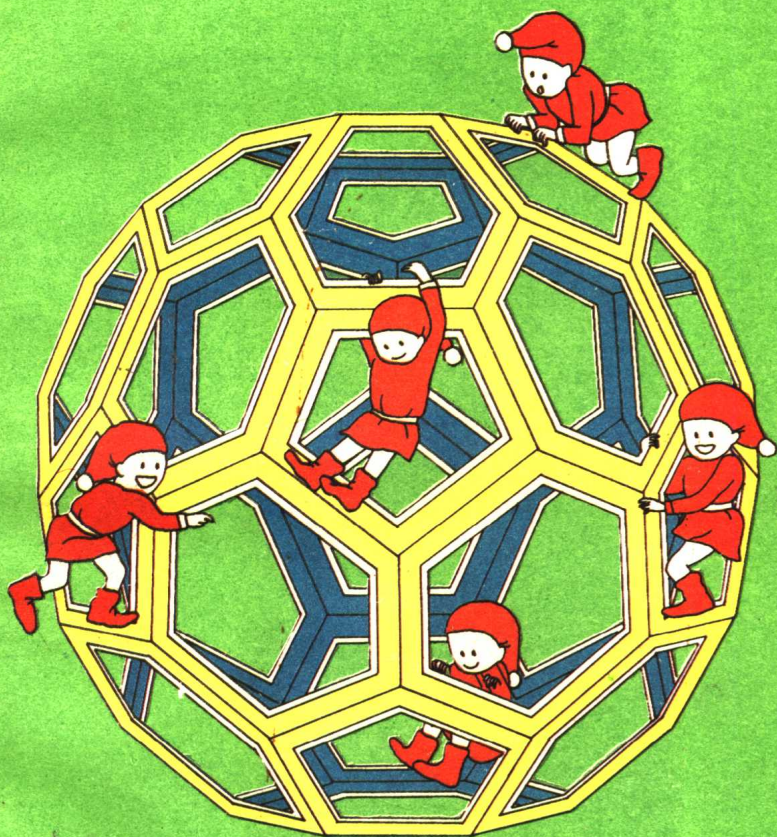


中学数学知识丛书

[日] 横地 清 编

二次函数的探索



知识出版社

中学数学知识丛书

（第1册） 函数 图像

二次函数的探索



● ● ● ● ●

数学知识丛书

(日) 横地 清 编

二次函数的探索

(日) 松宫哲夫

桧本昌彦 著

王家彦 译

知识出版社

中学数学知识丛书

二次函数的探索

〔日〕松哲宫夫 著
桧本昌彦

王家彦 译

知识出版社出版

(北京阜成门北大街17号)

新华书店总店北京发行所发行 北京景山学校印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 2.5 字数 52千字

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

印数: 1—2750

统一书号: 13214·49 定价: 0.70元

ISBN 7-5015-0170-X

内 容 提 要

本书是日本横地清教授为青少年数学爱好者编写的一套初等数学知识丛书，共35本。这套丛书的特点是通过日常生活中经常遇到的具体现象的分析来讲述初等数学，提高青少年学习数学的兴趣。《二次函数的探索》一本主要介绍二次函数——抛物线的各种性质。本书不是抽象地讲二次函数，而是通过自由落体、喷泉等现象来寻找二次函数。第一章举了各种实验，第二章对瞬时速度做了详细叙述。为了读者便于理解提供了许多图形和照片。本书不仅可供青少年阅读，对中学教师，师范院校的学生也有参考价值。

前 言

学习数学的目的，是为了研究和处理自然现象和社会现象所表现出来的数量关系，以及培养与数量和图形有关的认识能力。以便更深入地考察自然现象和社会现象，数学在我们生活中有广泛的应用。

本书基于上述想法，对中学生所学的二次函数进行深入的研究，并在编写过程中，注意了以下几点：

(1) 对于函数关系以及二次函数，不仅进行抽象的研究，并使它与周围的现象以及理科教材相联系起来。

(2) 从具体现象中抽象出函数时，强调了数量化过程，同时又把函数的具体应用作为重点。

(3) 特别是在第一章中许多例子，取自于实验，在第二章中对瞬时速度作了详细说明，体现了本书的特点。

(4) 大量地使用图表和照片以便易于理解和阅读。

著 者

本书的用法

(1) 在周围环境中, 有哪些现象是“二次函数”, 有哪些现象是“抛物线”, 应用于哪些方面? 我认为一方面留心这些事情, 一方面阅读本书。也就是, 联系你周围的现象和事物来学习是最好的方法。

(2) 关于本书中提出的实验与作业要预备秒表、尺、天秤等度量仪器以及电子计算器。自己能做, 要尽量去做, 这对锻炼自己意志是有好处的。

(3) 在第一章 § 2 中提到的落体运动的“记时器”“台车”等, 在各个学校的物理实验室中都有, 最好在实验室里做。摆的周期实验, 如果有材料, 在家中也可以做。

第三章 § 3 中所谓冷却器喷水所形成的曲线的方程, 我认为最好是由自己测定数据, 求出方程。

(4) 本书适合于在小组或俱乐部里共同讨论学习, 大家一起做实验就更加有趣。

目 录

前言

本书的用法

第一章 观察周围的现象 (1)

§ 1 从具体例子来分析函数关系 (2)

变量 (2)

函数关系 (4)

§ 2 寻求二次函数 (10)

落体运动的实验 (10)

摆的周期的实验 (14)

二次函数的其它例子 (16)

第二章 求瞬时速度 (19)

§ 1 下落物体的瞬时速度 (20)

平均速度 (20)

瞬时速度 (26)

§ 2 二次函数的变化率 (35)

一次函数的变化率 (35)

二次函数的变化率 (37)

一次函数与二次函数的区别 (40)

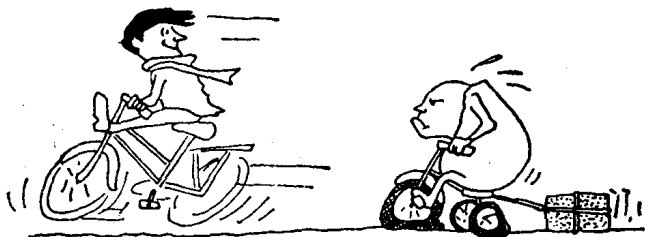
测验题 (41)

测验题解答 (43)

第三章 观察喷泉 (45)

§ 1	简单的二次函数的图象	(46)
	$y = x^2$ 的图象	(46)
	$y = ax^2$ 的图象	(47)
	抛物线和例子	(49)
	$y = ax^2 + c$ 的图象	(51)
§ 2	一般二次函数的图象	(53)
	$y = ax^2 + bx + c$ 的图象	(53)
§ 3	从具体例子中抽象出的抛物线方程	(57)
	冷却器喷水所形成的曲线的方程	(57)
	圆锥截线的曲线方程	(59)
§ 4	二次函数的极大值和极小值	(61)
	$y = ax^2$ 的值的变化的变化	(61)
	$y = ax^2 + c$ 的值的变化的变化	(63)
	$y = ax^2 + bx + c$ 的值的变化的变化	(63)
	测验题	(66)
	测验题解答	(67)

第一章 观察周围的现象



在我们周围，变化着的事物很多。例如，一天内温度的变化，计算器销售数量的变化等等。

把这些变化的数量关系看作函数关系来研究，是比较方便的。

我们已经学过的函数关系有比例、反比例以及一次函数等等。但是当自行车沿坡道向下自由运动时，其距离与时间之间的函数关系就不是一次函数。

对于这种新的函数关系，在本章中将进行研究。首先从具体例子入手。

§1 从具体例子来分析函数关系

变 量

在如图 1-1 的杯子中注入果汁。现在用麦管来吸食果汁,注意观察杯中果汁的变化,并作上记号,在这个现象中涉及许多数量(变量)。例如,可列出:杯中注入的果汁量;杯中减少的果汁量;

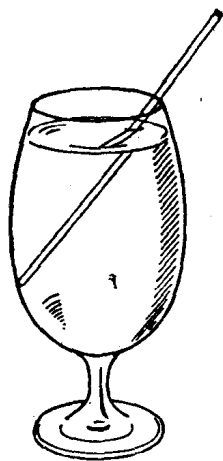


图1-1 注入果汁的杯子

注入的果汁量和杯子本身的重量之和的总重量;果汁在杯中的深度;时间。

从以上这些变量中取出两个来考察,例如,“时间”与“果汁的深度”,于是,我们发现:

果汁的深度随时间而变化;

(1)

除(1)这种关系以外还有杯中的果汁量随时间而变化;

果汁的减少量随时间而变化;

注入的果汁连同杯子一起的总重量是随杯中果汁的深度而变化。

当用麦管按一定比例的时间,一口一口地来吸取杯中果汁时,如表 1 和图 1-2 所示,实验的结果就表达了关系(1)。

表1 喝果汁的时间与深度关系的实验结果

时间 (秒)	0	2	4	6	8	10	10.3
深度 (cm)	10.0	8.6	7.4	6.4	4.8	1.6	0.0

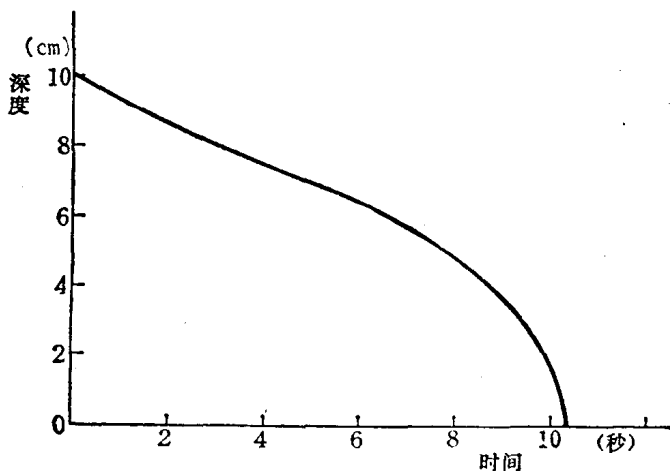


图1-2 喝果汁的时间与深度的关系

当我们要研究事物之间所存在的数量关系时，首先必须从中找出两个变量。然后研究这两个变量之间的关系。

【例题1】 把边长为 5 cm 的正方形的薄板，如图 1-3 所示在桌面上沿一直线无滑动地转动前进。而且

1. 变量可取不小于 5 的值；
2. 研究其中的任意两个变量之间的关系，并用列表和图象表示。

【解】 1. 变量：

板的前进距离，板的转动次数，最高顶点的高度，点B

的轨迹（圆弧）的长度，正方形的位置，时间。

2. 两个变量之间的关系：

板的前进距离与板的转动次数之间的关系 (1)

点B的轨迹的长度与板的前进距离之间的关系 (2)

正方形的位置与时间之间的关系 (3)

关于 (1) 的关系，如表 2 和图 1-4。

函 数 关 系

就上面例题 1 所考虑的关系 (1) 而论，当板的转动次数取得一个确定的值时，于是板的前进距离就相应地取得确定的值，变量之间的这种关系称为函数关系。或者说，板的转动次数与板的前进距离之间有函数关系。

一般地，有两个变量，如果一个变量取得任一确定的值时，另一个变量也相应地有确定的值。则称这两个变量之间有函数关系。

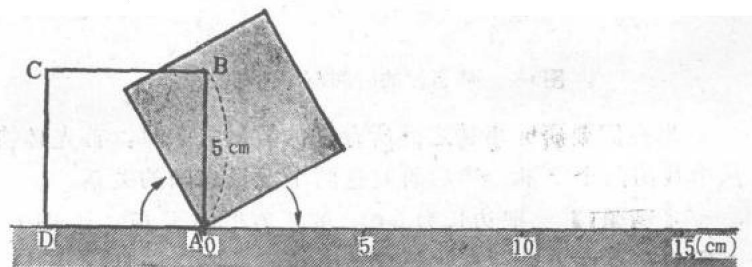


图 1-3 正方形薄板在桌上转动

表2 板的转动次数与板前进距离之间的关系

板转动的次数 (次)	1	2	3	4	5	
板前进的距离 (cm)	5	10	15	20	25	

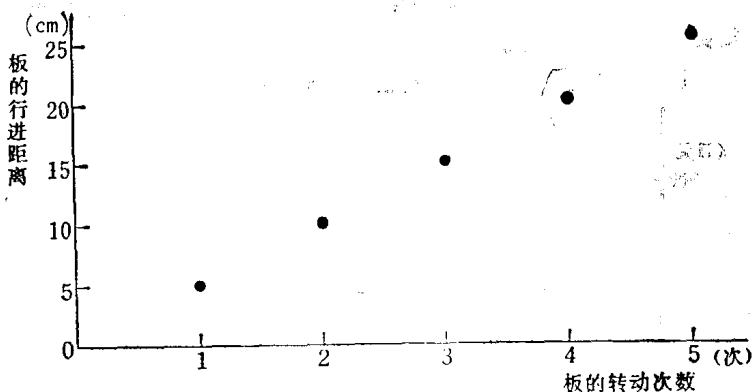


图1-4 板的转动次数与板前进距离之间的关系

【例题2】 在日本国内一般邮件中,规定尺寸之外的邮件的邮费为:

50g以下为100元(日元),100g以下为140元(日元),
250g以下为200元(日元),500g以下为300元(日元),
(至多可邮寄4kg,这里只列出500g)。

这时可以说邮件的重量与邮资之间有函数关系。试以图象表示。

【解】 邮件重量一经确定,则邮资唯一确定,所以说邮件重量与邮资具有函数关系。

把它用图象来表示时,则如图1-5(但是,图中的○表示不取该点的值)。

【问1】 日文电报(普通)。25个字以内的资费为150元(日元),每增加5个字,资费增加20元(日元)。

这时,电报的字数与资费具有函数关系。试把这种函数关系用图象表示出来。

【答】 电报字数一经确定，则资费唯一确定，因此电报字数与资费之间有函数关系。

图象，如图1-6（这里只列出到50个字）。

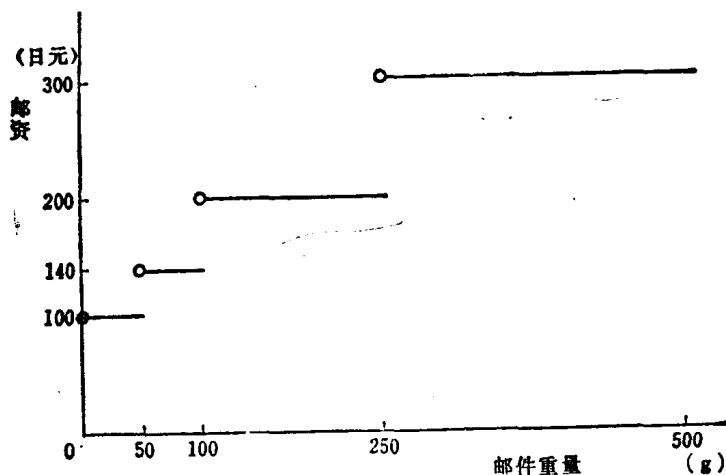


图1-5 邮件重量与邮资之间的关系

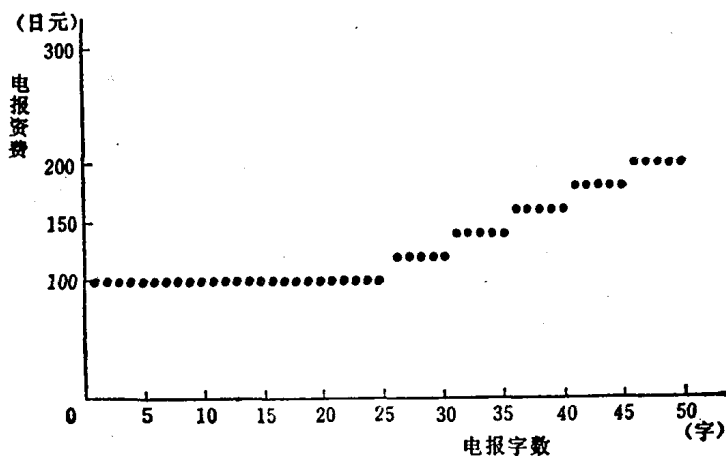


图1-6 电报字数与电报资费间的关系

以上所列举的函数关系的例子，用式子把它表示出来是比较困难的。下面再举出能用式子表示的函数关系的例子。

【例题3】 设有底面积为 400cm^2 ，高度为 30cm 的棱柱形水槽。把水按每秒 80cm^3 的流量注满水槽。这时，向槽中注水的时间（秒）与水的深度（cm）之间具有函数关系。

试把这个函数关系用式子和图象表示出来。

【解】 设注水时间为 x 秒时，水的深度为 $y\text{cm}$ ，则 x ， y 之间有下列关系。

$$y = \frac{80}{400} x$$

即

$$y = 0.2x \quad (1)$$

在1秒内注入了深度为 0.2cm 的水，已知水槽的高为 30cm ，所以 $30 \div 0.2 = 150$ ，即经过150秒可注满水槽。

因此， x 的变动区域为

$$0 \leq x \leq 150$$

(1) 的图象如图1-7。

有两个变量 x ， y ，如果 x 取得确定的值， y 的值随之唯一确定时，则说 x ， y 具有函数关系，或者说 y 为 x 的函数。

设 y 是 x 的函数，它们之间的关系可用

$$y = ax \quad (a \text{ 是不为 } 0 \text{ 的常数})$$

表示时，则说 y 与 x 成比例， a 为常数。

【问2】 在例1(2)的①中，板的前进距离是板的转动次数的函数。试把它用式子表示出来。

【答】 设板的转动次数为 x ，板的前进距离为 y （cm），因为正方形板的边长为 5cm ，所以

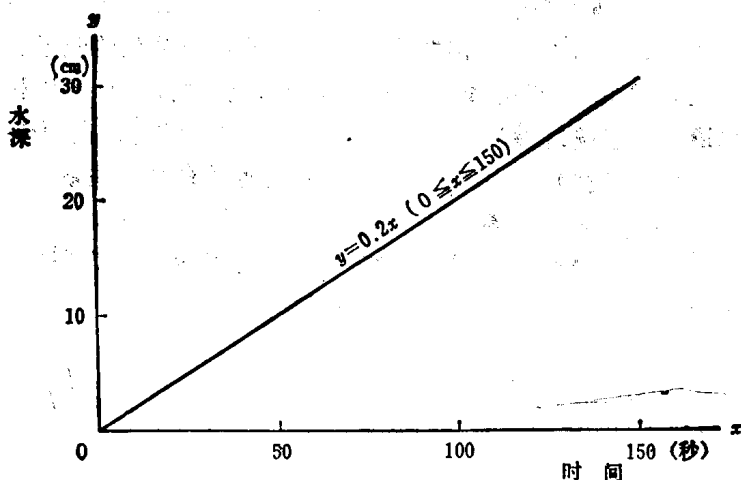


图1-7 向水槽注入水的时间与水深之间的关系

$$y = 5x \quad (x \text{ 为自然数})。$$

【例题4】 在长度为20cm的弹簧上，挂上重物，到100kg为止，观察弹簧的长度的变化，列表如下：

重物的重量 (kg)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
弹簧的长度 (cm)	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

试把重物的重量与弹簧长度之间的关系，用式子和图象表示出来。

【解】 设重物的重量为 $x(g)$ ，弹簧的长度为 $y(cm)$ 。因为弹簧原来长度为20cm，所以当挂上1g的重物时，它伸长0.1cm，因此有

$$y = 0.1x + 20 \quad (0 \leq x \leq 100)$$