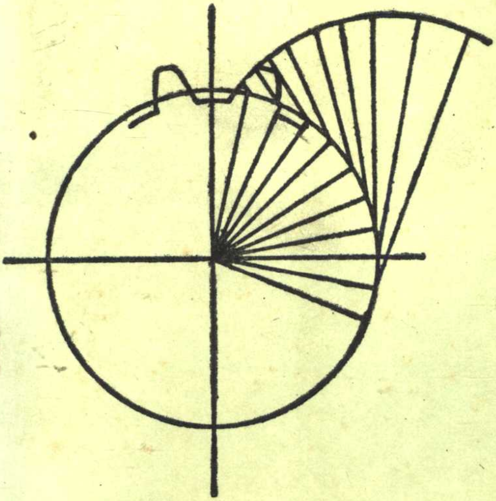

傅光国 陈文立编著

参数方程

重庆出版社

参 数 方 程

傅光国　陈文立　编著

重 庆 出 版 社
一九八六年·重庆

责任编辑：夏树人
封面设计：吴 俊

参 数 方 程　　傅光国 陈文立 编著

重庆出版社出版、发 行 （重庆长江二路205号）
新 华 书 店 经 销
重 庆 印 制 一 厂 印 刷
*
开本：787×1092 1/32 印张：6 字数：125千
1986年 10 月第一版 1986 年 10 月第一次印刷
科技新书目 139—274 印数 1—10,100

书号：13114·38 定价：1.10元

内 容 提 要

本书比较全面、系统地介绍了有关参数方程的知识，是高中数学课程中“参数方程”内容的补充和深化．全书包括引言和参数方程、参数方程在解题方面的应用、利用参数方程求轨迹、曲线系等四章，几乎涉及平面解析几何的全部知识，理论阐述严谨，重视解题技巧，内容充实，通俗易懂．可供高中学生、中学数学教师、理科大学低年级学生、自学青年参考．

拟序——校后随笔

冠卷首而举纲要为序，编后为跋.非序非跋，不拘一格，故题“随笔”，以为“拟序”。

先看英文parameter一词。para有“旁”、“密切有关”、“辅助”等意，meter意为“计量”，会意为“从旁参与的有关辅助量”，通常译作“参（变）数”。

例如，在直角坐标平面XOY上，圆心在O、半径为r的圆是使$OP=r$的动点$P(x,\ y)$的轨迹，其方程为$\sqrt{x^2+y^2}=r$，即

$$x^2+y^2=r^2。\tag{1}$$

这方程简洁齐整，似乎无可訾议。但是，在范围$|x|\leqslant r$上由(1)定义的y是x的**隐**函数；就y解之，所得的

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}\tag{2}$$

当$|x|<r$时却是**多值**函数。

留心：当动径$OP=r$绕O旋转到使$\angle XOP=\theta$时，P的坐标为

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}\tag{3}$$

即知：当θ值连续变化2π(弧度)时（譬如θ的变化范围是$0\leqslant\theta<2\pi$)，以方程(3)的x、y值为坐标的点就刻划出这圆。这

里，r是常数，θ是**参**（变）**数**，(3)是这圆的**参数方程**。(3)中的x、y都是θ的**单值**（显）函数，较(1)与(2)简单。(虽然三角函数是超越函数，但有表可查，也很便利。)

仿此，若a、b是常数，则参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta \end{cases} \quad (0\leqslant\theta<2\pi)$$

表示椭圆$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$。

进而可细心推导：半径为r的圆沿OX滚（而不滑）动、圆上一点P的轨迹（摆线）方程，建议用OP方向变化的角度θ作为参（变）数。(摆线在力学上的实际应用可参阅他书。)

由此可见，若θ是时间t的函数，则上述的参数方程就表示动点$P(x, y)$的位置与时间t的关系，这正是**运动学**所要研究的。

当$k\neq0$时，方程$h(x-a)+k(y-b)=0$表示过点(a, b)而斜率为$-\frac{h}{k}$的直线；当$k=0$时表示直线$x=a$。如果h、k是参(变)数，则这方程表示过点(a, b)的直线系(束)。

连结OX上二点$x=a$与$x=b$的线段上任一点可表示成$x=(1-t)a+tb$，这里参（变）数t的变化范围$0\leqslant t\leqslant1$显然较x的变化范围$a\leqslant x\leqslant b$简便。

“心有灵犀一点通。”许多晦涩难明的客观问题，引入参数，便瞭如指掌、迎刃而解。

罄竹难书参数妙，别看随笔仅寥寥；个中三昧知多少，触类旁通耐琢雕。

傅光国、陈文立二同志乃高师之翘楚，咄咄书空二十年，

孜孜不渝平生愿，博参广搜，积高初等数学教学之经验，合著本书。著者历尽坎坷，呕心沥血，而今大器有成，斐声教坛。正是“路遥知马力，幽树晚多花”。

读者开卷读习，即可征信本书之取材允当，内容翔实，论述精湛，引人入胜。全书由“引言”与四章缀成。先借诸例以阐明参数方程的必要与犀利，继而廓清概念、奠立理论基础，并就参数方程与普通方程的互化、等价以及曲线作图等详予论述；然后（第二、三章）系统介绍参数方程在解题上的应用，对如何分析问题、适当选取参数等，论列尤为细腻。不仅通过典型例题授以技巧，启迪窍诀，金针度人，使能领会法则而得心应手；就连容易导致的悖论（似是而非的诡论，paradox）也提起注意，使读者防范未然。最后一章论及曲线系的方程与性质的关系以及不同参数值对系中曲线性状的影响，并用以解决某些繁难问题。

最后，画蛇添足，姑赘一题，以资思索。

证明：无论a、b为任何实数，曲线

$$ax^3+3bx^2y-3axy^2-by^3=0$$

必将圆$x^2+y^2=1$六等分。

再拟附志于此的是：本书的定稿不啻“抱玉三朝楚”。著者交互修改，力求璧合珠联，不厌三易其稿；复经重庆师范学院唐以荣副教授、北碚教师进修学校孙道杠老师惠予审校，提出许多宝贵意见，与著者商榷厘订。理璞见玉，堪称无瑕，嘱我通读，只得吹毛求疵，妄加斤斧，难免剜肉成疮，还望读者指正。应请注意的是：随处不忘由所考虑的具体问题明确参（变）数的变化范围。

重庆出版社的编辑及有关同志为本书的编排多所考虑，

付出了辛勤劳动。谨此深志谢忱。

叶乃膺

1985年春

目　　录

引　言

中学数学课程的内容就有“参数方程”。但是，由于教学时间限制，这部分内容只能很简单地介绍一下。勤于思考的同学自然会产生这样的问题：学了曲线的普通方程（直角坐标方程或极坐标方程），还要去研究曲线的参数方程，是不是多此一举呢？曲线的参数方程是否有其独特的优越性呢？它的用途如何？这就是我们首先要回答的问题。这里，至少有四条理由可说：

第一，解析几何的基本问题之一是求动点的轨迹方程，即要找出满足条件的动点的流动坐标 x、y 之间的关系式。但要从具体问题直接找出 x 与 y 之间的关系式有时是比较困难的，而如果适当地引用一个辅助变量（称为参变数或参数），分别找出x、y和这个参变数之间的关系式，也就间接地揭示了 x、y 之间的关系了。为了说明这点，我们先来看一个常见的、应用上很重要的例子。

例1　把一条一端固定，没有伸缩性的绳子缠绕在一个固定的圆盘上，用铅笔系在绳子的另一端，将绳绷紧而逐渐拉开，保持绳子和圆相切（图0-1），那么这铅笔画出的曲线就叫做圆的渐开线（这个圆叫做渐开线的基圆，绳子叫做发生线）。求渐开线的轨迹方程。

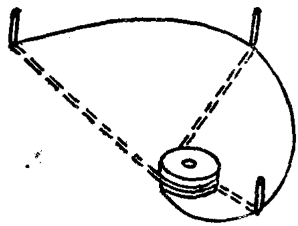

图 0-1

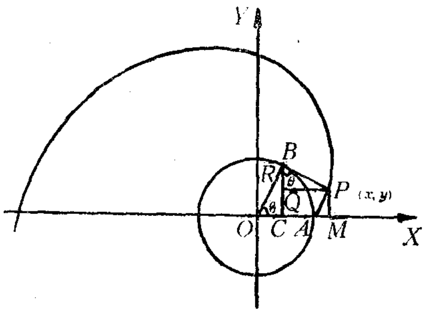

图 0-2

〔解一〕 设基圆圆心为O，半径为R，尚未拉开时，绳子另一端为A，紧贴在基圆上。以O为原点，直线OA为x轴建立直角坐标系（图 0-2）。拉开后，设$P(x, y)$为渐开线上任意一点，PB为基圆的切线，连结OB，取$\angle AOB=\theta$（弧度）为参数，则$|BP|=\overset{\frown}{AB}=R\theta$，作$PM\perp OX$，$BC\perp OX$，$PQ\perp BC$，则$\angle PBQ=\theta$。由此可得

$$x=OM=OC+CM=OC+QP=|OB|\cos\theta$$
$$+|BP|\sin\theta=R\cos\theta+R\theta\sin\theta,$$
$$y=MP=CQ=CB-QB=|OB|\sin\theta$$
$$-|BP|\cos\theta=R\sin\theta-R\theta\cos\theta.$$

于是这圆的渐开线的参数方程是

$$\begin{cases} x=R(\cos\theta+\theta\sin\theta), \\ y=R(\sin\theta-\theta\cos\theta). \end{cases} \quad (\theta\text{是参数，}0\leqslant\theta<+\infty)$$

这里，基圆的半径R是常量，角θ是参数。曲线上任意一点$P(x, y)$的流动坐标x、y都是角θ的函数。若取$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，便得绕基圆一周的绳子（发生线）所生成的那一段渐开线。

显然，圆的渐开线是无界曲线，有始(A点)无终。由于绳子按顺时针方向或逆时针方向缠绕基圆，可见以A点为始点的圆O的渐开线是关于OA对称的两支曲线。

〔解二〕 取基圆圆心O为极点，OA为极轴建立极坐标系（图0-3）。设$P(\rho, \theta)$为渐开线上任意一点，PB为圆的切线，连结OB，取$\angle POB=\alpha$（弧度）为参数，则在$Rt\triangle POB$中有

$$\rho=R\sec\alpha,$$

$$|BP|=R\operatorname{tg}\alpha,$$

但 $$|BP|=\overset{\frown}{BA}=(\theta+\alpha)R,$$

$$\therefore\quad (\theta+\alpha)R=R\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha.$$

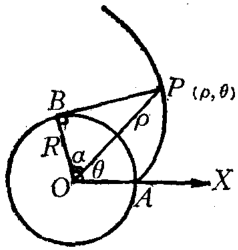

图 0-3

由此得渐开线在极坐标系中的参数方程为

$$\begin{cases}\rho=R\sec\alpha,\\ \theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha.\end{cases}\quad (\alpha\text{是参数，}0\leqslant\alpha<+\infty)$$

在这个例子中，如果不引用参数，要直接找出x、y（或ρ、θ）之间的关系式是困难的。类似地，斜抛物体运动的轨道方程，摆线方程等，不借助于参数都是较难求得的。这就是我们要研究参数方程的第一个理由。

第二，有时建立和运用曲线的普通方程虽不太难，但在解题时选用曲线的参数方程，通过参数来联系表达几个变量的变化，便把几个变量的变化归结为参数的变化，这样化繁为简，很有利于问题的解决。兹举一例：

例2 已知两点$A(1,0)$，$B(-1, 0)$，试在圆

$$(x-3)^2+(y-4)^2=4$$

上求一点P，使PA^2+PB^2为最小。

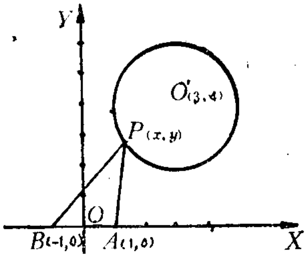

图 0-4

[解] 把圆的普通方程化为参数方程：

$$\begin{cases} x=3+2\cos\theta, \\ y=4+2\sin\theta. \end{cases} \quad (\theta\text{是参数，}0\leqslant\theta<2\pi) \qquad ①$$

设 $\quad PA^2+PB^2=f(\theta)$，

则
$$\begin{aligned} f(\theta)&=(2+2\cos\theta)^2+(4+2\sin\theta)^2 \\ &\quad+(4+2\cos\theta)^2+(4+2\sin\theta)^2 \\ &=60+8(4\sin\theta+3\cos\theta) \\ &=60+40\sin(\alpha+\theta). \qquad ② \end{aligned}$$

其中，$\quad \alpha=\arcsin\dfrac{3}{5}$.

由②知，要$f(\theta)$为最小，其充要条件是$\sin(\alpha+\theta)=-1$。由于$0\leqslant\theta<2\pi$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，故必有 $\alpha+\theta=\dfrac{3\pi}{2}$，于是$\theta=\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$。

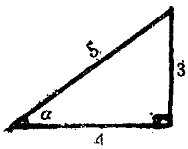

图 0-5

$$\therefore \quad \cos\theta=-\sin\alpha=-\frac{3}{5},$$

$$\sin\theta=-\cos\alpha=-\frac{4}{5},$$

代入①可得

$$\begin{cases} x=3+2\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{9}{5}, \\ y=4+2\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{12}{5}. \end{cases}$$

即P点的坐标为 $\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$.

在本例中，我们把圆的普通方程化为参数方程，用一个变量 θ 的变化来表达两个变量x、y的变化，从而使这个求二元函数极值的问题转化为一个比较简单的求一元函数极值的问题.

同时，正是由于曲线的参数方程是由一个参数来联系表达几个变量x、y等，于是取定一个参数的值，就易求出它所对应的x、y的值，也就能描出曲线上所对应的点(x, y). 由此就能描绘出这曲线的图形. 例如，要画叶形线 $x^3+y^3-3axy=0$ 的图形，如果直接由这个三次方程来解出x、y的函数显式 $y=f(x)$，然后再求x、y的对应值、描点，就相当麻烦. 但是，如果将它化为参数方程：

$$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases} \quad (t\text{为参数，} t\neq-1)$$

由给定的 t 值，就不难计算对应的x、y值了. 在利用计算机作图时，也常利用这种方法来编制程序. 可以说，这就是我们要研究参数方程的第二个理由.

第三，对于一些比较复杂的曲线，特别是闭曲线，它们

的普通方程中两个变量x、y之间的关系往往是多值对应关系，这对于我们利用单值函数的理论来讨论其性质，将带来诸多不便。然而，利用参数方程就可以将上述的多值对应转化为单值对应。例如，对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$说来，它的两个变量$x$、$y$之间的对应 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 是一多对应，而将它化为参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta \end{cases}$$

后，则转化为θ与x以及θ与y之间的单值对应了。这样，就能较方便地利用有关公式计算其面积、弧长等。

正因为上述原因，在空间解析几何、微积分、力学等等中，常常用到曲线的参数方程。

第四，从理论上讲，作为参数方程中的参数，不一定具有什么几何意义或物理意义。但是，我们在建立或使用曲线的某一个参数方程时，一般都以考虑到参数的几何意义或物理意义（例如角、斜率、长度、线段比、时间等）更为方便。在数学问题中，参数的几何意义起着十分重要的作用，若能在解题时运用所取参数的具体几何意义，常能使问题迎刃而解。

例3 过点$M(-3, 3)$且倾角为$\frac{5\pi}{6}$的直线l，交椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$于两点$A$、$B$。

（1） 求弦AB的长；

（2） 求积$|MA|\cdot|MB|$的值（图0-6）。

若用直角坐标方程，本题的解法一般是先写出直线l的方程，再与椭圆的方程联立，解得两交点的坐标，再用两点间的距离公式。这样做计算浩繁。若利用直线的参数方程中参数的几何意义，那就简便得多。

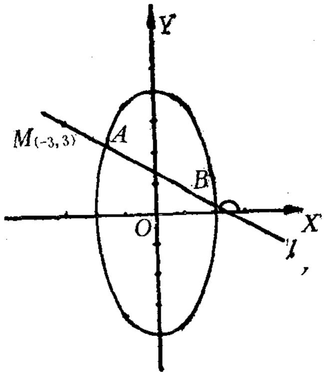

图 0-6

［解］ 设直线l的参数方程为

$$\begin{cases} x=-3+t\cos\dfrac{5\pi}{6}, \\ y=3+t\sin\dfrac{5\pi}{6}, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x=-3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=3+\dfrac{1}{2}t. \end{cases} \qquad ①$$

①中参数t表示l上动点到定点$M(-3, 3)$的有向距离。把①代入椭圆方程

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1,$$

整理后，得

$$\frac{13}{4}t^2+3(4\sqrt{3}+1)t+29=0. \qquad ②$$