JP Olympic

金牌之路

竞赛辅导

主编　刘诗雄

初中数学

陕西师范大学出版社

金牌之路

竞赛辅导

初中数学

主　编：刘诗雄
副主编：江爱华
编　写：江爱华　陈建国
　　　　朱端本　刘诗雄

陕西师范大学出版社

图书代号:JF3N0184

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛辅导/刘诗雄主编. －西安:陕西师范大学出版社,2000.6(金牌之路丛书)

ISBN 7－5613－1669－0

Ⅰ.初… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学－竞赛－初中－教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 09687 号

责任编辑	叶向东
责任校对	郭健娇
出版发行	陕西师范大学出版社
社　　址	西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网　　址	http://www.snuph.com
经　　销	新华书店
印　　制	陕西宏业印务有限责任公司
开　　本	850×1168　1/32
印　　张	13
插　　页	2
字　　数	307 千
版　　次	2003 年 7 月第 2 版
印　　次	2003 年 7 月第 1 次
定　　价	14.30 元

开户行:光大银行西安南郊支行　账号:0303070－00330004695

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电　话:(029)5307864　5233753　5251046(传真)

E－mail:　if－centre@snuph.com

前　言

金牌教练　倾心铸造

《金牌之路》丛书由培养国际金牌获得者的全国一流专家联袂编写，涉及到10个省市20个中学的26位作者。他们培养的学生获得国际及国内奖牌数均在全国名列前茅。

著名金牌教练、特级教师张大同自1991年以来培养的学生获国际物理竞赛金牌8枚、银牌1枚，这在全国是独一无二的；

武钢三中特级教师刘诗雄培养的学生获国际数学竞赛金牌7枚；

湖南师大附中特级教师李安等人培养的学生获国际化学竞赛金牌5枚、银牌2枚；

特级教师高建军培养的学生获国际生物竞赛金牌2枚、银牌3枚；

特级教师江文哉培养的学生获国际计算机竞赛金牌5枚、银牌1枚、铜牌1枚。

他们在长期的教学和竞赛辅导中，积累了丰富的参赛经验，丛书汇集了他们培养金牌得主的良方妙计。

竞赛辅导　引路夺冠

新版的特点：融入了最新的教改理念，沉淀了专家的高超智慧，展示了奥赛的国际水平，记载了中国的竞赛历程。

新版的体例：以我国现行的竞赛大纲为依据，将竞赛大纲涉及的内容按专题讲座的形式编写，每个专题作为一讲，每讲分四个部分进行辅导。

第一部分：竞赛导入。全面介绍竞赛中涉及的问题。精析重点，分解难点。

第二部分：解法点拨。提出问题，介绍解决问题的策略。运用方法，点拨解题思路，以达到激活思维、灵活运用知识的目的.

第三部分：点面突破。通过例题，展示知识的综合利用和解题方法的灵活运用，达到点面突破。

第四部分：实战冲刺。有针对性地选择和设计一些对竞赛有指导意义的名题、佳题、新题，为读者提供一个强化知识、开阔视野、提高能力的机会。

书后附有参考答案，对较难的题目，给出了解答提示。

竞赛辅导将伴随您走向金牌之路，上名牌学校，圆金牌梦。

目录

第一讲　整数的基本知识

整数的研究在数学里占有极为重要的地位.特别是整数问题的灵活性和独特性,有利于培养和考查学生的综合素质.因此,各级各类数学竞赛,整数的问题涉及较多.

竞赛导入

(一) 十进制整数及表示方法

通常所说的数都是十进制的数.如:12 本书的 12;1999 年的 1999 等.

一个二位数可表示为$\overline{ab}$或 $10a+b$;一个三位数可表示为$\overline{abc}$或 $100a+10b+c$.其中 a、b、c 是 $0,1,\cdots,9$ 中的数,且 $a\neq0$,如 $1999=1\times10^3+9\times10^2+9\times10+9$.

一般地:一个十进制的 $n+1$ 位的自然数 N 可表示为:

$$\begin{aligned}N&=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}\\&=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0\end{aligned}$$

其中 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$都是整数,$0\leqslant a_i\leqslant9$,且 $a_n\neq0$.

(二) 质数与合数

一个大于 1 的正整数 a,若仅有 1 与 a 这两个正约数,则 a 叫做质数(或素数);若还有其他的正约数,则 a 叫做合数.

若将自然数(正整数)按约数的个数分类,可分为三类:1、质数、合数.

质数、合数具有以下性质:

(1) 1 既不是质数也不是合数.

(2) 质数有无穷多个,不存在最大质数,但存在最小质数 2,也是质数中惟一的偶数.

(3) 若一个正整数 a 的一个约数 P 是质数,则约数 P 叫做 a 的质约数(质因数).

(4) 任何一个大于 1 的自然数 N 都能分解成质因数的连乘积形式:

$$N = P_1^{a_1}P_2^{a_2}\cdots P_n^{a_n} \qquad (*)$$

其中 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$为质数,$a_i(i=1,2,\cdots,n)$为自然数.如果不考虑因数的顺序,这种分解式是惟一的.

(5) 一个合数分成标准式($*$)后,约数的个数为

$$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1).$$

如:$12=2^2\times3$,它的约数的个数为$(2+1)(1+1)=3\times2=6$

(三) 最大公约数与最小公倍数

自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 公有的约数叫做这 n 个数的公约数,其中最大的一个公约数,叫做这 n 个数的最大公约数.记作

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=d,$$

其中 d、n 为正整数,且 $n\geqslant2$.

若$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$,则叫 $a_1a_2\cdots a_n$ 互质.如$(4,9)=1$,就说 4 和 9 互质.

自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 公有的倍数叫做这 n 个数的公倍数,其中最小(除 0 以外)的一个公倍数,叫做这 n 个数的最小公倍数.记作

$$[a_1,a_2,\cdots,a_n]=m.$$

其中 m、n 为正整数,且 $n\geqslant2$.

最大公约数与最小公倍数的求法:

将每个数分解成质因数的乘积,这些数中各质因数最高次幂的乘积就是这些数的最小公倍数;各质因数最低次幂的乘积就是这些数的最大公约数.

通常还可以用公式:$ab=(a,b)[a,b]$

(四) 奇数与偶数

整数可以分为奇数和偶数两类.

在整数中能被 2 整除的数叫做偶数;不能被 2 整除的数叫做奇数.通常用 $2k$ 表示偶数,用 $2k+1$(或 $2k-1$)表示奇数.其中 k 为整数.

奇数和偶数具有下列性质:

(1) 奇数与偶数不可能相等.

(2) 奇数 ± 奇数 = 偶数

奇数 ± 偶数 = 奇数

偶数 ± 偶数 = 偶数

奇数个奇数的和是奇数.

偶数个奇数的和是偶数.

任意个偶数的和是偶数.

a,b 为整数,$a+b$ 与 $a-b$ 有相同的奇偶性.

(3) 奇数 × 奇数 = 奇数

奇数 × 偶数 = 偶数

偶数 × 偶数 = 偶数

若干整数之积为奇数,则必每个数都为奇数.

若干整数之积为偶数,则其中至少有一个偶数.

(4) 偶数的平方能被 4 整除,奇数的平方被 8 除余 1.

(5) 两个连续的整数中,必有一个奇数,一个偶数.

解法 JIEFA LANBO

拼图探索(课案片段)

问题 1: 用 12 块大小相等的长方形记录卡片拼成一个长方形,你能找出多少种拼法?

教师让学生动手进行拼图,经过实验得出如图 1-1,6 种拼图:

问题 2: 请同学们找出规律.(合作学习)

易得出"1 和 12 是 12 的因数","2 和 6 是 12 的因数"……引导得出"拼出长方形的长和宽都是 12 的因数".

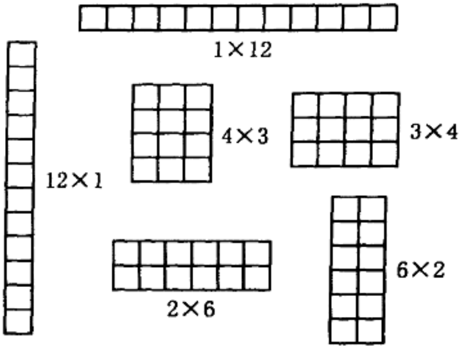

图 1-1

问题 3：16 张卡片能拼成多少个长方形？24 张 25 张卡片拼出的长方形的个数多于 16 张卡片拼出的个数吗？

学生用自己掌握的知识不难得出 16 张卡片拼成 5 种、而 24 张和 25 张可分别拼出 8 种和 3 种.

问题 4：若有 n 张卡片又可以拼成多少个长方形？（根据 2000 年美国数学课程标准内容改编. 原题是：对于任意的 $n\in \mathbf{Z}^{+}$ 有 $n=P_1^{t_1}\cdot P_2^{t_2}\cdot P_3^{t_3}\cdots P_n^{t_n}$（其中 P_i 为素数，且 P_i 两两互不相等，$i=1,2,\cdots,n$），则 n 的正因数的个数是 $(t_1+1)(t_2+1)\cdots(t_n+1)$.）

显然 n 张卡片有 $(t_1+1)(t_2+1)\cdots(t_n+1)$ 种拼法.

【点面突破】

例 1 若 P 为质数，P^3+5 仍为质数，则 P^5+7 为（　　）
（湖北省黄冈市'98 年初中竞赛题）

(A) 质数　　　　(B) 可为质数也可为合数

(C) 合数　　　　(D) 既不是质数也不是合数

分析　$\because P^3+5$ 是质数，则 P 必为偶数，又 $\because P$ 为质数，则 P 只能为 2. 由此 $P^5+7=2^5+7=39$ 为合数.

例 2　满足 90 的所有是合数而不是偶数的正约数的和等于______.(第六届希望杯竞赛培训题)

分析　首先分解质因数求其约数：$90=2\times3^2\times5$，$\therefore$ 正约数的个数 $(1+1)(2+1)(1+1)=12$ 个，显然其中是合数而不是偶数的有 9、15、45 这三个数.

它们的和：$9+15+45=69$

例 3　a、b 为自然数，且 $a=1999b$，则 a、b 的最大公约数与最小公倍数的和等于______.

解　$\because a=1999b$

$\therefore (a,b)=(1999b,b)=b$

$[a,b]=[1999b,b]=1999b$

即 $(a,b)+[a,b]=b+1999b$

$=2000b$

例 4　电子钟 9 分钟亮一次灯，整点响铃，12 点既亮灯又响铃以后，下次在几点既亮灯又响铃？

分析　此题显然是求 9 分与 60 分的最小公倍数，而 9 分与 60 分的最小公倍数是 180 分.

$\therefore$ 下次在 3 点既亮灯又响铃.

例 5　99 个连续自然数之和等于 $abcd$，若 a、b、c、d 皆为质数，则 $a+b+c+d$ 的最小值等于多少？

解　不妨设最小自然数为 x，则有

$x+(x+1)+\cdots+(x+98)=abcd$

$99x+(1+2+\cdots+98)=abcd$