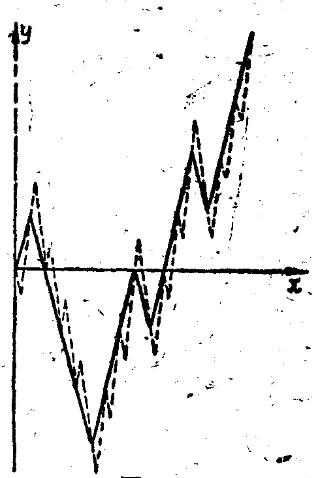

图 2в

継續这种手續，我們就得到函数 $B_n(x)$，它的图形是一折綫，它的頂

点的横坐标是 $0, \frac{1}{4^n}, \frac{2}{4^n}, \cdots, \frac{4^n-1}{4^n}; 1$。在图 2б 中描繪了函数 $B_2(x)$ 和 $B_3(x)$ 的图形。

考虑到，若 $x=\frac{k}{4^n}=\frac{l}{4^p}$，$p>n$，則 $B_n\left(\frac{k}{4^n}\right)=B_p\left(\frac{l}{4^p}\right)$（例如点 A_{22} 与 A_{35} 重合），故在下列 x 的諸值上：

$$
\begin{array}{c}
0,\ 1 \\
0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ 1 \\
0,\ \frac{1}{4^2},\ \frac{2}{4^2},\ \cdots,\ \frac{15}{4^2},\ 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\tag{1}
$$

亦卽在 $x=\frac{k}{4^n}(k=0,1,2,\cdots,4^n; n=0,1,2,\cdots)$ 处，我們可唯一地定义波尔采諾函数 $B(x)$，只須令

$$B\left(\frac{k}{4^n}\right)=B_n\left(\frac{k}{4^n}\right).$$

这样一来，函数 $B(x)$ 的图形通过一切折綫 $B_n(x)(n=0,1,2,\cdots)$ 的頂点。可以証明，任意的值 x，如它导于表格(1)中各值的話，总可以表为(1)中数列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \cdots$ 的极限，而且极限

$$\lim_{m\to\infty} B(\alpha_m)$$

存在。这个极限就取做 $B(x)$——在所討論的 x 上的函数值。因之，波尔采諾函数在全閉区間[0, 1]上均有定义。我們指出，此函数为連續但处处皆不可微。

此事之証明，并不繁复，可在 В. Ф. 别尔舍茹克（Бржечка）的論文中找到[“数学进展”（Успехи мат. наук）1949 年，第六卷，第二期]。

2. 維尔斯脫拉斯函数。此函数乃是由公式

$$W(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a^k \cos \pi b^k x$$

所定义，式中 $0<a<1$，b 为满足条件

$$ab \geqslant 1+\frac{3}{2}\pi$$

的一个整奇数，函数的連續性可从本章第 16 頁中所举的定理推得。

只須通过很簡单的方法，就可証明，$W(x)$ 是处处不可微的①［如見Э. 切蔡洛，代数分析和无穷小計算初等教科书，第二卷，补充（Чезаро, Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, Т. II, Прибавление）］。

3. 披阿諾（Peano）函数。② 考察 XOY 平面上的正方形 K

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

将它分成九个相等的正方形。如图 3a 所示，它們的編号是这样的：标号相邻的两个正方形有一公共边。这样作出的正方形叫做第一級正方形。将第一級的每一个正方形又分成九个第二級的正方形，且設法把属于同一个第一級正方形的諸第二級正方形編成

3	4	9
2	5	8
1	6	7

图 3a

3	4	9	1	6	7	3	4	9
2	5	8	2	5	8	2	5	8
1	6	7	3	4	9	1	6	7
9	4	3	7	6	1	9	4	3
8	5	2	8	5	2	8	5	2
7	6	1	9	4	3	7	6	1
3	4	9	1	6	7	3	4	9
2	5	8	2	5	8	2	5	8
1	6	7	3	4	9	1	6	7

图 3б

① 譯者注：見 С. 卡拉皆屋鐸利洛"实变数函数論"，武崇林譯，科学出版社，1957 488—492 頁。

② 从这里到第 12 頁有 * 号为止，完全轉載 В. 尼米茨基，М. 斯罗斯基和 А. 切尔卡沙夫（Немыцкий, Слудская, Черкасов［"数学分析教程（Курс математического анализа）"第一卷 1944］的叙述。

号碼 1, 2, …, 9 使标号相邻的两个正方形具有公共边，还要使得标号为 9 的第二級正方形与下一个标号的第一級正方形中标号为 1 的第二級正方形有公共边，这就是如图 3б 所表示的。

之后，将第二級的每一个正方形再分成九个第三級的正方形，且根据同一原則进行編号。这种手續可以无限止地进行下去，还要注意，第 n 級正方形的边長等于$\frac{1}{3^n}$。如果点 A 属于基本正方形 K，那末很明显，它至少属于一个第一級的正方形，也至少属于一个第二級的正方形，等等(如果点位于第 n 級正方形的某一条边綫上，那末它至少属于二个第 n 級的正方形)。

假如我們在基本正方形 K 上取相异的两点 A 和 B，那末，从某一个充分大的 n 开始，它們就将属于二个不同的第 n 級正方形。現在取属于基本正方形 K 的某一点 $A(x, y)$。設 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n, \cdots$ 依次为含有点 A 的第 $1, 2, \cdots, n, \cdots$ 級正方形的标号。每一个 σ_n 可取値 1, 2, …, 9 中的一个或者几个。因此，点 A 至少有一組数列 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n, \cdots$ 与之对应，并且反过来，每一个这样的数列也有正方形 K 中的一点，卽：如下正方形序列的公共点与之对应——标号为 σ_1 的第一級正方形，含在其內的标号为 σ_2 的第二級正方形，含在后者之內的标号为 σ_3 的第三級正方形，等等。同时，基本正方形 K 中不同的两点，有两个不同的序列与之对应。然而，正方形中的一点可以对应着二个不同的序列。例如，序列

$$2, 3, 5, 6, 1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots$$

$$2, 3, 5, 5, 9, 9, 9, \cdots, 9, \cdots$$

决定了正方形 K 中的同一点。事实上，根据以上所采用的正方形編号法，标号为 1 和 9 的第六級正方形有公共边，标号为 1 和 9 的第七級正方形也有公共边，等等。这些边的长度趋向于 0，所以，由第一个序列所确定的一切正方形的公共点与由第二个序列所确定的一切正方形的公共点是相重合的。現在考察閉区間 (图 4) I：

$$0 \leqslant t \leqslant 1.$$

我們将此閉区間分成相等的九份，把它們自左至右記上标号1，2，…，9，并称之为第一級的閉区間。把第一級的每一个閉区間再分成九个相等的第二級閉区間，它們又自左至右記上标号1，2，…，9，等等。閉区間 I 的每一点落在一个，最多为二个第一級的閉区間上，一个或二个第二級的閉区間上，等等。

这样一来，閉区間 I 的每一点 a 将至少对应一个数列 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n, \cdots, (\sigma_i = 1, 2, 3, \cdots, 9)$，反之，每一个这样的序列亦将对应綫閉区間第 I 上的某一点。

取属于閉区間 I 上的某一点 B。假使它不是某一 n 級閉区間的一个端点，那末它只对应一个唯一的序列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$。如果这一点是第 n 級閉区間的端点，那末它将对应二个序列，亦卽

1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, 1, 1, \cdots, 1, \cdots$

2) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n - 1, 9, 9, \cdots, 9, \cdots$

这就是說，对应于每一个属于閉区間 I 的点 B 皆可在正方形 K 上找到唯一的一点 A，它和閉区間上的 B 点一样，由相同的序列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ 或两个序列 1) 与 2) 所确定。

图 4

設閉区間上的点 B 有横坐标 t，而正方形的点 A 有坐标 x 和 y，于是由上述可見，数 $t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 对应于一个确定的数 x 和一个确定的数 y，亦卽我們有单値函数

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

現要証明，这两个函数是連續的，事实上，若取如此的二个値 t_1 和 t_2，使得 $|t_1 - t_2| < \frac{1}{9^n}$，那末，这就是說，它們落在同一个或相邻的