

电磁场理論基础

成都电訊工程学院选編

北京科学教育出版社

1961.7.

电磁场理论基础

成都电讯工程学院选编

北京科学教育出版社

1961.7.

目 录

緒 論

- 1. 电磁波..... (1)
- 2. 电磁波与无线电技术的关系..... (2)
- 3. 电磁场理论与无线电技术的关系..... (3)

第一章 靜电场和恒定电磁场的基本理論和計算方法

- § 1.1 引 言..... (6)
- § 1.2 靜电场的基本方程式..... (6)
- § 1.3 靜电场方程式的微分形式..... (10)
- § 1.4 电位和电位方程式..... (13)
- § 1.5 靜电场的边界条件..... (17)
- § 1.6 恒定电场的基本方程式和边界条件..... (18)
- § 1.7 恒定磁场的基本方程式和边界条件..... (21)
- § 1.8 磁位和磁位方程式..... (27)
- § 1.9 电场和磁场能量..... (29)
- § 1.10 位场計算类型..... (30)
- § 1.11 分布型位场計算方法..... (31)
- § 1.12 边值型位场計算方法..... (36)
- § 1.13 直接积分法..... (37)
- § 1.14 分离变量法..... (39)
- § 1.15 位场的唯一性定理..... (43)
- § 1.16 电軸法..... (44)
- § 1.17 电象法..... (48)
- § 1.18 解析函数法..... (51)
- § 1.19 近似計算法..... (56)
- § 1.20 实验求解法..... (58)

参考文献

第二章 交变电磁场的基本理論和計算方法

- § 2.1 引言..... (60)
- § 2.2 电磁感应定律..... (61)
- § 2.3 位移电流定律..... (65)
- § 2.4 麦克士韦方程式..... (67)

§ 2.5	电磁能流和烏莫夫坡印亭定理.....	(71)
§ 2.6	电磁场的物质性.....	(77)
§ 2.7	电磁场的边界条件.....	(78)
§ 2.8	电磁场的矢量位和标量位.....	(79)
§ 2.9	赫芝电矢量.....	(82)
§ 2.10	电磁场的达朗贝尔方程式的解.....	(83)
§ 2.11	电磁场的边值型計算問題和唯一性定理.....	(85)

参考文献

第三章 电磁波的輻射

§ 3.1	輻射的基本概念.....	(87)
§ 3.2	电偶极子的电磁场的計算.....	(88)
§ 3.3	电偶极子的电磁场的分析.....	(91)
§ 3.4	电偶极子的輻射场的性质.....	(94)
§ 3.5	磁流和磁荷的概念.....	(97)
§ 3.6	对称性的电磁场方程式和电磁场的对偶定理.....	(97)
§ 3.7	磁偶极子的輻射场.....	(99)
§ 3.8	裂縫天綫的輻射场.....	(101)

参考文献

第四章 均匀介質中的平面电磁波

§ 4.1	引 言.....	(104)
§ 4.2	高频下电介质的性质.....	(104)
§ 4.3	均匀介質中的波动方程.....	(110)
§ 4.4	均匀的理想电介質中的平面电磁波.....	(111)
§ 4.5	均匀的理想电介質中的正弦平面电磁波.....	(113)
§ 4.6	有損耗介質中的平面电磁波.....	(117)
§ 4.7	导体中的平面电磁波.....	(120)
§ 4.8	平面电磁波的极化.....	(134)
§ 4.9	电磁波的色散、群速.....	(126)

参考文献

第五章 平面电磁波的反射、折射与繞射

§ 5.1	平面电磁波的反射、折射概念.....	(132)
§ 5.2	正弦平面电磁波的垂直入射.....	(133)
§ 5.3	多层介質的垂直入射.....	(137)
§ 5.4	平面电磁波对平面分界面斜入射时的反射及折射规律.....	(140)

§ 5.5	平面电磁波对理想导体表面的斜入射	(141)
§ 5.6	平面电磁波对理想电介质分界面的斜入射	(145)
§ 5.7	平面电磁波在电离层中的反射与折射	(150)
§ 5.8	电磁波绕射的概念	(153)
§ 5.9	惠更斯—夫累涅尔原理 克希荷夫公式	(154)
§ 5.10	平面口径上的绕射	(157)

参考文献

第六章 电磁波在铁氧体中的传播

§ 6.1	引言	(165)
§ 6.2	铁磁共振·铁氧体的导磁系数	(165)
§ 6.3	旋磁介质中的平面电磁波	(172)
§ 6.4	铁氧体在超高频技术中应用举例	(177)

参考文献

第七章 电磁导波和波导管

§ 7.1	引言	(180)
§ 7.2	电磁导波的一般理论	(181)
§ 7.3	矩形波导管中的电磁场	(188)
§ 7.4	矩形波导管的特性	(193)
§ 7.5	矩形波导管的场结构	(198)
§ 7.6	矩形波导管的管壁电流	(203)
§ 7.7	圆波导管中的电磁场	(208)
§ 7.8	圆波导管的特性	(214)
§ 7.9	圆波导管的场结构	(216)
§ 7.10	波导管的激励	(218)
§ 7.11	波导管的击穿	(220)
§ 7.12	波导管的损耗和衰减	(222)
§ 7.13	波导管的波型、截面尺寸和形状的选择	(224)
§ 7.14	同轴电缆中的电磁导波	(226)
§ 7.15	特殊波导管	(232)

参考文献

第八章 电磁驻波与空腔谐振器

§ 8.1	引言	(235)
§ 8.2	空腔谐振器的一般特性和分析方法	(236)
§ 8.3	空腔谐振器的品质因素和等效电导	(237)

§ 8.4	矩形諧振腔.....	(242)
§ 8.5	圓柱形諧振腔.....	(248)
§ 8.6	同軸綫形諧振腔.....	(253)
§ 8.7	环形諧振腔.....	(257)
§ 8.8	其它类型的諧振腔.....	(261)
§ 8.9	諧振腔的耦合和激励.....	(261)
§ 8.10	諧振腔的形状和振蕩模式的选择.....	(262)

参考文献

結束語

附录 1	各种坐标系統的微分算子.....	(268)
附录 2	矢量代数和矢量分析公式.....	(269)
附录 3	某些电介質在超高频的特性.....	(271)
附录 4	分貝表.....	(272)

緒 論

电磁场理論是經過教改独立設置的一門新課。过去这門課是包括在“电工基础”之內，其目的在于解决一般电工技术中的电磁场問題，內容以靜电场、恒定电磁场和交变电磁场三部分并列，各約占三分之一左右。經過教改明确提出本課程不仅要解决一般电工技术中的电磁场問題，而且重点应放在解决无綫电技术中有关的电磁场問題。对于无綫电技术来讲，它广泛地应用着电磁波，因此在讲述本課程主要内容以前，首先需要搞清楚下列三个問題：1.什么是电磁波？2.电磁波与无綫电技术有何关系？3.电磁场理論与无綫电技术有何关系？

1.电 磁 波

人們从长期的生产实践和科学研究中发现自然界的电磁现象，存在着这样一个普遍规律：变化的电场能产生磁场，而变化的磁场也能产生电场；从而随着時間变化的电磁场，其电场与磁场是互相联系而不能分割，同时也是互相轉变而不是彼此孤立的。这种性质决定了电磁场在空間的交替作用，也决定了它由近及远地逐步传播其影响，因此形成电磁现象在空間的波动过程，这就是电磁波。

从电磁波的本质看来，它是随時間变化的电磁场所形成的。这种电磁场称为交变电场，或称为动态电磁场。

人們認識电磁波的过程經過了一段漫长的历史。在十九世紀以前，人們受着生产水平的限制，只認識到靜电和靜磁的现象，把电与磁认为是互不相关的。一直到1819年奥斯特(H.C.Oersted)和1820年安培(A.M.Ampere)发现电流有磁效应，才开始建立电与磁之間的联系，1831年法拉第(M.Faraday)发现电磁感应现象，又建立了电与磁之間的另一个联系。在此后很多人的实践和理論基础上，麦克斯韦(J.C.Maxwell)在1873年发表了完整的电磁场理論，总结电磁场的一般规律，并从理論上預见了有电磁波存在。十五年后赫茲(H.R.Hertz)才用实验証明了电磁波，他还制成第一个发射电磁波的赫茲振子。这时航海事业大大发展，迫切需要建立海上通訊系統，1895年波波夫(A.C.Попов)第一个成功地建立了无綫电收发报机作为海上通訊工具，开创了电磁波为人类服务的可能性，从而也开辟了无綫电技术的新的領域，因此电磁波常常被人們了解为“无綫电波”。

其实电磁波并不局限于无綫电波，它与机械波一起組成自然界整个波动现象。为人类熟悉了几千年的光的现象其本质也是电磁波。长久以来，对光的本性曾有过很多爭論，著名的微粒学說和波动学說互爭短长，当赫茲証实了电磁波存在以后，并証实电磁波的性质与光波相同，才揭露出光的电磁本性，建立了光的电磁学說。之后，人們又陸續发现X射綫、γ射綫和宇宙射綫等都是电磁波。这些电磁波在外表上性质的不同，是在于它們的頻率或波长各异。现在按着頻譜，把自然界中已知的各种电磁波排列如下：

	波 长 (米)	頻 率 (赫)
无綫电波	很长—— 10^{-4}	0 —— 3×10^{12}
紅外綫 (热波)	10^{-4} —— 7.6×10^{-7}	3×10^{12} —— 3.95×10^{14}
可见光波 (光綫)	7.6×10^{-7} —— 4×10^{-7}	3.95×10^{14} —— 7.5×10^{14}
紫外綫	4×10^{-7} —— 10^{-7}	7.5×10^{14} —— 3×10^{15}
X射綫	10^{-8} —— 10^{-12}	3×10^{16} —— 3×10^{20}
γ射綫	10^{-9} ——	3×10^{17} ——
宇宙射綫	10^{-16} ——	3×10^{24} ——

2. 电磁波与无綫电技术的关系

在本課程內討論的电磁波，主要限于无綫电波。

从电磁波的頻譜来看，无綫电波的波段相当宽广，这一波段的得来，充滿着人类向自然斗争的艰苦过程。

二十世紀开始，无綫电技术逐渐地在生产活动中占領地位，当时用来产生无綫电波的火花振荡器，功率小又不稳定，用来接收无綫电波的晶体矿石性能也不十分良好。为了改进这些通訊工具，电子管发明了，电子管的作用逐渐由检波、放大发展到振荡調制等，于是通訊技术大为改善了。但最初人們利用的无綫电波，其波长都在100米以上，当时无綫电波是用来沿着地面传播。如果縮短波长，地面的衰减增大，从而当时便得出結論：短于100米的无綫电波不适宜于远距离通訊。这个为人們自己虚构的桎梏，不久就被人們的实践打破。业余无綫电爱好者从实践中証明，波长縮短，通訊距离反而比长波传播远得多，接收到的訊号也清晰得多。后来才明白，短波通訊不必依靠沿地面传播的地波，如用“空間波”向电离层斜射，电离层对短波有良好的反射作用，反射回来的无綫电波，在地面上的距离远大于地波传播的距离。这样，无綫电波段便从长中波段扩展到10米左右的短波波段。

但是波长再短，电磁波能够穿越电离层，不再返回地面，对于通訊的发展來說似乎又到此止步了。这时各国大力研究短波波段，短波广播和短波通訊設備广泛被应用。生产实践总是不断提出新的問題。由于短波波段所能容納的电台数目虽比长波波段所能容納的多，但还是有限，頻率相近的电台容易互相干扰，因此为了更好的电台能够工作和传送更多的訊号，人們自然希望再将頻譜領域扩充。在此期間第二次世界大战发生，为了防御敌机的破坏，利用无綫电波偵察飞机的雷达技术就应运而生。雷达机要求无綫电波方向性强和分辨力好，这便需要无綫电波工作在短脉冲状态，同时頻率要极高，而并不要求电离层对无綫电波的反射，因此有条件有可能向更短波段扩充。这就形成在第二次世界大战以后各国竞相发展的超高频技术或称微波技术。另一方面，多路通訊技术的发展也同样要求有更高的載頻以便把通訊量增得更多，这也要求发展超高频技术。

由于历史上技术的分期发展，在无綫电波段內很自然地又分为下表所列波各段：

波 段	波 长	频 率
超长波	10000米以上	30千赫以下
长波	10000—3000米	30——100千赫
中波	3000—50米	100千赫——6兆赫
短波	50—10米	6——30兆赫
超高频(微波)		
米波	10—1米	30——300兆赫
分米波	1—0.1米	300——3000兆赫
厘米波	10厘米—1厘米	3000——30000兆赫
毫米波	1厘米—1毫米	30000——300000兆赫
亚毫米波	1毫米—0.1毫米	300000——3000000兆赫

根据雷达上的应用，在超高频波段内流行着如下的划分：

波 段	波 长 厘米	频 率 兆赫
L	76.9 — 19.3	390 — 1550
S	19.3 — 7.69	1550 — 3900
C	7.69 — 4.84	3900 — 6200
X	4.84 — 2.75	6200 — 10900
K	2.75 — 0.833	10900 — 36000
Q	0.833 — 0.652	36000 — 46000
V	0.652 — 0.635	46000 — 56000

从无线电技术来看，长中短波技术人们研究已久，现在已达到比较成熟和稳定阶段，而微波技术正在大力发展，方兴未艾，它的地位已越来越显得重要，同时它的应用远不止用于通讯和雷达，对于原子能和核子物理，波谱学、天文学、植物生理、医疗卫生、气象学、火箭技术和宇宙航行的人造飞船等，都有着日益广泛的应用。

3. 电磁场理论与无线电技术的关系

既然电磁波的本质是交变电磁场，因此无线电技术中一切物理现象的定性和定量分析，都要根据电磁场基本理论。

但是对于长中短波的无线电技术，其产生和传输电磁波的设备（除天线及其馈线外）的线度，往往远小于其波长，从而在设备内和设备附近各处所产生的现象，可视为处于同时。这样，在设备内部的电磁场就可以不考虑空间变化的影响，只考虑时间变化的关系，从而可以分别把电场和磁场集中处理，即形成集中参数电路理论和技术。所以在长中短波波段，除了辐射电磁波的天线和馈线外，广泛地应用电路理论来分析无线电技术问题。

而在超高频（微波）波段，上述将场简化为路的办法，除掉在米波波段可以勉强应用以外，一般来说，是不可能的。这由于微波波段存在着下列几个显著的特点：

（一）无线电设备的线度与波长同一数量级，在设备内外各处的电磁现象都不处于同时，集中参数理论不能直接应用；不仅如此，由于各处的时间滞后效应和由此引起的辐射现象成为一个经常需要考虑的因素。

（二）在微波波段导体的趋表效应非常显著，从而使导体的电阻大大地超过欧姆电

阻，使得很多在长中短波应用的元件无法应用，同时导体上的电流都分布在表面上形成面电流。

(三) 在电子管内部，由于电子运动的时间滞后效应所引起的电子的渡越时间与振荡周期同一数量级，从而电子的惯性作用成为微波电子管工作原理的一个重要因素。

(四) 波长愈重，无线电波越靠近光波波段，从而具有与光波波段特性相似的性质，这称为拟光特性。在微波波段中，拟光特性也被广泛地应用着。

因此在微波波段内，用电磁场理论来分析问题是一个基本的和普遍的方法。随着微波技术的发展，电磁场理论也有很大的发展。这在1929年以后，很多国家研究微波技术的工程师和研究人员作出了巨大的贡献。

在无线电技术中，或者说在微波领域内，究竟解决了哪些问题呢？

从激发电磁波的振荡器来看，在长中短波都是用的振荡回路，其振荡理论完全用电路理论分析。在微波波段，这种集中参数元件根本无法应用，由于辐射损耗和趋表效应都使回路损耗显著增加，从而其品质因数很低。在微波波段内，是利用金属空腔内储蓄的电磁能的相互振荡而作成振荡器，这称为空腔谐振器或简称谐振腔。关于谐振腔的谐振波长和品质因数等的分析，电磁场理论发挥了很大的作用。

从产生振荡、放大、检波和调制等作用的电子管来看，管内产生电子流的结构已经是电磁场的问题，通常用位场方法进行分析。而在管内控制电子流的电极作用，对于长中短波因渡越时间很短，其滞后效应可以忽略不计，可以用电路理论解决。但对于微波电子管，电子在电极间运动有显著的滞后效应，从而形成空间电荷波。各种微波电子管都是基于空间电荷波与电磁场的相互作用，不过这个相互作用对于不同的电子管是不同的，效果也不一样，所以有调速管、磁控管、行波管和回波管等之分。分析这些电子管的特性，也是电磁场理论应用的一个重要方面。

从传输电磁能的传输器来看，在长中短波波段，广泛应用着二线传输线和同轴电缆。在长中波波段中，二线传输线的线间距离远比波长为小，辐射现象可以忽略。在微波波段则不然，由于线路尺度与波长同一数量级，辐射现象很显著，二线传输线的性能往往变得很差，只有在米波波段勉强可用；同轴电缆自身有屏蔽作用，效果较好一些，但在厘米波和毫米波波段，内导体的损耗很严重，其性能也变得很坏，因此在厘米波段以上最常用的传输线是用金属空管作成的波导管和单线传输线等。分析二线传输线和同轴线的传输特性，已经要用电磁场理论，不过波长较长时，电感和电容等参数概念仍可应用；而在分析波导管和单线传输线等的特性时，则完全是一个电磁场问题了。

从电磁波的辐射器来看，不论在长中短波或微波波段都是属于电磁场理论问题，因为作为辐射器的天线，主要靠滞后效应所产生的辐射现象，对于辐射方向性和辐射电阻等特性的分析，完全决定于天线周围场的分布；只不过在微波领域内，由于波长接近光波波段，拟光特性很显著，所以我们可以采用集中光能辐射的办法来辐射无线电波，如透镜天线、反射面天线等都是基于这个原理。

总之，在微波领域内，电磁场理论的应用非常广泛，也就是说用电磁场理论来解决无线电技术问题，在近二十年来在理论上和实践上都取得了很大成功和发展。

在本课程内，除掉微波电子管关于空间电荷波的分析和应用由电子器件课程解决外，主要内容分为下面三部分：

(一) 电磁场的理论基础和位场的计算方法，其中对于静电场和恒定电磁场的分

析，在学过物理課的基础上仍作了簡明扼要的敘述。这一部分是作为解决一般的电工問題，也是解决电磁波問題的基本工具。

(二) 电磁波的传播特性分析，其中包括电磁波的产生，电磁波在各向同性和各向异性、均匀的和不均匀的介质中的传播特性。

(三) 电磁波在微波技术中的主要应用，其中包括用作能量传输的波导管和維持电磁振荡的諧振腔的特性分析等。

第一章

靜电场和恆定电磁场的基本 理論和計算方法

§ 1.1 引 言

在还未討論电磁波的基本原理及其計算以前，我們先研究靜电场和恆定电磁场的基本概念及其計算方法。从历史发展过程来看，人們認識电磁波是通过靜电场和恆定电磁场这个阶段，逐步地由简单的和特殊的现象認識到复杂的和一般的规律，因此反映在学习过程中，我們也采取了这种由“由特殊到一般”、“由簡而繁”的分析方法。

尽管靜电场和恆定电磁场是一种特殊的电磁现象，在人們的生活实践和生产实际中也是經常碰到的。因为恆定电流（直流）的应用，在电工技术和无綫电技术中还是不可缺少的，相对于观察者为靜止状态的电荷，在电磁现象中不仅存在，而且被人們多方面加以利用（如靜电噴漆法、靜电加速器、靜电控制的示波管及多种电子管中的电子枪等）。所以討論靜电场和恆定电磁场，对解决电工技术和无綫电技术的实际問題也是必要的。

而且，对于电磁波现象的定性和定量分析，在有些情况下，可以簡化为用靜电场和恆定磁场問題的分析，而得出滿意的近似結果，以后我們將看到这些情况就是所謂“近区”問題。对于近区场的分析和計算，在电工技术和无綫电技术中都是很重要的，从而說明靜电场和恆定电磁场的討論就更有必要了。

但話又說回来，靜电场和恆定电磁场毕竟是交变电磁场的一种特殊情形，因此这两种场的特性，和由此引出的一些基本概念是有局限性的，例如关于电位的概念便不能直接、普遍地适用于交变电磁场。所以在进行討論的时候，我們时时刻刻都不要忘記其特殊性。

在本章的討論过程中，考虑到普通物理課程內已将靜电场和恆定电磁场作了相当充分的分析，因此我們采取精簡扼要的形式，某些定理的严格証明从略，我們偏重于微分形式的表达方式和有关场的計算的基本方法。

在本課程內的单位都采用国际电工委员会公布的合理化M K S A单位制。

§ 1.2 靜电场的基本方程式

人們在实践中，不仅認識到自然界中存在着“电荷”这种物質，而且还認識到“电荷”在它的附近空間产生着物質的“场”。电荷所产生的场称为“电场”，电荷是电场的源。相对于观测者为靜止状态的所謂“靜止电荷”产生的场便是“靜电场”。在宇宙間，不存在絕對靜止的电荷，我們所指的靜止电荷是处在相对靜止状态，而且是就宏观

而言的。

如何确知有电场存在呢？电场表现出的重要特性之一，是它对电荷能显示力的作用，通常我们用静止电荷是否受力（因运动电荷还会受磁力作用，故用静止电荷）来作为检验电场存在的方法。

根据试验电荷在电场中受力的特性，我们定出表征电场特性的基本量——电场强度矢量。它定义为：电场中某点的电场强度矢量为该点的试验电荷 q_0 所受的力 f 与 q_0 的比值，其中试验电荷 q_0 在理论上应为无限小电荷，以使它的放入不致引起场的畸变。用式表为：

$$E = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{f}{q_0} \quad (1-1)$$

电场强度矢量 E 简称场强，在MKSA单位制中其单位为： $[E] = \frac{\text{牛}}{\text{库}} = \frac{\text{伏}}{\text{米}}$ 。

用图形表示场强大小和方向的线称电力线。

1. 静电场第一方程式：

静电场第一方程式就是总结出电场特性与场源电荷间相依关系的一般规律。这一规律的来源从实践中来，但经过人们一系列的推理过程，并从实践中证明其正确性。

首先人们从实践中发现电场力存在着平方反比关系，库仑便根据这一事实，总结出二点电荷（电荷的线度与观测点的距离相比为无限小的电荷）间的电场力的库仑定律，从而确定出点电荷产生的场强，在真空介质中为（图1-1）

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^0}{r^2} \quad (1-2)$$

式中： q 为点电荷的电量（库）；

ϵ_0 为表示真空介质的电场特性的量，称为真空的介电系数，由实验求得在合理化MKSA单位制中其值为：

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} \approx 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{法}}{\text{米}}$$

r 为观测点距点电荷的距离；

r^0 为单位距离矢量，其方向指向观测点。

高斯根据库仑定律这一基本事实，总结出场强与场源电荷的更普遍的关系，这称为高斯定理。

真空中的高斯定理表述为：在真空中场强的闭合面积分等于面内所包的电荷 Σq 与 ϵ_0 的比值，用数学式表为*（图1-2）：

$$\oint_S E \cdot ds = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} \quad (1-3)$$

(1-3)式左端为场强的闭合通量，因此高斯定理是用场强 E 的通量来表征电荷，它比库仑定律更一般化，即电荷不限于点电荷，而且它表示 E 的通量只与包围面内的电荷有关，与面外电荷无关，从而说明了面内电荷是产生通量的

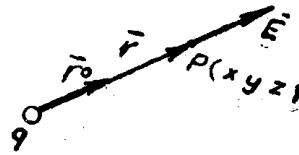


图1-1

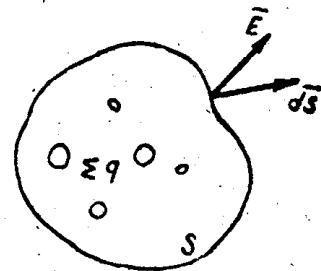


图1-2

* 真空中高斯定理的严格理论证明参看：聶孟著“电工学的理论基础”中译本第一册，20-23页。

源。

由真空中的高斯定理很容易推广到一般均匀介质中的高斯定理。

在普通物理中已讨论过，当电荷放入一般非真空介质中，介质内部要产生极化过程。对于无极分子，极化结果使它的束缚电荷产生位移，形成电偶极子；对有极分子，它的束缚电荷形成的电偶极子在外电场作用下，从排列紊乱而转向于外电场方向。总之，极化后分子内部的束缚电荷也要产生电场，从而在一般介质中的场强，应为场源电荷所产生的场强与介质中的束缚电荷所产生的场强相叠加。这一叠加并不是使合成电场加强了，相反地却是使得合成电场减弱，因为束缚电荷所产生的电场具有抵消作用。

宏观地来表示一般介质的电场特性，可将它的介电系数与真空中的介电系数相比较，引入相对介电系数 ϵ ，即一般介质的介电系数应为 $\epsilon\epsilon_0$ 。

对于一般的均匀介质来说，既然在场内各处的介电系数都为真空介质的 ϵ 倍，因此库仑定律和高斯定理分别应为：

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{r^0}{r^2} \quad (1-4a)$$

$$\oint_s E ds = \frac{\sum q}{\epsilon\epsilon_0} \quad (1-5a)$$

在 (1-4a) 和 (1-5a) 中，如果我们将表达形式改变一下，将等式两端各乘以常量 $\epsilon\epsilon_0$ ，则：

$$\epsilon\epsilon_0 E = \frac{q}{4\pi} \frac{r^0}{r^2}$$

$$\oint_s \epsilon\epsilon_0 E ds = \sum q$$

由是可见：量 $\epsilon\epsilon_0 E$ 及其通量 $\oint_s \epsilon\epsilon_0 E ds$ 都只与场源电荷有关，而与介质特性无关。我们定义

$$D = \epsilon\epsilon_0 E \quad (1-6)$$

D 称为电位移矢量或称为电通密度矢量，因这个量的得来表达了束缚电荷产生电位移的过程（其中还有真空中的电位移），故名电位移矢量。它的通量直接联系着电荷，故又称电通量密度。 D 的单位在 MKSA 制中为库/米²。

根据 D 与 E 的相对大小，可以确定出介质的电场特性，从而式 (1-6) 称为介质的电场特性方程式。将 D 直接用电位移表示，则它应包括真空中的电位移 $D_0 = \epsilon_0 E$ 和束缚电荷的电位移 P ， P 称为极化强度矢量，从而 (1-6) 式变为

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (1-6a)$$

引用了物理量 D ，一般均匀介质中的库仑定律和高斯定理可表为：

$$D = \frac{q}{4\pi} \frac{r^0}{r^2} \quad (1-4b)$$

$$\oint_s D ds = \sum q \quad (1-5b)$$

再由一般均匀介质中的高斯定理进一步推广到一般非均匀介质中的高斯定理，这一步既有推理的过程，也有实践的过程。

从推理过程来看，在非均匀介质中，各处的极化都不一样，因此在介质内部的场强，不仅与场源电荷有关，与该点介质特性有关，而且还与该点周围的介质特性有密切关系。这样一来，库仑定律便失去了它的表达的依据，因为它无法表达出介质特性与电

场的复杂依赖关系。但是从通量来看，即用电通量密度来表示场源的关系来看，不管在均匀介质或非均匀介质中应保持不变，也就是说我们用电位移矢量的通量可以总结出电场特性与场源电荷间的一般关系，即

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \sum q \quad (1-7)$$

上式表述为：电位移矢量的闭合面积分（或简称闭合电通量）等于面内包含的自由电荷，这称为介质中的高斯定理。*

实践结果，证明介质中的高斯定理是完全正确的，由此所推出的一切定量关系与实验数据相符，因而此式为静电场的基本方程式之一，称为静电场第一方程式。

而且实验结果还进一步表明，不管变化得多快的电荷，它所产生的电场也与上式相符，因此（1-7）式不仅是静电场而且也是一般电场的基本方程之一。

有一点要指明的，（1-7）式表示，电通量只与场源电荷有关，与介质特性无关，这不等于说每点的电位移矢量都与介质特性无关。

2. 静电场第二方程式：

静电场另一基本特性，是场的本身满足能量守恒特性，从而它是守恒场之一，这个特性称为静电场的守恒定理。因为就静电场本身来看，它没有供给能量的机构，也没有消耗能量的机构，所以在一定的电荷分布情况下，它的能量状态是恒定的。

据此，设我们沿一闭合回路移动一试验电荷 q_0 ，电场力所作的功为： $\oint_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 。由于场中没有供给能量的机构，则 $q_0 \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} > 0$ ；同样由于场中没有消耗能量的机构，则 $q_0 \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} < 0$ 从而根据能量守恒特性，只可能有

$$q_0 \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

因 $q_0 \neq 0$ ，故得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$(1-8)$$

（1-8）式称为静电场第二方程式。

因此，静电场的基本方程式便由（1-6）（1-7）和（1-8）三式组成：

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \sum q$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$$

例 1-1 半径为 a 的圆盘导体，其中带有电荷（图 1-3），设不计盘上电荷分布的不均匀性，而以 σ 表示其单位面积的平均电荷密度（简称平均面电荷密度 σ ），求穿过圆盘中心并与圆盘平面相垂直的直线上距盘心为 h 处电场强度。

解 本题只能用库仑定理求解。

从圆盘中心的垂线来看，圆盘上电荷对其上任一点产生的场强有对称性，从而场的水平分量互相抵消，只有与圆盘垂直的场强分量存在。

本题求解过程采用柱面坐标较便。

* 这一定理的严格证明可参考：K. A. 克鲁格主编“电工原理”第三册 § 21-7（中译本 575—579 页）。

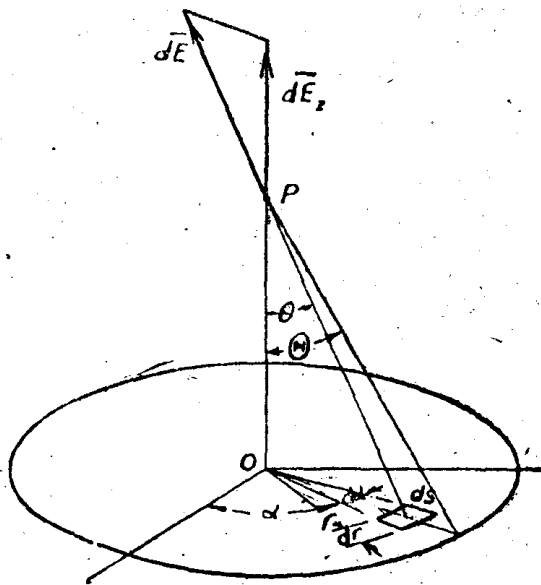


图 1-3

在盘上离盘心 r 处的元面积 $ds = r dr da$ 内的电荷 $dq = \sigma ds$ 对 P 点产生的场强, 由库仑定律可求得

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma r dr da}{4\pi\epsilon_0(h^2+r^2)}$$

其垂直分量

$$\begin{aligned} dE_z &= dE \cdot \cos\theta = dE \frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}} \\ &= \frac{\sigma h r dr da}{4\pi\epsilon_0(h^2+r^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} E &= E_z = \int_0^{2\pi} da \int_0^a \frac{\sigma h r dr}{4\pi\epsilon_0(h^2+r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{h^2+r^2}} \Big|_0^a \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

例 1-2 有一细长的直金属丝(图 1-4), 其上均匀地分布着电荷, 设其每单位长度的平均电荷密度为 τ (简称线电荷密度 τ), 求空间各点的场强。

解 由于金属丝的细长特性, 可近似地作为无限长导体看待; 又由于金属丝上的电荷是均匀分布的, 它产生的电场具有轴对称性, 因此本题应用高斯定理求解, 如用库仑定律求解则运算较烦。

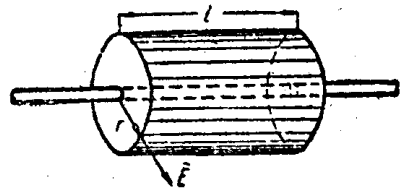


图 1-4

以金属丝的轴心为心, 作一圆柱形高斯面, 其长为 l , 半径为 r 。在此高斯面上, 场强为向外径向, 其大小都相等。应用高斯定理得:

$$\begin{aligned} \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \int_s E_r dS = E_r \int_s dS \\ &= E_r 2\pi r l \\ &= \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} = \frac{\tau l}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

故得

$$E = E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

§ 1.3 静电场方程式的微分形式

§ 1.2中已得出静电场方程式

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Sigma q$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0 \mathbf{E}$$

这三个方程式的前二式都是用积分形式表出。为了更精确地表示出场中某一点的特性，有必要将积分形式变换成微分形式。

将积分形式变换为微分形式，从数学意义上来讲，这只是不同的表达方式，矢量运算帮助了我们妥善地解决了这一问题，因为对一点来说，某一矢量的闭合面积分和闭合线积分都能用微分矢量表示。从物理意义来讲，它将一个大范围内的物理现象，深入到一个“物理点”，因此其意义更加深入细致了。

首先将静电场第一方程式，即介质中的高斯定理表示为微分形式。

当观测者深入到物理点的内部，点电荷的概念就不能应用，而应考虑电荷在这一小范围内是连续分布的，从而可得

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Sigma q}{V} \quad (1-9)$$

ρ 称为体电荷密度。

将(1-7)式的闭合面积分的面积缩为一点，则将它包围的体积 $V \rightarrow 0$ ，则

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Sigma q}{V} = \rho$$

根据矢量分析中矢量的散度的定义

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{V} = \text{div } \mathbf{D}$$

故(1-7)式变为：

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (1-10)$$

(1-10)式称为介质中高斯定理的微分形式，也就是说静电场的第一方程可用矢量 \mathbf{D} 的散度表示：场中任意点的矢量 \mathbf{D} 的散度等于该点的场源电荷的体密度 ρ 。

散度这一名词最初是从流体场而来，当某一包围面积内有流体流出时，其中必含有流体的源，用图形来看，这流体场的产生乃由于流体源散出，这种性质对于一个大包围面是如此，当包围面缩成一点后也是如此(图1-5)。故有散度的场具有有源场的性质，当包围面缩为一点后，它便与被包围的表面形式无关，因此它的表达方式更精确化了。

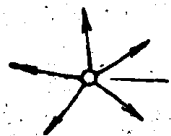


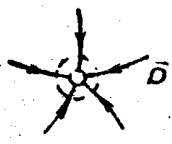
图1-5

由上可知：将介质中高斯定理用微分形式表示，它还脱离了库仑定律基于理想的点电荷的概念。

(1-10)式说明静电场是属于有源场(或称有散度场)。在 $\text{div } \mathbf{D} > 0$ 之处，即 $\rho > 0$ 之处，这是源头所在处，在 $\text{div } \mathbf{D} < 0$ 之处，即 $\rho < 0$ 之处，这是源尾所在处。如果在场内 $\text{div } \mathbf{D} = 0$ ，即 $\rho = 0$ 之处，在此处没有场源，通量便是连续分布。(图1-6)。



$\rho > 0$



$\rho < 0$

图1-6



$\rho = 0$

矢量的旋度的数学概念和物理概念。

再将静电场第二方程式，即守恒定理表示为微分形式。

在还未将守恒定理表示为微分形式以前，首先介绍