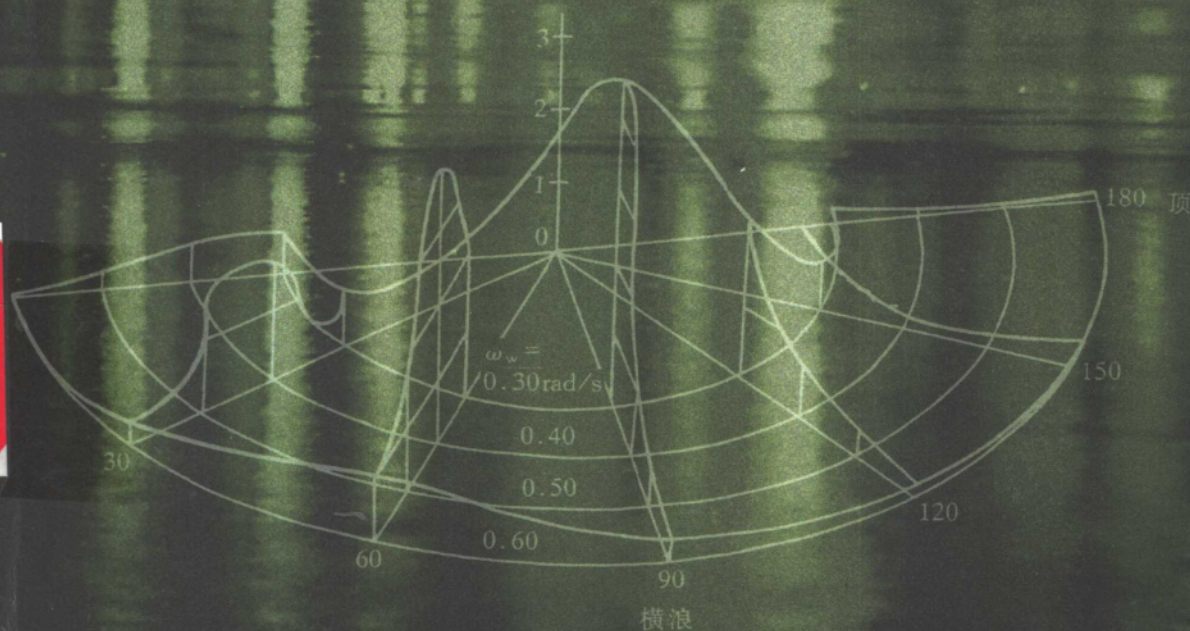


● 朱克强 编著

船舶结构的载荷与响应

上海交通大学出版社





责任编辑 / 宋永明

封面设计 / 雨 风

<http://www.jiaodiapress.com.cn>



ISBN 7-313-02434-7



ISBN7-313-02434-7/U·087

定价: 17.00 元

9 787313 024343 >

船舶结构的载荷与响应

朱克强 编著

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书简要介绍了各种波浪理论以及各种载荷的计算方法,其中既有工程中实用的载荷算法,也有理论计算方法。在动力响应方面,重点介绍了对称运动的动力响应,同时也介绍了船舶的反对称响应、瞬态载荷响应等。在求解水中变形体动力响应的方法中,主要介绍了线性、非线性水弹性分析方法,并对频域、时域分析途径作了一定介绍。

本书可供船舶与海洋工程专业的本科高年级学生或硕士研究生及科研工作人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

船舶结构的载荷与响应/朱克强编著. —上海:上海交通大学出版社,2000

ISBN 7-313-02434-7

I. 船… II. 朱… III. ①船体结构-波浪载荷-计算方法 ②船体结构-响应(力学) IV. U661.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 21970 号

船舶结构的载荷与响应

朱克强 编著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 张天蔚

立信会计常熟市印刷联营厂印刷 全国新华书店经销

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 9.75 字数: 241 千字

2000 年 8 月第 1 版 2000 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1~500

ISBN 7-313-02434-7/U·087 定价: 17.00 元

版权所有 侵权必究

前 言

船舶结构的载荷与响应是船舶设计和使用中的重要问题,它涉及到流体和弹性体之间的耦合作用,因而使问题更加复杂。在传统做法中,是将船体的类似于刚体运动的整体运动响应与挠曲响应截然分开处理的,运动响应由耐波性理论予以研究,而挠曲响应所涉及的船体应力则用半经验方法进行研究,也即利用刚性船体所受的外力进行总强度计算,必要时再加上经“波激振动”修正给出的应力。但是实际上波浪中的船舶并非刚体,而是一个可变形的柔性体,流体对船体的作用效果会受到挠性船体的影响,因此,上述处理方法就有一定局限性。为了使强度分析更为合理,应该研究可变形体在流体中的运动机理,建立结构与流体的统一运动方程式,用水弹性理论将刚体响应和弹性响应一次求出。

编者吸收了国内外最新的研究成果,在多年从事船舶结构动力响应科研的基础上,为本科高年级学生和研究生教学编写了这本教材,希望此书对推广水弹性理论在造船中的应用能起一定普及作用。

全书共分五章,第一章介绍了波浪理论和几种波浪载荷的计算方法;第二章讲述了船舶结构的对称运动响应;第三章讲述了船舶反对称运动响应和线性水弹性分析的三维通用公式;第四章讲述了船体的瞬态响应;第五章讲述了时域模拟的水弹性理论,以及非线性分析方法的简化处理。

在本书的编著过程中,得到了中国人民解放军海军工程大学郭日修教授,七〇八所严家文研究员,哈尔滨工程大学黄胜教授、徐玉如教授,大连理工大学李玉成教授,七〇二所徐秉汉教授,华东船舶工业学院李维扬教授等人的帮助和指导,在此一并向他们表示衷心感谢。由于作者水平有限,书中不当之处在所难免,恳请读者不吝指正。

编者 朱克强

1999年12月

目 录

第一章 波浪理论与波浪载荷	1
1.1 流体力学的基本方程与基本概念	1
1.2 微幅波(线性波浪)理论	7
1.3 非线性波浪理论	13
1.4 随机波浪理论	19
1.5 用准静态方法计算载荷	34
1.6 用切片理论计算载荷	43
1.7 不规则波中的载荷	49
1.8 砰击载荷	73
第二章 对称运动分析	76
2.1 对称运动方程	76
2.2 对称干模态正交条件的推导	78
2.3 船体梁对称运动干模态的计算	80
2.4 船体在波浪中的外载荷估算	84
2.5 流体与结构统一的对称运动方程	101
2.6 刚体对称运动特殊性	105
第三章 船舶反对称运动	108
3.1 船舶反对称运动方程	108
3.2 反对称运动的主模态	109
3.3 考虑剪切变形和剖面转动影响时箱形剖面梁的反对称振动	110
3.4 反对称振动干模态的正交条件	111
3.5 船体反对称响应的模态分析	114
3.6 反对称有阻尼强迫振动模态方程	115
3.7 斜浪中船和波浪的相对运动与流体作用力	117
3.8 反对称广义流体附加质量、阻尼、刚度矩阵(A_{rs} 、 B_{rs} 、 C_{rs})	120
3.9 满载集装箱船反对称响应分析	123
3.10 船舶线性水弹性分析的三维通用公式	124
第四章 船体的瞬态载荷响应	131
4.1 砰击干扰力的确定	131
4.2 砰击响应模态方程	133

第五章 时域模拟的水弹性理论.....	138
5.1 线性时域三维水弹性理论公式	138
5.2 非线性分析方法的简化	144
5.3 计入非线性的另一种方法	147
参考文献.....	150

第一章 波浪理论与波浪载荷

1.1 流体力学的基本方程与基本概念

1.1.1 运动方程

不可压缩牛顿流体的运动方程为:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.1.1.a)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (1.1.1.b)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1.1.1.c)$$

式中: u 、 v 、 w 分别表示在 x 、 y 、 z 方向各速度分量; X 、 Y 、 Z 表示相应方向单位体力分量; p 为压力; ν 为流体运动粘性系数; D/Dt 表示实际加速度(通常也称为欧拉导数), 实际加速度由非定常引起的局部加速度和非均匀引起的变位加速度组成, 运算符 D/Dt 也可作用于密度、温度等, 以决定各自的欧拉导数。这就是粘性不可压缩流体的著名 Navier-Stokes(纳维尔-斯托克斯)方程。

当重力是唯一存在体力时, 可定义体力势函数为 $\Omega = -gh$, 使得 $X = \partial\Omega/\partial x$, $Y = \partial\Omega/\partial y$, $Z = \partial\Omega/\partial z$ 。此处 h 为水平液面以上的高度, 那么, 方程(1.1.1)可以简化为:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p + \rho gh)}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (1.1.2.a)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p + \rho gh)}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (1.1.2.b)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p + \rho gh)}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad (1.1.2.c)$$

将三式相加, 并注意到 $D\mathbf{q}/Dt = \partial\mathbf{q}/\partial t + (\mathbf{q} \cdot \nabla)\mathbf{q}$, 可写成简洁的矢量形式:

$$\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \nabla)\mathbf{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p + \rho gh) + \nu \nabla^2 \mathbf{q} \quad (1.1.3)$$

此处 $\mathbf{q}$ 是速度矢量, 可写作 $\mathbf{q} = ui + vj + wk$ 。

纳维尔-斯托克斯方程由纳维尔于 1827 年开始研究, 到 1845 年斯托克斯加以完善, 历经 18 年时间, 并又花了 6 年时间确认其假设条件, 即边界上没有滑移, 或更精确地说, 就是为了在流体边界处满足条件, 假定流体质点与相连的固体质点具有大小和方向相同的速度 (Stokes, 1851 年)^[27]。

如果 L 表示特征长度,沿该长度的速度大小以 U 来表示,则将方程(1.1.1)用 L 、 U 表示的量纲为 1 的(无因次)量来描述,可以看到比率 UL/ν ——雷诺数(Peynolds number)代表了惯性力与粘性表面力的比值。在大多数流动中,雷诺数很大,上述方程中的粘性项要比惯性项小得多,但是在速度梯度变化大的边界层中粘性应力就非常显著了。

1.1.2 连续方程

由不可压缩流体的质量守恒定律可知,体积膨胀率应为 0,从而写出连续方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.1.4)$$

方程(1.1.4)与坐标系的选择无关。方程(1.1.3)、(1.1.4)中四个未知量(u, v, w 和 p) 在给定初始条件与边界条件以后,就完全确定了。不透水壁的运动学边界条件就是固体边界上任任意点的法向与切向速度为零,第一个条件要求边界面函数 $F(x, y, z, t) = 0$ 的随体导数必须为 0,即

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (1.1.5)$$

第二个条件(无滑移)建立在推理、数学上简化与实验修正的基础上,理想流体不一定要满足无滑移条件,因为粘性从根本上改变了理想流体的流动情况,无粘流动假定甚至不能作为物体邻近区的真实流动的第一近似。自由表面的边界条件将在介绍速度势之后进行讨论。

1.1.3 有旋流动与无旋流动

流体微团在 x, y, z 方向上的旋转角速度为(Schlichting, 1968 年)^[28]

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.1.6a, b, c)$$

它们是旋转角速度矢量 $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{q} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{q}$ 的三个分量,只要有一个旋度分量不为零,流动就是有旋的,因为每一流体质点都必须满足方程(1.1.6)所规定的旋转运动,当然还有平动和纯变形运动。如果无旋,即 $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$,则此时流体并不一定是无粘性的,换句话说,在 $(\nabla \times \mathbf{q} = 0)$ 的流域内,真实流体表现出无旋或像无粘流体一样的特点,因为此时切应力不存在了。

流体微团的旋转与速度环流和旋涡强度这两个基本概念有关,速度环流 Γ 定义为:如在所考虑的流域内取一包围表面 S 的封闭曲线 l ,则沿该曲线对速度矢量的线积分即为速度环流 Γ ,

$$\Gamma = \oint \mathbf{q} \cdot d\mathbf{l} = \oint (u dx + v dy + w dz) \quad (1.1.7)$$

根据斯托克斯定理,沿任意封闭曲线的速度环流 Γ 等于通过以这一曲线为边界面 S 的旋涡强度的两倍,即

$$\Gamma = \oint \mathbf{q} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.1.8)$$

因此方程(1.1.7)可写作

$$\Gamma = \iint 2\omega_x dydz + \iint 2\omega_y dzdx + \iint 2\omega_z dxdy \quad (1.1.9)$$

这里出现了旋转角速度分量的两倍,它们就是涡强矢量 ξ 的分量: $\xi_x = 2\omega_x$, $\xi_y = 2\omega_y$, $\xi_z = 2\omega_z$ 。因此,在方程(1.1.8)中就有 $\Delta\Gamma = \xi_n \Delta S$, 此处 ξ_n 是表面微元 ΔS 的法向涡强矢量,换句话说,通过该表面的涡强通量等于沿包含该面的曲线的速度环流。

在无摩擦的流体中,流体微团既不能获得也不会失去旋转(角速度),因为没有剪切力来降低这种运动。在理想流体中始终由某一些流体微团所组成的任意封闭曲线的环流保持不变;流体在运动过程中如果本来是无旋运动的就不可能变为有旋运动;或相反,本来具有旋涡就不能消失;如果质量力有势,流体是理想、正压的,则构成涡管的流体质点在任何瞬时也构成涡管,这些是涡强的基本理论,且得到了亥姆霍兹和开尔文的证明。如果想详细了解这些理论,读者可以参考 Batchelor (1967 年)、Milne-Thomson(1960 年)或 Lamb(1932 年)的经典论著。

在实际流体中,由于摩擦力不守恒,涡强(管)可能会再分配、扩散和消失,也就是说,粘性不仅使旋涡产生,也使其消散。例如,一个涡管在从圆柱体处开始,顺流线方向移 4 倍的直径的距离后,其涡强约只有分离点产生的涡强的 70% (Bloor 和 Gerrard, 1966 年)。Schmidt 和 Tilmann(1972 年)使用新的实验技术发现当涡管顺流移动 5~12 倍直径时,其涡强将减少 50%,剩余的一部分扩散掉,而一部分由于反旋向涡强的流体吸入而消失。我们必须记住实验仅仅给出了法向涡强分离的结果,涡管的拉伸、扭转被视为尾流的三维效应,除了法向之外,没有考虑涡强在各个方向的再分配情况,这个相对较简单的例子不仅指出了尝试模拟真实流体运动时,使用无粘流体的假定会有困难,同时也说明这样一个事实,即对于非流线体来说最重要的区域并不是在尾流远处(通常会有卡门涡街存在),而是在包围物体的近尾流区域,涡强在这里产生、扩散并消散在近后方(Sarpkaya 和 Shoaff, 1979 年)。

1.1.4 速度势

由于无旋运动就是指所有的旋转矢量的分量为零,即

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.1.10)$$

于是我们可以构造一个连续、可导的标量函数 $\phi = \phi(x, y, z, t)$, 并使其梯度满足方程(1.1.10)。实际上, $(\nabla \times \mathbf{q} = 0)$ 就是此函数存在的充分必要条件, 势函数的差分 $\delta\phi$ 与沿一微段流线的长度 δs 的关系为 $\delta\phi = V_s \delta s$ 或 $V_s = \partial\phi/\partial s$, 因此, 势函数的梯度给出的就是速度, 速度势与重力场中的力势、均匀导体中的稳定电势和均匀热导体中的稳定温度分布函数等相类似。

在笛卡尔坐标系与圆柱坐标系中,速度分量可用下式表示:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, w = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \text{ 即 } \mathbf{q} = \text{grad} \phi \quad (1.1.11)$$

$$\text{和} \quad V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, V_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta}, w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.1.12)$$

显然,方程(1.1.11)与(1.1.12)满足方程(1.1.10),即势流是无旋的,也可以说只有在无旋运动中势函数才存在。将 ϕ 引入连续方程(1.1.4)还可求得另一个线性微分方程,即拉普拉斯(Laplace)方程:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1.13)$$

此方程是拉普拉斯在他的著作《天体力学》中首次提出的,并在物理、力学与数学等许多分支学

科上有广泛应用。拉普拉斯方程的解被称为调和函数,复函数 $F(z)$ 的实部与虚部就是这样的调和函数,它们的线性组合也是拉普拉斯方程的解。

要确定满足所给边界条件的调和函数是一个很困难的问题,必须综合运用直觉、启发性推理、经验或其他方法(如有限差分、有限元和逐步近似方法)。采用这些方法不仅为了得到方程解,而且是要肯定无粘性流体假定下的解是对流体实际运动的合理近似,一个理想化的解是不是可靠,很难给出判断准则。一般来说,受惯性力支配或匀加速的流体或流域可以用势流理论的方法来处理,雷诺数在单位值附近时的球面绕流不能用无粘性流动理论来研究,因为即使流动为不分离的,这种流动也是受粘性力支配的。然而,射流的喷流、撞击、偏转以及绕大型的圆柱体或流线体的微幅振荡流动等都可以用势流方法处理,当然要考虑绕射与辐射条件才行。

通常对实际流体的无分离流动可以采用无粘性假定作为外层流动的一次近似(例如中等攻角薄片绕流),而必须强调的是,势流解连这种一阶近似也达不到,因此这就要求将分析结果,尤其是那些按旋度为零假定得到的结果,必须与实验获得的结果互相比较。

1.1.5 欧拉方程及其积分

采用无切应变的假定可以使方程(1.1.1)退化为

$$\frac{Du}{Dt} = X - \frac{\partial p}{\rho \partial x}, \frac{Dv}{Dt} = Y - \frac{\partial p}{\rho \partial y}, \frac{Dw}{Dt} = Z - \frac{\partial p}{\rho \partial z} \quad (1.1.14a, b, c)$$

以上就是所谓“欧拉方程”,在纳维尔-斯托克斯方程建立以前 100 年,也就是在牛顿发现重要力学定律的 60 年之后,由 Leonahard Euler 首先提出。公式的优美与独创性就在于欧拉认识到牛顿定律适用于每个系统的各个部分,不论是离散的还是连续的。无粘性流体假定必然导致流体的压力总是垂直于其作用表面。

利用无旋的条件和力势的概念,可以将三个欧拉方程简化为一个方程:

$$\frac{1}{2} q^2 + \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Omega + \frac{p}{\rho} = F(t) \quad (1.1.15)$$

式中: $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$, 而 $F(t)$ 仅是时间的任意函数,需要指出的是,在任何时刻,方程(1.1.15)的左边在无旋运动场内所有点具有相同的值,而且并不仅仅是沿某一流线,通常将 $F(t)$ 归入速度势里,因为这并不影响我们感兴趣的物理数值,但是在某些非线性问题中这样处理可能会带来困难(Whotham, 1974 年)。

因为对定常流动 $\partial \phi / \partial t = 0$, 所以有

$$\frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} + gh = \text{常数} \quad (1.1.16)$$

这就是大家熟悉的伯努利(Bernoulli)方程,应用此方程,只要由拉普拉斯方程解出速度势后求得速度分布,马上就能确定压力分布。必须注意的是,只有当流动是无旋的或只沿某一条流线计算,或速度矢量与旋转矢量重合时,定常流动方程(1.1.16)才有效。

无旋流动的一个基本特征就是它给出了流体每一瞬时的响应不受其以前状况的影响,即在适当的边界条件下可唯一确定。例如固体在均匀流体中运动所引起的流动,其边界条件就是固体边界上速度的法向分量必须传递给毗邻的流体,一般表示为

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = V_n \quad (\text{在物面上}) \quad (1.1.17)$$

式中: n 表示垂直于表面的法向; V_n 为垂直于表面的法向速度。如果边界是坚硬、固定的(例

如海床),那么 V_n 就为 0,我们就有

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (1.1.18)$$

在自由表面的情况下(如在水波上),就需要一个运动学和动力学边界条件。运动学边界条件可以这样来陈述:在水自由表面上的质点任何时刻都不会离开自由表面(Lamb, 1932 年)。这导致:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{在 } z = \eta \text{ 处}) \quad (1.1.19)$$

式中: $z = \eta(x, y, z)$ 代表自由表面(进一步讨论表面条件见 Lightbill 论著, 1979 年)。动力学自由表面条件要求分界面两侧的压差产生一个垂直于边界的力。该力完全由表面张力决定, 此条件可表示为

$$p = p_a + \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.1.20)$$

式中: σ 为表面张力; R_1, R_2 是自由表面在任意两正交方向的曲率半径; $p - p_a$ 就是分界面两侧的压差。

当自由表面没有被污染时, σ 可认为为零, 当流动是无旋的, 从而可用方程(1.1.15)来描述流体中的压力, 当大气压力在液体近处保持为恒定时, 动力学自由表面条件可简化为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + g\eta = F(t) \quad (\text{在 } z = \eta \text{ 处}) \quad (1.1.21)$$

1.1.6 动能

流场的动能可按式给出:

$$T = \frac{1}{2} \rho \iiint (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz \quad (1.1.22)$$

对于有单值速度势的理想流体, 上式可写为

$$T = \frac{1}{2} \rho \int \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (1.1.23a)$$

式中: n 是外法线方向; ds 是微元面积, 积分沿边界进行。对于一个二元无粘性流体流动, 方程(1.1.23a)简化为(Milne-Thomson, 1960 年)

$$T = i \frac{\rho}{4} \oint_c F(z) \overline{dF(z)} \quad (1.1.23b)$$

式中: $F(z)$ 是复速度势, 且 $z = x + iy$, 方程(1.1.23a)和(1.1.23b)经常被用来确定物体的附加质量。

1.1.7 流函数

拉格朗日流函数(由 d'Alembert 首先提出)为标量函数, 不仅可以用来描述二元流动的几何图形, 还可描述任意点的速度分量以及两条流线间的流量。

对于所考虑的流体来说, 两条流线间的流量与积分路径无关, 对从左到右的流动, 我们有

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.1.24)$$

因此, 流函数 Ψ 对任意方向的偏导数给出了顺时针 90° 方向的速度分量。流函数的定义并不

要求运动是无旋的,换句话说, Ψ 的存在与否与流动有旋、无旋无关,只需流动为连续的就行。

对于无旋二元流动,无旋的条件导致

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \Psi = 0 \quad (1.1.25)$$

无旋二元流动中的拉格朗日流函数与速度势函数是正交的,可看作是复数函数 $F(z) = \phi + i\Psi$ 的虚部。当然, $F(z)$ 中的 ϕ 与 Ψ 也可互换,因为它们均满足拉普拉斯方程。此外,为了代表一个连续的二元无旋流动,每一个都必须满足使另外一个存在的条件。

在极坐标中,速度分量表示为

$$V_r = \frac{\partial \Psi}{r \partial \phi} = \frac{\partial \phi}{\partial r}, V_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \quad (1.1.26)$$

只适用于轴对称流的斯托克斯流函数建立在同样概念基础上,即定义一个能导出任意点速度分量的标量函数,它自动满足连续方程。在柱坐标系中,速度分量表示为

$$u = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$V_\omega = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \quad (1.1.27)$$

它们满足下面的连续方程:

$$\frac{\partial(\omega V_\omega)}{\partial \omega} + \frac{\partial(\omega u)}{\partial x} = 0 \quad (1.1.28)$$

如假定流动是无旋的,那么

$$\frac{\partial V_\omega}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \omega^2} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \omega} = 0 \quad (1.1.29)$$

方程(1.1.29)用符号 ϕ 可表示为:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = 0 \quad (1.1.30)$$

也可以用三维流场的二元流函数表示速度,它可以包括作为特殊情况的拉格朗日与斯托克斯流函数。

1.1.8 基本流动模式

由于边界条件通常很难满足,所以即使采用无粘性流动的极端假定,也不能直接求解拉普拉斯方程。大部分实用解并不是直接解出的,而往往是用更简单的已知解来组合的。当不能用基本流动模式的叠加得到解时,必须采用其他精确或近似的方法,例如保角变换、傅立叶(Fourier)级数、特征函数、球或椭圆调和函数、逐步近似、有限差分、有限元等方法,用这些方法都需要做大量独创性的工作,这主要看问题的复杂程度与要求的精度。任何情况下,必须弄清求解需要的时间和努力是否与需求相称、对实际流动的简化是否得当。例如,用源汇分布法来分析大型圆柱的绕射影响且当不出现分离时是合理的,但是,应用同样的方法来研究带有尖角的大物体时就可能有问题了,因为出现了分离现象。常见基本流动模式的速度势和流函数,读者可以参阅参考文献[29]或其他流体力学著作。

1.2 微幅波(线性波浪)理论

微幅波是一种简化了的最简单的波动,其水面呈现简谐形式的起伏,水质点以固定的圆频率 ω 作简谐振动,同时波形以一定的速度 c (称为波速)向前传播,波浪中线(平分波高的中线)与静水面相重合。一般说来,海洋中实际发生的波动不能用简单的波动来描述,但分析这种最简单的波动,对解决较复杂的波动问题是十分必要的。它是研究较复杂的有限振幅波和随机波的基础。在船舶波浪外载荷的计算中,就是采用了深水微幅波理论。

1.2.1 基本方程

假定:①流体是无粘性不可压缩的均匀流体;②流体作有势的运动;③重力是唯一的外力;④流体自由表面上的压强 p 等于大气压强 p_a ;⑤海底为水平的固体边界;⑥波幅或波高相对于波长是无限小,流体质点的运动速度是缓慢的。此理论首先由爱利(Airy)提出,故又称爱利波理论。按⑥假定,波动的自由表面所引起的非线性影响可以忽略,即非线性的自由表面运动边界条件和动力边界条件可以简化为线性的自由表面边界条件。

对于二维波动,非线性的自由表面运动边界条件(1.1.19)可以简化为

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \bigg|_{z=\eta} \quad (1.2.1)$$

但在小振幅假定之下,式(1.2.1)中的 $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ 、 $u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ 均为小量,它们的乘积为高一阶小量,相对于其他两项可以忽略不计,于是便得到线性化的自由表面运动边界条件

$$u_x \big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (1.2.2)$$

或

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

非线性的自由表面动力边界条件为

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\eta} + g\eta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \bigg|_{z=\eta} = 0 \quad (1.2.3)$$

考虑小振幅假定,式(1.2.3)中的非线性项 $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right]$ 相对于其他两项可以忽略不计,于是便得到线性化的自由表面动力边界条件为

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.2.4)$$

线性化的自由表面运动边界条件和动力边界条件可以合并为

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \bigg|_{z=0} = 0 \quad (1.2.5)$$

常深度二维小振幅推进波的速度势 $\phi(x, z, t)$ 由下列基本方程和边界条件所确定:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad R: \left\{ \begin{array}{l} -d \leq z \leq 0 \\ -\infty < x < \infty \end{array} \right\} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-d} &= 0 \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \Big|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.6a, b, c)$$

1.2.2 微幅波的速度势

设常深度二维小振幅推进波的波面方程为

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) \quad (1.2.7)$$

式中: a 为振幅, 两倍的振幅就是波高 H ; $kx - \omega t = \theta$, 为波浪的相位。

$$k = 2\pi/L \quad (1.2.8)$$

其中: 常数 k 称为波数;

$$\omega = 2\pi/T \quad (1.2.9)$$

称为波浪的圆频率。

波形的传播速度 c 与波数 k 及波浪圆频率 ω 之间有如下的关系:

$$c = \frac{L}{T} = \frac{\omega}{k} \quad (1.2.10)$$

一般情况下, 波动的振幅随深度而衰减, 因此, 可设速度势 $\phi(x, z, t)$ 的一般形式为

$$\phi = A(z) \sin(kx - \omega t) \quad (1.2.11)$$

代入拉普拉斯方程(1.2.6a), 则得微分方程

$$A''(z) - k^2 A(z) = 0$$

其通解为

$$A(z) = A_1 e^{kz} + A_2 e^{-kz} \quad (1.2.12)$$

将上式代入式(1.2.11)得

$$\phi = (A_1 e^{kz} + A_2 e^{-kz}) \sin(kx - \omega t) \quad (1.2.13)$$

式中 A_1 及 A_2 为积分常数, 可由边界条件确定。

(1) 对于水深为无限的情况, 即当 $z \rightarrow -\infty$ 时, 海底处的速度势 ϕ 应趋近于零。由于 $\sin(kx - \omega t)$ 一般不为零, 故 $A(z)|_{z \rightarrow -\infty} = 0$, 因此 $A_2 = 0$ 。于是有 $A(z) = A_1 e^{kz}$ 。式中: $A_1 = ga/\omega$, 可由自由表面边界条件定出。这样便得到水深为无限时常深度二维小振幅推进波的速度势的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{ga}{\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t) \\ \phi &= \frac{gH}{2\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.14)$$

或

(2) 对于水深为有限的情况, 当 $z = -d$ 时, 同理可得常深度速度势的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{ga}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \sin(kx - \omega t) \\ \phi &= \frac{gH}{2\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.15)$$

或

将速度势式(1.2.15)代入式动力边界条件式(1.2.5),得

$$\frac{kga}{\omega} \frac{\text{sh}kd}{\text{ch}kd} \sin(kx - \omega t) - \omega a \frac{\text{ch}kd}{\text{ch}kd} \sin(kx - \omega t) = 0 \quad (1.2.16)$$

故

$$\omega^2 = kg \text{th}kd \quad (1.2.17)$$

或

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \text{th}kd} \quad (1.2.18)$$

式(1.2.17)称为色散关系式,它表明圆频率 ω 和波数 k 之间的关系。

有限水深的周期、波长和波速三者之间的关系如下:

$$c = \frac{gT}{2\pi} \text{th}kd \quad (1.2.19)$$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi L}{g} \coth kd} \quad (1.2.20)$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \text{th}kd \quad (1.2.21)$$

1.2.3 微幅波的特性

在深水情况下,当 $\frac{d}{L} \geq 0.5$ 时, $\text{th}kd \approx 1$, 深水短波的有关公式为

$$\omega^2 = kg \quad (1.2.22)$$

$$c_0 = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (1.2.23)$$

$$c_0 = \frac{gT}{2\pi} \quad (1.2.24)$$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi L_0}{g}} \quad (1.2.25)$$

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} \quad (1.2.26)$$

式中:下标 0 特指深水短波情形。

在极浅水情况下,在相对水深 $\frac{d}{L} \leq 0.05$ 时, $\text{th}kd \approx kd$, 则浅水长波的有关公式为

$$c = \sqrt{gd} \quad (1.2.27)$$

$$T = \sqrt{\frac{L^2}{gd}} \quad (1.2.28)$$

$$L = T \sqrt{gd} \quad (1.2.29)$$

根据速度的性质,波浪中任意点 (x, z) 处的速度和加速度甚易求得。速度分量为

$$u_x = \frac{\pi H}{T} \frac{\text{ch}k(z+d)}{\text{sh}kd} \cos(kx - \omega t) \quad (1.2.30)$$

$$u_z = \frac{\pi H}{T} \frac{\text{sh}k(z+d)}{\text{sh}kd} \sin(kx - \omega t) \quad (1.2.31)$$

对无限水深的情况,可令 $d \rightarrow \infty$, 此时 $\frac{\text{chk}(z+d)}{\text{chk}d} \rightarrow e^{kz}$, $\frac{\text{shk}(z+d)}{\text{chk}d} \rightarrow e^{kz}$, 而 $\omega^2 = kg$, 于是有

$$u_x = \frac{\omega H}{2} e^{kz} \cos(kx - \omega t) \quad (1.2.32)$$

$$u_z = \frac{\omega H}{2} e^{kz} \sin(kx - \omega t) \quad (1.2.33)$$

加速度分量为

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{2\pi^2 H}{T^2} \frac{\text{chk}(z+d)}{\text{shkd}} \sin(kx - \omega t) \quad (1.2.34)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{2\pi^2 H}{T^2} \frac{\text{shk}(z+d)}{\text{shkd}} \cos(kx - \omega t) \quad (1.2.35)$$

对无限水深的情况令 $d \rightarrow \infty$, 可得

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\omega^2 H}{2} e^{kz} \sin(kx - \omega t) \quad (1.2.36)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\omega^2 H}{2} e^{kz} \cos(kx - \omega t) \quad (1.2.37)$$

水质点运动的轨迹方程为

$$\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(z - z_0)^2}{\beta^2} = 1 \quad (1.2.38a)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{H}{2} \frac{\text{chk}(z_0 + d)}{\text{shkd}} \\ \beta &= \frac{H}{2} \frac{\text{shk}(z_0 + d)}{\text{shkd}} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.38b)$$

这个轨迹是一个椭圆,即水质点按封闭椭圆轨迹线作振荡运动。椭圆的水平长半轴 α 和短半轴 β 由水质点静止位置的纵坐标 z_0 决定,而与水平坐标 x_0 无关。

在水面处, $z_0 = 0$, 有

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{H}{2} \coth kd \\ \beta &= \frac{H}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.39)$$

在水底处, $z_0 = -d$, 有

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{H}{2 \text{sh} kd} \\ \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.40)$$

无限水深时,即当 $d \rightarrow \infty$ 时, $\text{chk}(z_0 + d) \approx \text{sh}(z_0 + d)$, 从式(1.2.38)可得 $\alpha = \beta$, 即

$$\alpha = \beta = \frac{H}{2} e^{kz_0} \quad (1.2.41)$$

由此得水质点运动的轨迹方程为

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = \left(\frac{H}{2} e^{kz_0} \right)^2 \quad (1.2.42)$$