

JP Olympic

金牌之路

竞赛辅导

● 主编 刘诗雄

初中数学

陕西师范大学出版社

金牌之路

竞赛辅导

初中数学

主 编：刘诗雄
副主编：江爱华
编 写：江爱华 陈建国
朱端本 刘诗雄

陕西师范大学出版社

图书代号:JF3N0184

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛辅导/刘诗雄主编. - 西安:陕西师范大学出版社,2000.6(金牌之路丛书)

ISBN 7-5613-1669-0

I. 初... II. 刘... III. 数学-竞赛-初中-教学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 09687 号

责任编辑 叶向东
责任校对 郭健娇
出版发行 陕西师范大学出版社
社 址 西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网 址 <http://www.snuph.com>
经 销 新华书店
印 制 陕西宏业印务有限责任公司
开 本 850×1168 1/32
印 张 13
插 页 2
字 数 307 千
版 次 2003 年 7 月第 2 版
印 次 2003 年 7 月第 1 次
定 价 14.30 元

开户行:光大银行西安南郊支行 账号:0303070-00330004695
读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。
电 话:(029)5307864 5233753 5251046(传真)
E-mail: if-centre@snuph.com

前言

金牌教练 倾心铸造

《金牌之路》丛书由培养国际金牌获得者的全国一流专家联袂编写,涉及到10个省市20个中学的26位作者。他们培养的学生获得国际及国内奖牌数均在全国名列前茅。

著名金牌教练、特级教师张大同自1991年以来培养的学生获国际物理竞赛金牌8枚、银牌1枚,这在全国是独一无二的;

武钢三中特级教师刘诗雄培养的学生获国际数学竞赛金牌7枚;

湖南师大附中特级教师李安等人培养的学生获国际化学竞赛金牌5枚、银牌2枚;

特级教师高建军培养的学生获国际生物竞赛金牌2枚、银牌3枚;

特级教师江文哉培养的学生获国际计算机竞赛金牌5枚、银牌1枚、铜牌1枚。

他们在长期的教学和竞赛辅导中,积累了丰富的参赛经验,丛书汇集了他们培养金牌得主的良方妙计。

竞赛辅导 引路夺冠

新版的特点:融入了最新的教改理念,沉淀了专家的高超智慧,展示了奥赛的国际水平,记载了中国的竞赛历程。

新版的体例:以我国现行的竞赛大纲为依据,将竞赛大纲涉及的内容按专题讲座的形式编写,每个专题作为一讲,每讲分四个部分进行辅导。

第一部分:竞赛导入。全面介绍竞赛中涉及的问题。精析重点,分解难点。

第二部分:解法点拨。提出问题,介绍解决问题的策略。运用方法,点拨解题思路,以达到激活思维、灵活运用知识的目的。

第三部分:点面突破。通过例题,展示知识的综合利用和解题方法的灵活运用,达到点面突破。

第四部分:实战冲刺。有针对性地选择和设计一些对竞赛有指导意义的名题、佳题、新题,为读者提供一个强化知识、开阔视野、提高能力的机会。

书后附有参考答案,对较难的题目,给出了解答提示。

竞赛辅导将伴随您走向金牌之路,上名牌学校,圆金牌梦。



目 录

第一讲 整数的基本知识

竞赛导入	1
解法点拨	3
点面突破	4
实战冲刺	11

第二讲 整除的基本知识

竞赛导入	13
解法点拨	15
点面突破	16
实战冲刺	22

第三讲 有理数

竞赛导入	24
解法点拨	25
点面突破	26
实战冲刺	31

第四讲 整式

竞赛导入	34
解法点拨	35
点面突破	36
实战冲刺	42

第五讲 分式

竞赛导入	44
解法点拨	45
点面突破	46
实战冲刺	52

第六讲 根式与指数

竞赛导入	55
解法点拨	57
点面突破	57
实战冲刺	64

第七讲 恒等变形

竞赛导入	66
解法点拨	67
点面突破	68
实战冲刺	73

第八讲 实数与完全平方数

竞赛导入	75
解法点拨	76
点面突破	77

实战冲刺	83
------	----

第九讲 一次方程(组)与一次不等式(组)

竞赛导入	84
解法点拨	86
点面突破	87
实战冲刺	95

第十讲 一元二次方程的判别式与韦达定理

竞赛导入	97
解法点拨	98
点面突破	99
实战冲刺	107

第十一讲 方程的根

竞赛导入	109
解法点拨	110
点面突破	111
实战冲刺	122

第十二讲 特殊方程

竞赛导入	124
解法点拨	124
点面突破	125
实战冲刺	133

第十三讲 不定方程与应用题

竞赛导入	135
解法点拨	135

点面突破	136
实战冲刺	147

第十四讲 全等三角形

竞赛导入	150
解法点拨	150
点面突破	151
实战冲刺	160

第十五讲 四边形

竞赛导入	163
解法点拨	163
点面突破	164
实战冲刺	173

第十六讲 相似三角形

竞赛导入	176
解法点拨	176
点面突破	177
实战冲刺	188

第十七讲 等积变换与面积法

竞赛导入	191
解法点拨	192
点面突破	192
实战冲刺	202

第十八讲 平移、对称与旋转

竞赛导入	206
------------	-----

解法点拨	206
点面突破	208
实战冲刺	216

第十九讲 几何计数问题

竞赛导入	219
解法点拨	219
点面突破	220
实战冲刺	226

第二十讲 三角函数与解直角三角形

竞赛导入	229
解法点拨	230
点面突破	231
实战冲刺	239

第二十一讲 简单函数及其应用

竞赛导入	241
解法点拨	242
点面突破	243
实战冲刺	250

第二十二讲 二次函数

竞赛导入	253
解法点拨	254
点面突破	256
实战冲刺	265

第二十三讲 函数最值以及应用

竞赛导入	267
解法点拨	268
点面突破	269
实战冲刺	279

第二十四讲 圆

竞赛导入	281
解法点拨	281
点面突破	282
实战冲刺	289

第二十五讲 三角形的四心

竞赛导入	293
解法点拨	293
点面突破	294
实战冲刺	301

第二十六讲 平面几何中的定值与最值

竞赛导入	303
解法点拨	303
点面突破	304
实战冲刺	313

第二十七讲 抽屉原理

竞赛导入	316
解法点拨	317
点面突破	317

实战冲刺	322
------------	-----

第二十八讲 分类与讨论

竞赛导入	323
解法点拨	324
点面突破	324
实战冲刺	333

第二十九讲 观察、归纳与猜想

竞赛导入	336
解法点拨	336
点面突破	337
实战冲刺	346

第三十讲 杂题选解

竞赛导入	349
解法点拨	350
点面突破	351
实战冲刺	358

参考答案	359
------------	-----

第一讲 整数的基本知识

整数的研究在数学里占有极为重要的地位.特别是整数问题的灵活性和独特性,有利于培养和考查学生的综合素质.因此,各级各类数学竞赛,整数的问題涉及较多.

竞赛导入

(一) 十进制整数及表示方法

通常所说的数都是十进制的数.如:12本书的12;1999年的1999等.

一个二位数可表示为 \overline{ab} 或 $10a + b$;一个三位数可表示为 \overline{abc} 或 $100a + 10b + c$.其中 a, b, c 是 $0, 1, \dots, 9$ 中的数,且 $a \neq 0$,如 $1999 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 9$.

一般地:一个十进制的 $n + 1$ 位的自然数 N 可表示为:

$$\begin{aligned} N &= \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \\ &= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0 \end{aligned}$$

其中 $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 都是整数, $0 \leq a_i \leq 9$,且 $a_n \neq 0$.

(二) 质数与合数

一个大于1的正整数 a ,若仅有1与 a 这两个正约数,则 a 叫做质数(或素数);若还有其他的正约数,则 a 叫做合数.

若将自然数(正整数)按约数的个数分类,可分为三类:1、质数、合数.

质数、合数具有以下性质:

(1) 1既不是质数也不是合数.

(2) 质数有无穷多个,不存在最大质数,但存在最小质数2,也是质数中惟一的偶数.



(3) 若一个正整数 a 的一个约数 P 是质数, 则约数 P 叫做 a 的质约数(质因数).

(4) 任何一个大于 1 的自然数 N 都能分解成质因数的连乘积形式:

$$N = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \cdots P_n^{a_n} \quad (*)$$

其中 $P_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为质数, $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为自然数. 如果不考虑因数的顺序, 这种分解式是惟一的.

(5) 一个合数分成标准式 $(*)$ 后, 约数的个数为

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1).$$

如: $12 = 2^2 \times 3$, 它的约数的个数为 $(2+1)(1+1) = 3 \times 2 = 6$

(三) 最大公约数与最小公倍数

自然数 a_1, a_2, \dots, a_n 公有的约数叫做这 n 个数的公约数, 其中最大的一个公约数, 叫做这 n 个数的最大公约数. 记作

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = d,$$

其中 d, n 为正整数, 且 $n \geq 2$.

若 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, 则叫 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 互质. 如 $(4, 9) = 1$, 就说 4 和 9 互质.

自然数 a_1, a_2, \dots, a_n 公有的倍数叫做这 n 个数的公倍数, 其中最小(除 0 以外)的一个公倍数, 叫做这 n 个数的最小公倍数. 记作

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = m.$$

其中 m, n 为正整数, 且 $n \geq 2$.

最大公约数与最小公倍数的求法:

将每个数分解成质因数的乘积, 这些数中各质因数最高次幂的乘积就是这些数的最小公倍数; 各质因数最低次幂的乘积就是这些数的最大公约数.

通常还可以用公式: $ab = (a, b)[a, b]$

(四) 奇数与偶数

整数可以分为奇数和偶数两类.

在整数中能被 2 整除的数叫做偶数；不能被 2 整除的数叫做奇数。通常用 $2k$ 表示偶数，用 $2k+1$ （或 $2k-1$ ）表示奇数。其中 k 为整数。

奇数和偶数具有下列性质：

(1) 奇数与偶数不可能相等。

(2) 奇数 \pm 奇数 = 偶数

奇数 \pm 偶数 = 奇数

偶数 \pm 偶数 = 偶数

奇数个奇数的和是奇数。

偶数个奇数的和是偶数。

任意个偶数的和是偶数。

a, b 为整数， $a+b$ 与 $a-b$ 有相同的奇偶性。

(3) 奇数 \times 奇数 = 奇数

奇数 \times 偶数 = 偶数

偶数 \times 偶数 = 偶数

若干整数之积为奇数，则必每个数都为奇数。

若干整数之积为偶数，则其中至少有一个偶数。

(4) 偶数的平方能被 4 整除，奇数的平方被 8 除余 1。

(5) 两个连续的整数中，必有一个奇数，一个偶数。

解法与提示

拼图探索(课案片段)

问题 1：用 12 块大小相等的长方形记录卡片拼成一个长方形，你能找出多少种拼法？

教师让学生动手进行拼图，经过实验得出如图 1-1, 6 种拼图：

问题 2：请同学们找出规律。(合作学习)

易得出“1 和 12 是 12 的因数”，“2 和 6 是 12 的因数”……引导得出“拼出长方形的长和宽都是 12 的因数”。

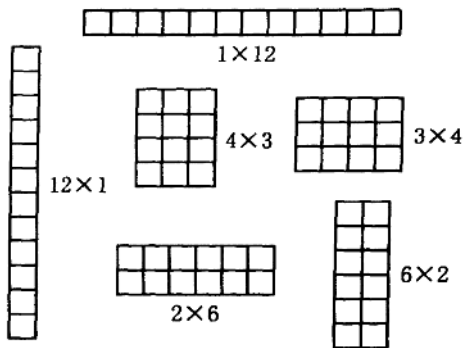


图 1-1

问题 3: 16 张卡片能拼成多少个长方形? 24 张 25 张卡片拼出的长方形的个数多于 16 张卡片拼出的个数吗?

学生用自己掌握的知识不难得出 16 张卡片拼成 5 种、而 24 张和 25 张可分别拼出 8 种和 3 种。

问题 4: 若有 n 张卡片又可以拼成多少个长方形? (根据 2000 年美国数学课程标准内容改编. 原题是: 对于任意的 $n \in \mathbb{Z}^+$ 有 $n = P_1^{t_1} \cdot P_2^{t_2} \cdot P_3^{t_3} \cdots P_n^{t_n}$ (其中 P_i 为素数, 且 P_i 两两互不相等, $i = 1, 2, \dots, n$), 则 n 的正因数的个数是 $(t_1 + 1)(t_2 + 1) \cdots (t_n + 1)$.)

显然 n 张卡片有 $(t_1 + 1)(t_2 + 1) \cdots (t_n + 1)$ 种拼法。

【点面突破】

例 1 若 P 为质数, $P^3 + 5$ 仍为质数, 则 $P^5 + 7$ 为()
(湖北省黄冈市'98 年初中竞赛题)

- (A) 质数 (B) 可为质数也可为合数

(C) 合数 (D) 既不是质数也不是合数

分析 $\because P^3 + 5$ 是质数, 则 P 必为偶数, 又 $\because P$ 为质数, 则 P 只能为 2. 由此 $P^5 + 7 = 2^5 + 7 = 39$ 为合数.

例 2 满足 90 的所有是合数而不是偶数的正约数的和等于_____. (第六届希望杯竞赛培训题)

分析 首先分解质因数求其约数: $90 = 2 \times 3^2 \times 5$, \therefore 正约数的个数 $(1+1)(2+1)(1+1) = 12$ 个, 显然其中是合数而不是偶数的有 9、15、45 这三个数.

它们的和: $9 + 15 + 45 = 69$

例 3 a, b 为自然数, 且 $a = 1999b$, 则 a, b 的最大公约数与最小公倍数的和等于_____.

解 $\because a = 1999b$

$$\therefore (a, b) = (1999b, b) = b$$

$$[a, b] = [1999b, b] = 1999b$$

$$\begin{aligned} \text{即 } (a, b) + [a, b] &= b + 1999b \\ &= 2000b \end{aligned}$$

例 4 电子钟 9 分钟亮一次灯, 整点响铃, 12 点既亮灯又响铃以后, 下次在几点既亮灯又响铃?

分析 此题显然是求 9 分与 60 分的最小公倍数, 而 9 分与 60 分的最小公倍数是 180 分.

\therefore 下次在 3 点既亮灯又响铃.

例 5 99 个连续自然数之和等于 $abcd$, 若 a, b, c, d 皆为质数, 则 $a + b + c + d$ 的最小值等于多少?

解 不妨设最小自然数为 x , 则有

$$x + (x+1) + \cdots + (x+98) = abcd$$

$$99x + (1+2+\cdots+98) = abcd$$