

中学数学基础电视讲座

北京市工农教育研究室 编

代数

辅导资料

上册

中学数学基础电视讲座

代数辅导资料

上册

北京市工农教育研究室 编

冶金工业出版社

内 容 提 要

本《资料》是为配合教育部、中央广播事业管理局举办的中学数学基础电视讲座代数课的教学而编写的,分上、下两册出版。上册内容包括总说明,预备知识,整式,一次方程,乘法公式和因式分解,分式与根式,二次方程,不等式,对数,数列共八章。

本《资料》的读者对象为:中学数学基础电视讲座的收看者、职工业余学校的学员和教师,也可供各类中等学校师生和广大社会青年学习参考。

中学数学基础电视讲座

代 数 辅 导 资 料

上 册

北京市工农教育研究室 编

冶金工业出版社出版

(北京灯市口74号)

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/32 印张 13 5/8 字数 295 千字

1982年3月第一版 1982年3月第一次印刷

印数00,001~52,500册

统一书号: 7062·3816 定价1.10元

前 言

为了配合教育部、中央广播事业管理局举办的“中学数学基础”电视讲座代数课的教学,给参加学习的同志提供预习、听课和复习的便利条件,同时也为辅导教师提供参考资料,我们根据目前采用的课本——“中学数学基础”《代数》(人民教育出版社出版)组织编写了“中学数学基础”电视讲座《代数辅导资料》(分上、下两册),由本讲座代数课主讲教师俞斯晨和北京师范学院数学系戴镇南两位副教授执笔。

本《资料》上册的内容是结合中学数学基础电视讲座代数(上册)的教学包括总说明、预备知识、整式、一次方程、乘法公式和因式分解、分式与根式、二次方程、不等式、对数、数列。考虑到在职青年的实际情况和电视教学的特点,本《资料》在编写中,注意了各个教学单元之间的衔接,指出了学习重点和学习方法,并对课程的进度安排、每章的重点和基本要求、每讲的内容、典型的例题以及习题配备等都作了明确的说明,以期指导学员复习和练习。本《资料》中,提到课本处,在未注明上、下册时,均指上册。

由于时间仓促,编者水平有限,不当之处,恳请读者批评、指正。

北京市工农教育研究室

1981年

目 录

总 说 明

预 备 知 识

第一节 用字母表示数	} (合为一讲)	17
第二节 有理数		
第一讲 算术数的复习(补充),用字母表示数、有理数		17
算术数的复习(补充)		17
用字母表示数		19
有理数		21
第三节 有理数的四则运算		25
第二讲 有理数的四则运算规则及混合运算		25
加法规则		26
减法规则		27
乘法规则		29
除法规则		30
第四节 有理数的乘方和开方		34
第三讲 有理数的乘方和开方,无理数的概念		34
有理数的乘方		34
科学记数法		35
有理数的开方		36
无理数的概念		39
第四讲 实数的概念及运算		41
实数的概念		41
实数轴,实数性质		43
实数的四则运算		44

实数的乘方与开方	45
预备知识的总结说明	47

第一章 整 式

第一节 代数式	} (合为一讲)	52
第二节 整式的加减法		
第一讲 代数式的概念, 整式的加减法		52
代数式的概念		52
整式的概念		55
整式的加减法		56
第三节 整式乘法		60
第二讲 整式加减法, 竖式计算, 整式乘法——指数律		60
整式加减法的复习		60
竖式计算		60
整式乘法——指数律		63
第四节 单项式乘法与多项式乘法		66
第三讲 单项式乘法与多项式乘法		66
单项式乘法		66
多项式乘法		67
第一章总结说明		70

第二章 一 次 方 程

第一节 方程的基本知识	} (合为一讲)	74
第二节 一元一次方程		
第一讲 方程的基本知识, 方程的同解变形及解法举例		74
方程的基本概念		74
一元一次方程的同解变形		77
一元一次方程的解法举例		78
解一元一次方程的一般步骤		79
第二讲 一元一次方程的应用举例		80
第三节 二元一次方程组		87

第三讲 二元一次方程组的概念及消元法	87
二元一次方程组的概念	87
二元一次方程组的解法——消元法	89
第四讲 二元一次方程组解的公式，二阶行列式	94
二元一次方程组解的公式	94
二阶行列式	96
用行列式表示解的公式	96
二元一次齐次方程组	98
第五讲 二元一次方程组的应用举例	101
二元一次方程组的应用举例	101
第四节 二元一次方程组解的几何意义	109
第六讲 平面直角坐标系，二元一次方程的图形，二元一次 方程组解的几何意义	109
平面直角坐标系	109
二元一次方程组的图形	111
二元一次方程组解的几何意义	113
第七讲 预备知识，整式、一次方程的总复习	116
数的概念的扩充及其运算	116
代数式——整式	118
一次方程	120
预备知识、整式、一次方程部分习题课 (习题课 1)	124
第二章总结说明	128

第三章 乘法公式和分解因式

第一节 乘法公式	133
第一讲 乘法公式	133
平方差公式	133
二数和(差)的平方公式	133
二数立方和(差)的公式	135

二数和(差)立方的公式	136
总结及杨辉三角形	136
第二节 分解因式	139
第二讲 分解因式的概念和分解因式的方法(一)	139
分解因式的概念	139
分解因式的方法——提取公因式法及应用公式法	140
第三讲 分解因式的方法(二)	145
叉乘试算法	145
分组分解法	148
分解因式总结	149
第三节 恒等变形	151
第四讲 恒等变形的概念, 两多项式恒等变形的定理	151
恒等式及恒等变形的概念	151
两多项式恒等的性质与判定	152
第三章综合复习	156
第三章习题课	163
第三章总结说明	168

第四章 分式与根式

第一节 分式的化简	172
第一讲 分式的基本性质, 约分	172
分式的基本概念	172
分式的基本性质	173
约分	175
第二讲 真分式和假分式, 多项式除法	178
真分式和假分式的概念——与分数的对比	178
多项式除法(长除法)	180
第二节 分式的四则运算	184
第三讲 通分, 分式的加减法, 分式的乘除法(不包括	

繁分式)	184
通分	184
分式加减法	187
分式的乘除法	188
第三节 零指数, 负整数幂	191
第四讲 繁分式, 零指数, 负整数幂	191
分式四则运算——繁分式	191
零指数, 负整数指数幂	193
第四节 根式的恒等变形	199
第五讲 算术根, 根式变形的规则	199
算术根	199
根式变形的规则——基本规则	202
第六讲 根式变形的乘除规则与乘方规则	204
根式变形的乘除规则	205
最简根式	206
根式变形的乘方规则	207
第七讲 根式的运算和化简	209
根式的加减法	209
根式的乘除法	210
有理化分母——把分母中的根号化去	212
第五节 分数指数幂	215
第八讲 分数指数幂	215
分数指数幂的引入及定义	215
利用分数指数幂计算举例	218
第四章复习课	221
第四章习题课 (习题课 3)	224
第四章总结说明	230

第五章 二次方程

第一节 一元二次方程	236
------------------	-----

第一讲 一元二次方程的概念和解法	236
一元二次方程的概念	236
一元二次方程的解法	237
第二节 一元二次方程的讨论	242
第二讲 一元二次方程应用举例及根的判别式	242
一元二次方程应用举例	242
一元二次方程的讨论——根的判别式	245
第三讲 一元二次方程的虚数根	247
虚数 i 的引入及复数的概念	247
第四讲 一元二次方程根与系数的关系, 求根与因式分解	253
一元二次方程根与系数的关系	253
求根与分解因式——用分解因式法求一元二次方程的根	256
第五讲 一元二次方程的求根与分解因式, 高次方程	257
二次三项式分解因式的一般公式	257
高次方程	260
第三节 二次函数	263
第六讲 二次函数的概念及图象, 一元二次方程根的 几何意义	263
二次函数的概念及图象	263
一元二次方程根的几何意义	265
第七讲 二次函数的极值	267
二次函数的极值	267
应用举例	269
第四节 二元二次方程组	271
第八讲 二元二次方程组的概念和解法	271
二元二次方程组的概念	271
一些特殊二元二次方程组的解法	272
第五节 分式方程和根式方程	276
第九讲 分式方程的概念, 解法及应用	276
分式方程的概念	276
分式方程的解法及应用举例	278

第十讲 根式方程的概念、解法及应用	280
根式方程的概念	280
根式方程的解法及应用举例	281
第五章习题课 (习题课 4)	285
第五章总结说明	292

第六章 不等式

第一节 不等式及其基本性质	295
第一讲 不等式的概念, 区间	295
不等式的概念	295
区间的概念及记号	296
第二讲 不等式的基本性质及简单不等式的证明	299
不等式的基本性质	299
一元一次不等式	301
简单不等式的证明	303
第二节 一次不等式	304
第三讲 绝对值不等式、关于绝对值的几个不等关系	304
绝对值不等式的概念及其最简单的类型	304
关于绝对值的几个不等关系	307
第四讲 一元一次不等式组	309
一元一次不等式组的概念	309
一元一次不等式组的解法举例	309
第五讲 二元一次不等式的概念、解法及应用	313
二元一次不等式的概念	313
二元一次不等式的解法 (举例)	314
第三节 一元二次不等式	319
第六讲 一元二次不等式的概念, 图象解法	319
一元二次不等式的概念	319
一元二次不等式的图象解法	319
第七讲 一元二次不等式的分解因式解法	324

分解因式解法	324
第六章习题课 (习题课 5)	328
第六章总结说明	334

第七章 对 数

第一节 指数式和对数	337
第一讲 指数概念的扩充, 指数式和对数的定义	337
指数概念的复习与扩充	337
指数式	338
对数	340
第二节 常用对数	343
第二讲 常用对数的定义和性质, 查表求常用对数	343
常用对数的定义及性质	343
查表求常用对数	344
第三讲 常用对数的首数和尾数, 反对数表	347
常用对数的首数和尾数	347
反对数表——已知对数求真数	349
第三节 对数的运算规则和应用	352
第四讲 积、商、幂的对数, 换底公式	352
积、商、幂的对数	352
换底公式	355
第五讲 利用对数简化计算	357
利用对数简化计算	357
第六讲 指数方程和对数方程	362
指数方程和对数方程的例子	362
第四节 自然对数	366
第七讲 自然对数的定义, 运算规则 and 自然对数表	366
自然对数的定义	366
自然对数的运算规则	367
自然对数表	368

第七章习题课(习题课6)	371
第七章总结说明	376

第八章 数 列

第一节 等差数列	378
第一讲 数列的概念和记号, 等差数列的定义、通项公式 和等差中项	378
数列的概念和记号	378
等差数列	380
通项公式	381
等差中项	382
第二讲 等差数列的求和公式	384
等差数列求和问题的引入	384
等差数列求和的一般公式	385
第二节 等比数列	390
第三讲 等比数列的定义、通项公式和等比中项	390
等比数列的定义	390
等比数列的通项公式	391
等比中项	392
第四讲 等比数列的求和公式, 调和数列	394
等比数列的求和公式	394
调和数列	395
调和中项	396
第三节 其它数列举例	398
第五讲 高阶等差数列的定义和通项公式	398
二阶等差数列的概念	398
二阶等差数列的通项公式	399
m 阶等差数列(m 是正整数)的概念与通项公式	401
第六讲 高阶等差数列前 n 项的和	402
高阶等差数列通项公式的进一步说明	402

高阶等差数列前 n 项的和	403
第七讲 Σ 符号	407
Σ 符号的介绍	407
关于 Σ 符号的三个公式	408
Σ 符号的应用举例	409
第八章习题课 (习题课 7)	412
第八章总结说明	417
《代数》上册复习及习题课	419

总 说 明

一、讲座的目的与对学员的要求

开设电视“中学数学基础知识”讲座的目的是帮助具有初中文化水平的学员复习、补习或学习初等数学（即中学数学）知识，为进一步学习奠定基础。

考虑到电视教学及成年人学习的特点，我们以为教学时间不宜太长，因此，本讲座计划每周安排播讲三学时，约在两年时间用300学时左右将本课程播讲完毕。

我们使用人民教育出版社出版的《中学数学基础》为教材。在教学中根据学员的学习情况对该书内容稍加调整。这套教材分为代数、几何、三角和解析几何四部分，各部分都相应编写了辅导资料便于学员分科学习。代数辅导资料便是其中之一。

为了照顾到各科间先后次序的配合，我们将三角作为代数的后续课，解析几何作为几何的后续课，分成几何与代数两门课程同时进行讲授。

由于本讲座属于社会教育的性质，而不是学校的正规教学，因此，讲课中以基础知识为主而不强调数学观点、严格的数学体系或解题的个别技巧。

以下几点是对学员提出的要求。由于课时少我们尽量避免重复叙述。所以，要求学员：

1. 必须抓紧时间自学，听讲与自学配合，才能取得较好的效果。

2. 在每次听课前要按照指定页数，做好课前预习，尽量做到课前能知道这一节所要讲的主要内容及自己存在的问

题，以便听课时能抓住重点，结合自己所存在的问题深入领会。

3. 一定要做到课后复习，在复习的基础上再动手做练习。

为了做到以上几点，本《资料》是按照预计的教学过程编写的，希望学员们注意这一点。

4. 对课内所讲的内容，如遇有疑难，应及时通过互相讨论和研究，把问题搞清楚，以免愈积愈多，影响以后的学习。

5. 要认真做好阶段复习，对每一阶段所学过的知识，要有一个概括的了解。

我们相信，能做到以上几点，就会取得一定的成绩。

最后，如果有的学员因故较长时间缺课，我们以为也不必失去信心。在这种情况下，建议不必从缺课的内容开始补起，而首先补上与正在播讲课程有关的内容，及时赶上听课，以后抽出时间再补上所缺的课。在这一方面，本《资料》的说明，各章的说明或许能对大家有所帮助。

二、代数内容概述

本课程中代数部分所有内容（包括上、下两册），大体上可以归结为以下几类问题：

1. 数的概念的扩充

主要内容包括预备知识“数的概念和运算”与第九章“数集”的第四、五两节，还有第五章二次方程中的虚数根部分，即有理数、实数、复数概念以及它们的四则运算与乘方、开方以及根据运算定义所推出的运算定律和运算法则。

数的概念的扩充及数的运算律是代数中最主要也是最基础的知识，这可以从以下两个方面加以说明：

(1) 数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学。人们对现实世界中的事物进行观察和研究,就要接触到各种物理量,如长度、重量、时间等等。观察它们的可加性及连续性的共同特征,抽象出来就产生了实数。有了实数以后,我们才可以给出各种数量以及它们的关系的数学的表示。因此,没有数,固然没有数学的产生,也不可能有自然科学及一切科学。

(2) 只有在掌握了数的概念,问题中数的允许范围及其运算的基础上,才能进一步研究代数式的恒等变形,方程的解以及函数,不等式等等问题。我们举一些例子说明:

例 1 “将 $x^6 - x^4 - 4x^2 + 4$ 分解因式”, 这种泛泛的提法就是不明确的。因为在有理数范围内

$$\begin{aligned} x^6 - x^4 - 4x^2 + 4 \\ &= x^4(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^4 - 4) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 2)(x^2 - 2) \end{aligned}$$

到此为止,就已经是最后的答案了;而在实数范围内,最后的答案则是:

$$\text{原式} = (x + 1)(x - 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$$

若在复数范围内,答案则是:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (x + 1)(x - 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \\ &\quad (x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) \end{aligned}$$

例 2 问 $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ 错在何处?

答: 错在没有注意运算性质 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 的成立是有条件的,它要求 $a \geq 0$, 而且 $b \geq 0$ 。

例 3 由 $x^2 > y^2$ 一般可以推出 $|x| > |y|$, 现在 $-1 > -2$ 又 $|\sqrt{-1}| = 1, |\sqrt{-2}| = \sqrt{2}$, 而 $1 > \sqrt{2}$, 这是为什么呢?