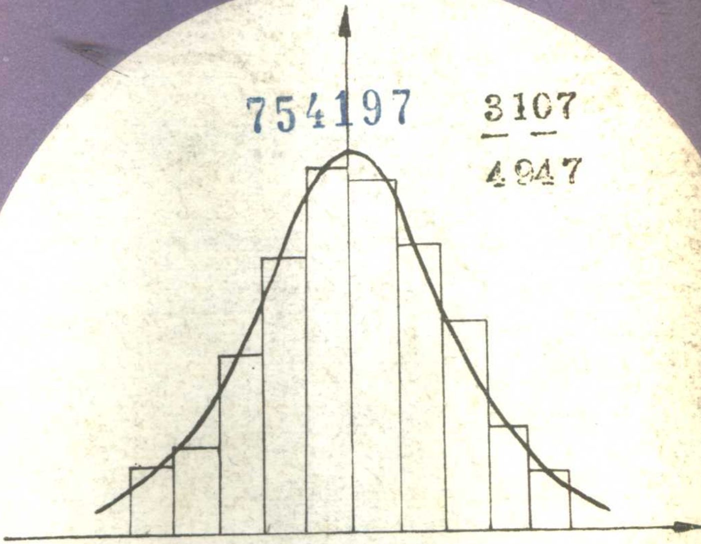

中学概率论与数理统计

陕西科学技术出版社

中学概率论与数理统计

赵觐周　杨培亘　编

魏庚人　校

中学概率论与数理统计
赵觐周　杨培恒　编
魏庚人　校
陕西科学技术出版社出版
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行　　汉中地区印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张7.75　字数160,000
1983年2月第1版　1983年2月第1次印刷
印数1—11,000
统一书号：7202·29　定价：0.64元

出 版 说 明

为了提高教学质量，根据教育部教学大纲的要求和现行教材，我们组织编写了一套中学数、理、化教学参考读物，陆续出版。

前　言

概率论和数理统计是研究随机现象（偶然现象）规律性的学科。它起源于十七世纪，发展到现在，已经深入到各个领域，几乎没有一门自然科学，不在某种形式下应用概率的方法。它是研究自然现象，处理现代工业、农业、国防和科学技术问题的有力工具，在现代数学中占有重要的地位。

为了实现四个现代化，尽快地普及概率论和数理统计的知识，根据教育部教学大纲的规定，我国已把一些有关概率论和数理统计的基础理论和简单的应用知识列入中学数学教学内容。对于广大中学数学教师来说，概率论和数理统计的教学还是初次遇到。编写本书的目的，就是为在中学担任概率统计教学的同志提供一些参考资料。为使中学教师进一步加深对中学教材中有关“概率”和“数理统计”内容的理解，本书在中学教材的基础上将这两部分内容加深加宽，同时在叙述中也列举了较多的例子。

在编写过程中得到了任民同志、徐一正同志的帮助，定稿时代文惠同志细看了原稿，改正了一些笔误，特此致谢。

由于我们水平所限，书中缺点和错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编　　者

一九八〇年

目　　录

第一章　随机事件与概率

第一节　随 机 事 件

(一) 随机现象

在自然界中有许多现象是具有必然性的，例如“在标准大气压下，水加热到100℃时沸腾”，这是必然会发生的。“没有水分，种子会发芽”、“同性电荷互相吸引”等则是必然不会发生的现象。在一定条件下必然发生的现象叫必然现象；在一定条件下必然不可能发生的现象叫不可能现象。必然现象的反面就是不可能现象。对于必然现象的规律性，大都通过代数方程、微分方程等来研究，物理学和化学中的很多定律也是探讨这类现象的结果。

在自然界中还大量存在着这样的现象，它在一定条件下可能发生，也可能不发生，这种现象叫做**随机现象**。

例如在抽样检查工业产品时，随意抽一个产品，“抽到次品”就是一个随机现象。它可能发生，也可能不发生，因为也有可能“抽到正品”。

在小麦试验田中，随意抽一个麦穗，“麦粒是50颗”是一个随机现象。因为抽到的麦穗麦粒也可能超过50颗或不到50颗。

在进行实弹射击时，一次射击“射中”目标是个随机现象。“射不中”也是个随机现象。

在气象科学方面，“西安六月雨量正常”；在地震科学方面，“中国一年大震一次”；这些都是随机现象。因为根据历史记录，这些现象在某些年份确实发生了，但在另外一些年份就没有发生。

概率论就是研究随机现象的数量规律性的数学学科。

（二）随机事件的概念

在一定条件下，可能发生，也可能不发生的事件叫随机事件；如果在一定条件下，某事件必然发生，则叫必然事件；在一定条件下必然不会发生的事件，叫不可能事件。

“在一定条件下”指的是一组条件的实现，一组条件实现一次，叫一次试验。在相同的条件下，可以重复进行的，并且结果不能事先肯定的试验，叫做随机试验，我们把它记为E。引入随机试验这一术语后，随机事件就成为随机试验的结果。例如从1，2，…，9这9个数中任取一数，就是一个随机试验。因为，第一、取数可以重复进行；第二、它的结果具有不肯定性，这个试验的结果即为随机事件。其中有一种是基本的结果，例如“取到1”，“取到2”，…，“取到9”。把任一基本的结果称为基本事件。这个例子中共有九个基本事件。还有一种结果不是基本的结果，而是由一些基本结果组成的。例如“取到奇数”，它是由“取到1”，“取到3”，“取到5”，“取到7”，“取到9”这五个基本事件组成的。这类事件叫复合事件，或简称事件。

一般地，设有一个随机试验E，它有n个可能的基本结果，记为$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$，并把每一个可能出现的结果叫做基本

事件．基本事件的全体是必然事件，记为$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$．在上面的例子中，有九个基本事件，记为$\omega_1=$“取到1”，$\omega_2=$“取到2”，$\omega_3=$“取到3”，…，$\omega_9=$“取到9”。（注：这里“=”代表“表示”二字，$\omega_1=$“取到1”代表“$\omega_1$表示‘取到1’”．这种写法在本书中用得很多）基本事件的全体即必然事件$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_9\}$．Ω中的一部分基本事件组成的事件是随机事件．如$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_8\}=$“抽到偶数”，$B=\{\omega_3,\omega_6,\omega_9\}=$“抽到3的倍数”．$A$与$B$都是随机事件．不可能事件是不含有任何基本事件的事件．

我们也可以把随机事件和“集合”联系起来．所谓一个集合，就是任何若干个对象的总体．集合简称集．每一个属于这个集合的对象称为集合的一个元素．任何对象，对于一个集合而言，或属于这个集合，或不属于这个集合，二者必居其一，不可并存．

一个对象是集合A的元素时，记为

$$\omega\in A.$$

读作：ω属于A；若ω不是A的元素，记为

$$\omega\overline{\in}A.$$

读作：ω不属于A．

这样，一个随机试验E，它的全体基本事件构成一个集合$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，Ω称为$E$的基本事件空间或称为对于试验$E$的必然事件；如果$A$的全部元素都是Ω中的元素，则称$A$是Ω的一个子集，把Ω的子集$A$叫做随机事件；把不含任何元素的集叫做空集，空集称为不可能事件，记为ϕ．这里我们用集合论的观点来看待事件是有道理的，因为理论

和实践都说明了事件间的关系和集合间的相应关系是一致的。用集合的语言研究事件的关系常常是很简便的。

（三）事件发生的意义

现在我们有必要明确一下事件发生的意义。当事件A的一个元素ω发生时，就称A发生。

例如在前面所举出的基本事件空间$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_9\}$的例子中，若$\omega_3=$“抽到 3 ”发生，就说明$A=$“抽到奇数”发生。反之，若$A=$“抽到奇数”发生，就意味着$A$的某一个元素发生。注意，$A$的元素永远是不相同的，即基本事件永远是不同的，在一次试验下，只能发生一个基本事件。但是在一次试验下，却可以发生许多复合事件，例如$\omega_3=$“抽到 3 ”发生，这时$A=$“抽到奇数”发生，$B=$“抽到 3 的倍数”发生。

由于一个事件的发生永远表示它所含的某一个基本事件发生，因此，不可能事件永远不会发生，因为它不含有任何一个基本事件。必然事件在每次试验下都要发生，因为它包含了所有的基本事件。随机事件则可能发生（当发生了属于它的某个基本事件时），也可能不发生（当发生了不属于它的某个基本事件时）。

（四）事件的关系及运算

1．包含关系

若A发生必有B发生，或若$\omega\in A$必有$\omega\in B$，则称A含于B

内或B包含A，记为

$$A \subset B$$

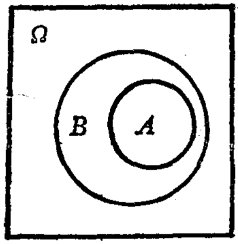

图 1—1

此关系可用图1—1表示。这里，正方形Ω表示基本事件空间，圆A及B都是Ω的子集。集A含于集B内，即圆A中全部点都是圆B中的点。

例如$A=$“抽到偶素数”$=\{\omega_2\}$，$B=$“抽到偶数”$=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8\}$，这时，$A \subset B$。

“若A发生，则B发生”和“若$\omega \in A$，则$\omega \in B$”这两种表述方法是一致的，我们在证明事件的包含关系时，可择优选用。

2.相等关系

若$A \subset B$而且$B \subset A$，则称A等于B，记为

$$A = B$$

$A=B$就意味着A的元素和B的元素完全一样。换句话说，A和B的发生性完全一样。若用图形表示，则圆A和圆B重合成一个圆。

3.加法运算

我们把“事件A或B中至少有一个发生”的事件C，或“集合A的元素与集合B的元素合在一起（相同的元素只算一个）”组成的集合C称为A与B的和或并，记为

$$C = A + B \quad 或 \quad C = A \cup B$$

简单地说就是“A或B发生”的事件或“$\omega \in A$或$\omega \in B$”的元素ω组成的集合，称为A与B的和或并。例如：

$A=$ “抽到 3 的倍数” $=\{\omega_3, \omega_6, \omega_9\}$,

$B=$ “抽到偶数” $=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8\}$,

$C=A+B=\{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_8, \omega_9\}$,

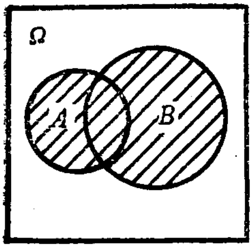

图 1—2

事件和的意义可以用图1—2来说明，图中正方形表示必然事件Ω，两个圆表示事件A，B，阴影部分表示 和$A+B$。

注意：任何一个集合中的元素彼此是不同的，即任何一个事件含有的基本事件是不同的。因此，A中有ω_6，B中也有ω_6，而在$C=A+B$中只能有一个ω_6。

显然，$A\subset A+B$，$B\subset A+B$，$A+B\subset\Omega$，且有$\phi\subset A\subset\Omega$，$A+\Omega=\Omega$，$A+A=A$。

4.乘法运算

我们把“A和B都发生”的事件C，或“既属于A又属于B”的元素组成的集C，称为A与B的**积**或**交**。记为

$C=A\cdot B=AB$或$C=A\cap B$

也可用符号简述为：若$\omega\in A$且$\omega\in B$，即$\omega\in AB$.例如：

$A=$ “抽到 3 的倍数”

$=\{\omega_3, \omega_6, \omega_9\}$,

$B=$ “抽到偶数”

$=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8\}$,

$C=AB=$ “抽到 6 ”

$=\{\omega_6\}$。

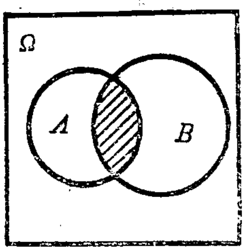

图 1—3

事件积的意义可用图 1 — 3 说

明，图中，正方形Ω表示基本事件空间，两个圆分别表示事件A与B，阴影部分即表示事件的积$A\cdot B$。显然$A\cdot\Omega=A\cdot A=A$。

5.互斥关系

设A、B为二事件，若$A\cdot B=\phi$，则称A与B互斥，或称A与B互不相容。例如：

$A=$ "抽到立方数" $=\{\omega_1,\ \omega_8\}$

$B=$ "抽到3的倍数" $=\{\omega_3,\ \omega_6,\ \omega_9\}$

这时$A\cdot B=\phi$，A与B是互斥的。

注意，由一个基本事件组成的事件$A_1=\{\omega_1\}$，$A_2=\{\omega_2\}$，…，$A_9=\{\omega_9\}$，任意两个是互斥的。由加法运算的定义，任意一个随机事件都是若干个这样的单元素事件的和。特别地，必然事件是这九个基本事件的和。这时，我们不写成

$$\Omega=A_1+A_2+\cdots+A_9,$$

而写成

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\ \omega_9\}.$$

事件的互斥关系可用图1—4表示，图中两个圆分别表示事件A与B，这两个圆相离，即表示A与B不能同时发生。所以A与B是互斥的。

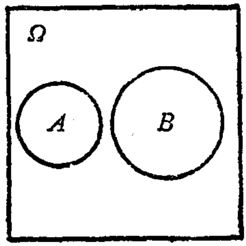

图 1—4

6.互逆关系

二事件A和B，若$A\cdot B=\phi$，且$A+B=\Omega$，则称A与B互逆或对立。例如：

$A=$ "抽到奇数" $=\{\omega_1,\ \omega_3,\ \omega_5,\ \omega_7,\ \omega_9\}$，

$B=$ "抽到偶数" $=\{\omega_2,\ \omega_4,\ \omega_6,\ \omega_8\}$，

这时，A与B互逆。

经常用$\overline{A}$表示A的逆事件，也就是"A不发生"的事件，因此$\overline{A}$也叫做非A或反面，或者称为A的补集或余集。A和$\overline{A}$把Ω分成互斥的两部分。

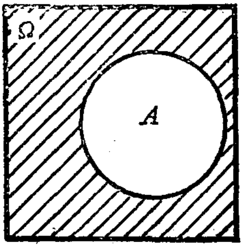

图 1—5

显然$\overline{\phi}=\Omega$，$\overline{\Omega}=\phi$，而且$\overline{\overline{A}}=A$。

图1—5可以说明互逆事件的关系，图中圆表示事件A，阴影部分即表示A的逆事件$\overline{A}$。

7.减法运算

把"A发生而B不发生"的事件C，或"属于A而不属于B"的元素组成的集C，称为A减B或A与B的差。记为

$$C=A-B$$

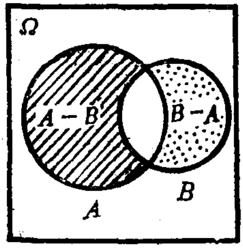

图 1—6

例如：

$A=$"抽到奇数"$=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_9\}$，

$B=$"抽到3的倍数"$=\{\omega_3, \omega_6, \omega_9\}$，

$A-B=$"抽到1或5或7"$=\{\omega_1, \omega_5, \omega_7\}$，

$B-A=$"抽到6"$=\{\omega_6\}$。

显然，$\overline{A}=\Omega-A$，$A-B=A\cdot\overline{B}$，$A+B=A\overline{B}+\overline{A}B+AB$。而$A\overline{B}$、$\overline{A}B$、$AB$中任意两个互斥，即两两互斥。

图1—6可说明事件差的概念，图中两个圆分别表示事件A与B，斜线部分表示差事件$A-B$。

上面定义的加法运算和乘法运算满足下列定律：

加法交换律：$A+B=B+A$；

加法结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$；

乘法交换律：$A\cdot B=B\cdot A$；

乘法结合律：$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$；

乘法对加法分配律：$A(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$；

加法对乘法分配律：$A+BC=(A+B)(A+C)$。

前五种和普通数的运算定律是类似的，最后一种是数的运算中所没有的。现在仅就最后一种给以证明，其他几种证明的方法类似。

证明 若$\omega\in A+BC$，则ω或属于A，或属于BC；若是前一情形，则$\omega\in A+B$且$\omega\in A+C$，因而$\omega\in(A+B)(A+C)$；若是后一情形，则$\omega\in B$且$\omega\in C$，因此$\omega\in A+B$且$\omega\in A+C$，因而仍有$\omega\in(A+B)(A+C)$。这说明

$$A+BC\subset(A+B)(A+C).$$

反之，若$\omega\in(A+B)(A+C)$，则$\omega\in A+B$且$\omega\in A+C$；若$\omega\bar{\in} A$，则必有$\omega\in B$且$\omega\in C$，因此$\omega\in BC$，这样就有$\omega\in A+BC$；若$\omega\in A$，则仍有$\omega\in A+BC$。这就说明

$$(A+B)(A+C)\subset A+BC.$$

由相等的定义得

$$A+BC=(A+B)(A+C).$$

加法和乘法运算可以推广到有限个或可数个事件上去。对加法运算，记号

$$\sum_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

表示n个事件至少发生一个。记号

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

表示可数个事件的和或并。对乘法运算，记号

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

表示n个事件同时发生。记号

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} A_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots$$

表示可数个事件的积或交。

（五）例　题

例 1　试将三次射击靶子所产生的下列事件用事件的运算表示出来。

（1）“没有一次射中”。

（2）“恰好射中一次”。

（3）“射中靶子次数不超过 1 ”。

（4）“射中靶子不小于二次”。

解　先给出三次射击产生的事件：