無窮數之妙用

譯者　王昌銳

徐氏基金會出版

無窮數之妙用

譯者　王昌銳

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　曾迺碩　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國五十九年四月二十四日初版

無窮數之妙用

定價　新台幣二十五元　港幣四元

1.30

譯者　王昌銳　臺灣省立高雄工業專科學校教授

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　臺北郵政信箱3261號　電話519784號
發行人　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　林碧鑾　郵政劃撥帳戶第15795號
印刷者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話979739號

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認為絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，允為社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類顧目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會為促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大衆閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

7.4.18

譯序

數學爲無窮數之科學。今日科學發達，數學昌明。許多科學數目，數學數目，多以無窮數出之，方得其眞實意境。所以無限小數，無窮級數，無理數，超越數，……，成爲純粹數學與應用數學之研究主流。

試觀"一尺之棰，一再等分，永世不絕"之論，無窮也。一直綫由千千萬萬個連綿不絕之點，排列而成，亦無窮也。各種級數，各種三角函數，反三角函數，對數函數，指數函數，以及 π ，e ，$\sqrt{2}$ ，$\sqrt{3}$ ，$\sqrt{5}$ ，……等無理超越之數，莫非無窮多項之和構成，而且了無止境。日常所取之項數愈多，其所求得之數，愈爲眞確，然猶未盡其緻，而可謂無適當之數，可概其全，只有以"無窮數"名之，而以"……"示之，以免失眞。可見數之世界，其數無窮。而許多表示特別數値之數式，其項數亦無窮也。人類對此無窮之數，常發生驚奇，讚美與嚮往之情，從而使哲學家，神學家，數學家，科學家，對之發生高度興趣，熱心研究，以作科學研究之強力工具。

本書對流行之無窮數，無論在涵義及內容方面，均作平舖直敘之解釋，並輔以許多頗值研究之例題，使讀者瞭解無窮序列極限數及無窮圖象極限點之存在性，藉以促進對無窮數概念之認識，從而掌握微積分及其他數學方面，所運用之基本極限概念。

本書作者子平教授（ Leo Zippin ），於 1905 年，生於紐約城，畢業於賓夕法尼亞大學。對拓撲學，頗富研究，且多著作。1938 年以來，即任紐約昆士大學（ Queens College ）教授。

本書爲美國數學會，所編印"新數學文庫"之第七卷，頗適我國大中學生及教師參考，故應徐氏基金會之約，予以迻譯。書中譯名，多以流行爲主，敘述方式，力存其眞，求其"信"而已矣。譯稿多勞吾妻蔣君英女士，協助整理，致得早覩厥成，併此致謝。

中華民國五十八年十月廿一日
湘潭王昌銳序於高雄工專

致讀者

本書爲數學專家所撰一系列書籍之一，其目的在確立多數中學生及社會人士，頗感興趣而能瞭解之某些重要數學觀念。新數學文庫之多數篇幅，包含中學課程中，不常包括之題材；難易各殊，而卽使於同一書內，有些部份，卽較其他部份，需要較高程度之專注。由是，讀者需以少量之技能學識，以瞭解大部此等書籍，必須作明智之努力。

如讀者以往，僅於教室接觸數學，則應記住於心，數學書籍，不能快速閱讀。亦不應期望一覽之餘，便能瞭解書之所有部份，而應很自然的越過複雜部份，以後再回來讀，以後續之說明，常能澄淸一種理論也。相反的，包含完全熟稔資料之部份，則可快速閱讀。

學數學之最佳途徑爲“做”數學，各書均有習題，有些且需縝密思考。奉勸讀者，養成手持紙筆，從事閱讀之習慣；如此，數學對之，將變爲意義倍增。

對著者及編者而言，此爲一新的嘗試，均願對有助於本文庫籌印之許多中學師生，表示感謝之意。

編　者

目　錄

前 言

本書大部內容，要求讀者，於數學上，應有相當之技能水準。彼可爲即將開始數學課程之中學生，或爲已往學過而淡忘者。相反的，本書除第一章外，均爲數學的——即謂其爲某種抽象觀念之細密推理與陳述。讀者之欲尋求有興趣題材者，應予準備。因此，須稍微作業。通常須時常自行思考，偶或作些書中所列習題。書末，附有某些習題解答。但將不使讀者，於任何處所，停留太久；許多觀念，將於稍後重複，而可發現第二觀點，以瞭解初次相遇而未明白之處。此種陳述，基於數學性質之一啟發。所有重要敍述，不能說必可立刻解釋一種數學觀念。

許多讀者，或許納罕，人類是否可能基乎遙測課題從事通信，以作“無窮數之妙用”，但，如所將見，任何兩人之明白全數，

1，2，3，4，5，…，

者，能互相討論無窮數，且有許多可談。

余撰本書，係由希伯特（ David Hilbert ）定數學之義爲“無窮數之科學”時，所發表之觀點而來，數學之有趣定理，不同於其他方面之有趣結果，因於其所謂之驚奇與美妙以上，尚有“一無窮方面”也；此常爲定理無窮鏈鎖之一部份，以下，解釋余意所指：$1+3+5+7+9$之事實，首五奇整數之和，等於5乘5，爲一有趣之“奇”性；但對所有n，首n奇整數之和，爲n^2之定理，乃爲數學問題。

希望讀者，當余謂數學專家，於哲學觀點言之，並不比任何他人，可自命不凡，以爲瞭解較深，以作“無窮數之意義”時，給予信賴。我想，由多數數學家，不談論此種問題，和有些人從不苟同之事實，可以具見。

最後，願對勃朗克司科學中學，數學教員美仙夫人（Mrs. Henrietta Mazen），由余所準備之大部資料中，選刊本書資料，表示特別謝意，讀者欣賞本書者，須知美仙夫人所擔任之職務，如何重大。對本書習題，提供大部解答之斯處子也小姐（ Miss Arlys Stritzel ），余亦受賜良多。

第一章 普通及數學的無窮數

未從事數學科學工作者，常懷疑無窮數，有何用途；如“使用”某物，意即得到某種管制於上之形式．但無窮數之用途，確於此意義中，建立數學家專職

其他專業人員，亦使用某些無窮數，如建築師與工程師，均有其三角函數及對數之類的表件，但不需記住，此均由某種適當無窮級數之許多項數計算得來．彼等很自由的，由數學曲綫與曲面之無盡寶藏，取用各物，而不需知乎無窮數．哲學家與神學家，知乎無窮數，但就數學家觀點言，彼等所用，不如其讚美之多．

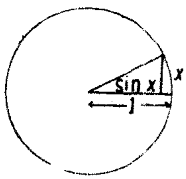

圖 1·1 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots$

數學家亦歌頌無窮大；偉大的希伯特（ David Hilbert 1862 — 1943，二十世紀一流數學家之一）曾言：於所有年代中，此思想曾極強烈的刺激人們想像力；且謂康德（ G.Cantor 1845 — 1918，創造集合論）之事功，“引人進入無窮數之樂園”，但數學家亦使用無窮數．其次兩章，將予顯示．彼爲世界上，最偉大之無窮數搜集者一所有各型各量之無窮數，無窮多數排列，均其原料，亦其工具．

於回到數學以前，且花點時間，列舉幾種普通日常無窮數之例子；如所將見，其與數學的無窮數，相關並不過遠，由一俗語開始：“常有兩種可能性”，此處且呼之爲“零”與“一”（ "Zero"and"One" ）．因每一選擇，帶來兩種新的備用品，此遂引致如圖 1·2 之無窮數圖狀

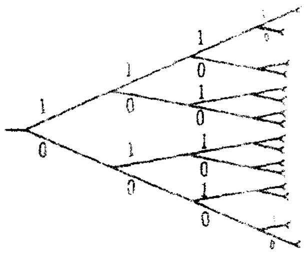

圖 1・2　常有兩種可能性

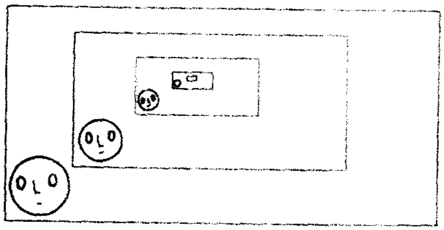

圖 1・3　無窮數之模擬

其次，許多人能回想其年青時代，某種烤蘇打之盒子，而見其無窮數之第一圖形。此盒之上，有一盒之圖，其上，又有一表示另盒之同樣圖形，如此類推，圖 1 . 3 總合此所給予之印象。

其次，有特別爲兒童設計之無窮數模擬。日本藝術家所製作之木偶，打開來，中有相似木偶，其內又有另一木偶，如此類推，達5,或6之序列。

詩人亦曾運用文字，其方式離無窮數之數學意味，並不甚遠，茱麗葉（ Juliet ）爲表示對羅米歐（ Romeo ）之愛，而曰：“我給你的多，我得到的多”（“the more I give to thee, the more I have”,）誇張基數無窮數之一特殊性質；對布果克（ Blake ）玄想，“於手掌握住無窮數，支持至一小時”；對應於數學事實，一短如掌紋“生命綫”之綫段，其上面之點，多似無窮長之綫。於安東尼及克里奧派屈（Anthony and Cleo－patra ）中，安諾巴布司將軍（ General Enobarbus ）敍述克里奧派屈：“時間不能促其凋，風習不改伊無窮之變”。雨果（Hugo）描寫莎士比亞（ Shakespeare ）道：“天才絕頂，突出無窮”。

於一輕鬆笑話中，羅斯坦德（ Rostand ）之巴格勒克（ Cyrano de Bergerac ），於其他登月幻想計劃中，使用一種數學歸納之詼諧形式："我站立台上，抓一強力磁石，使我直向上昇，台亦隨之，我再抓住磁石，再吸向上昇，台又隨之，如此重複，我登上月球了"。

極有教育意義者，爲仙老（Zeno 元前5世紀之希臘哲學家。）之玄學理論，導致物理運動爲不可能之結論，彼引述之言大致如下："亞起爾司（ Achilles ）不能趕上逃遠之龜，因於時間區間以內，彼費時前往龜原來所在之處，而龜已走開。但即使其將等候他，亞起爾司應先抵達彼等之間的中途點，除非彼先抵達至該點之半途處，不能作到。如此類推，達於無窮個半途點，對如此之無窮退後概念，彼甚至不能得一起步，故運動爲不可能"。仙老另一美妙矛盾之論，爲試欲證明空間及時間，不可無窮劃分，爲不可能。仍有另者，常云："移動之箭，於各瞬時，靜止"。此等似是而非之論，處理數學無窮數之一重要應用，值得於此討論，因移動之箭的謬論，乃運動數學概念，形成之源也。一運動相似於一時間表；更精確言之，爲配合想像空間有限之點，對想像時間各短暫瞬時之一函數。由此觀點，箭於某已知瞬時爲"靜止"之說明，意即其位置已予定義；此遂提供函數。函數之定義一運動者，能如任何其他數學函數一樣確立，即謂由一適切之數值表，由一公式，或由一循環描述行之。

如仙老之龜，於亞起爾司前方一呎，開始運動

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\text{呎},$$

（此確係一呎）於

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\text{秒}$$

（此確係一秒）內，亞起爾司移動

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\text{呎},$$

（此實係二呎）於

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots\text{秒}$$

（此實爲一秒）內，則競賽於一秒內完畢。

於歐道克助司（ Eudoxus, 350B.C. ）及阿幾米德（ Archimedes, 150B.C. ）之工作以前，此等無窮級數，不能瞭解；於十七世紀有微積分發展

，無窮級數邏輯，又重新出現。此等級數或不需要"答覆"仙老，但於其自身立場，彼與相調，十分融洽。"

$$\cdots,\frac{1}{9},\frac{1}{8},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1$$

圖 1.4

仙老之第二矛盾，導致某些趣事，來自直綫上各對點間，有另點在之事實。隨而一綫段，包含一無窮降減序列，即謂一點之順序序列，無一極小之項。圖 1.4 中範例，即證明此；式如 $1/n$ 之分數，依大小順序排列，無超乎一切之項，於全數集中，無對應序列存在。仙老依然完全關心於面臨之應用數學問題：數學爲一不需"對生命眞實"之經驗觀念化。無處，較幾何綫段可無窮劃分之簡單事實，爲更顯明，但於鋼絲實質則否。當然，此事實於仙老時代，並不若今日時代之可以確立。然而，今日時代，與彼相同，數學綫段，對處理實物（震動繩索、彈性柱樑、堅固物體）之類許多特別問題，用爲模範。總而言之，用爲時間連續，及一度空間連續之模範，而於此用途中，佔據吾人之世界概念。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)=1+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=1$$

圖 1.5 逐日觀察之數學陳述：兩友人—— 一人大於他人四歲—— 由於時間逝去，似趨相同年齡

最後，且觀察成對之數學意味，逐日範例，任何人有一大其幾歲之朋友，注意於時間逝去，如何顯出兩年齡之差別。此處有一對差爲常數，但其比率則否之變數實例；於本例中，其比率趨於 1。

如 C 表示價格 而 S 表示售價 則 $\frac{S-C}{C}$ 爲基於成本之逐件利益。	如 生產一絨衫，成本 8 元 而 以 12 元出售 則 $\frac{12-8}{8}=\frac{1}{2}$ 爲基於成本之利益。

而	而
$\frac{S-C}{S}$ 爲基於售價之每件利潤。	$\frac{12-8}{12}=\frac{1}{3}$ 爲基於售價之利潤。

圖 1·6

末例取自商業。當一物以 1 元購進，而以 2 元出售，則如利益係基於購價計出，乃有 100%之利潤；但如以出售價計，則有 50% 利潤。一物能以隨意之基於購價的大百分比利潤出售，且能以出售價格 99 %或 99·99 %利潤出售但於實際或理論上，不能於出售價格 100%之利潤出售，讀者應對此自行追尋，既爲，此係一種可能引致，對不存在之"極限"，從事探尋情勢的自然例題。或許，最容易之途徑，爲試用各種出售價格，以考査此種特別問題。

現且回至數學中無窮數之使用，茲分四類，以助讀者思考：

第一類，係用幾何定理解釋：如三角形之兩邊相等，則其底角相等。（歐幾里德幾何原本第一册定理 5 。）

〔證〕給予 $AC=BC$（表示兩者長度相等。）見圖 1.7 。比較三角形 ABC 本身，但其次讀爲 BAC，乃得 $AC=BC$，及 $\angle ACB=\angle BCA$。因此，依歐氏幾何第一册定理 4 ，角 CAB 應等於角 CBA 。

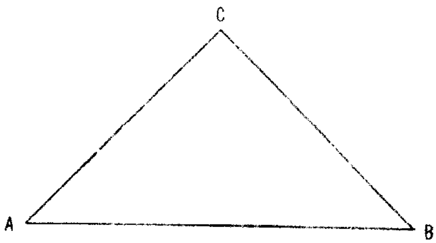

圖 1·7

此遂證得等腰三角形，底角相等。將三角形翻轉覆疊原三角形之上，如是角 A 成 B ，B 成 A ，及 C 成 C 。

說明及證明，基於常用之定理"兩邊及其夾角"，或"s.a.s."（意爲"邊－角－邊"），未語及無窮數。但等腰三角形級（一切形狀與大小）爲一無窮數級，而對各種此類三角形，定理成立。

第二類，由某數目，二項式係數表示。畢達哥拉司（Pythagoreans）及早期文化知之，但因派司克阿（1620）使用數學歸納法以討論之，乃與

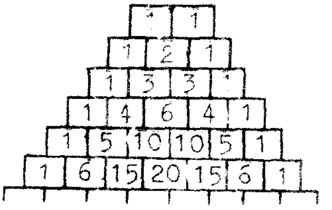

圖 1·8 派司克阿（pascal）三角形．此排列之第 n 列，提供$(a+b)^n$ 展開式中出現之係數．

配合．回想二項係數，乃當（$a+b$）本身，自乘 n 次時，所出現之係數．例如，當$n=3$時，乃有

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

而其二項係數爲1，3，3，1．因n可爲任何全正數，遂有一情況之顯無窮數，各包含所計算之有限集中．

求曲線上一點，切於曲線之切線問題，屬於第三類．此易得知此問題，與一無窮作業配合．因直線對一曲線之切點，可用隨意之小段曲線及直線之小線段決定，遂產生解此問題，亦解瞬時速度定義物理問題之數學作業．簡言之，此速度即汽車上之速率計讀數．運動之速度及直線之斜率，均比率之極限．

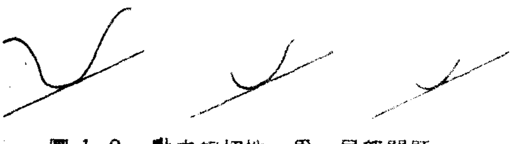

圖 1·9 一點之相切性，爲一局部問題．

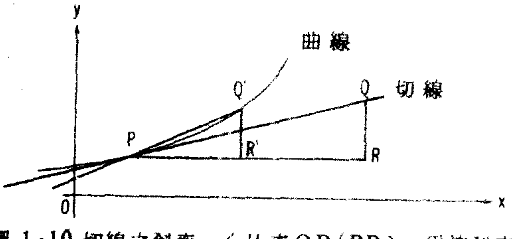

圖 1·10 切線之斜率，（比率QR/PR），爲弦斜率，由於點Q' 沿曲線接近 P 之極限（比率Q'R'/R'P）．

第四類屬於抽象集合理論，且與無窮基數相關。而由圓似能有較無窮直線為多之點的似是而非之論所嚴酷顯示如圖 1·11 。直線各點，與下半圓上一點，相與成對。即如以圓之兩點，與直線一點相配，仍有點（ P及Q ）留下。

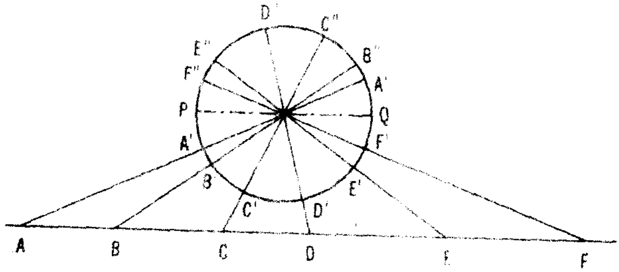

圖 1·11

各種如此之情況中，如何處理無窮數，將於本書討論，但能簡明描述如下：欲處理第一類，使用單一代表性題材；因其毫無特殊之處，乃對一切，同樣作用。第二類問題處理，通常與第一者同，但有時落入可用數學歸納法處理之形態，或主同義於"無窮降減原則"，或亦同義於"第一整數原則"，如所將見。

第三類包含配合"極限"標誌之一無窮作業變化。僅將研究一種如此之作為，引向某種圖形之長度定義；此遂引致無窮級數和之定義。

雖無窮級數之總和與定義（及計算），與已知封閉曲綫所界面積問題。密切相關，而對面積及早經提過之切性問題，將不予討論。讀者可參考一本好的微積分便知〔亦可參閱1941年，牛津大學出版社，紐約版：康涅特（ Courant ）及勞畢斯（ Robbins ）著，數學為何？〕

第四類問題，要求發明一種新型數學推理，直等到康德之天才出現。康德所運用之討論，均直截之普通計數作為推想，但彼大膽用之——直接應用於無窮集合。或許，其最偉大之單獨發明。為具有各種基數無窮數，及特別，綫段上點集，為一無比的較所有全數集合為"貴重"之無窮數事實。其此類作為與其他方面，將於第二及六章論之。

本書將同意使此無窮數最後形象，進入無窮數妙用數學主流之某種方法指示。

第二章　由自然數至$\sqrt{2}$

本章主要部份，包含一序列之短節，各別說明某特別之無窮集合，無窮作業，或掌握無窮數之觀點與技術。曾試圖儘可能分別各自處理；然而，第一節即開始於三個無窮數！

2.1　自然數 (*Natural numbers*)

於無窮數排列之首，除開其餘，爲序數，不能進行製造無窮集合，或證明任何題與相關之事，除非，最低限度已着手於已製作成功之一無窮集合。如斯之集合存在，如序數：1，2，3，4，5，6，……如此類推。關於此等數目，常稱爲自然數，而可自由假定以下事實：

a）各自然數，有一緊跟於後之數，如是連續進行，而無止境。

b）無一重複；各數均不同於所有以前各數。

c）各全數能於一定數目之步驟獲致，由一開始，而計數之，經由後繼綫，每次一個。

2.2　序列之討論

因自然數集合中之一切數目，不能於一定次數書出，乃用“…”，即中止點或重複點，通常僅用其三；對應之詞句爲“如此類推”…或“如此進行”。於數學中，常用於項之短短序列以後，以示所書集合爲無止境，及該序列之形成，依據明晰之計劃。以下諸例，將顯示其義之所指；讀者請於各情況，填上其次幾項。

1，4，7，10，13，…，

5，3，5，3，5，3，…，

5，3，7，4，10，6，14，…，

1，1，2，3，5，8，13，21，34，…，