相似形

中國数學會上海分會
中學数學研究委員會編

新知識出版社

相　似　形

中國數學會上海分會
中學數學研究委員會編

新知識出版社

一九五六年・上海

相　似　形

中國數學會上海分會
中學數學研究委員會編

*

新知識出版社出版
（上海湖南路九號）
上海市書刊出版業營業許可證出〇一五號

上海联華印刷廠印刷　新華書店上海發行所總經售

*

書號：新0220

開本：787×1092 1/32　印張：4 1/4　字數：88,000

一九五五年十一月第一版　一九五六年三月第二次印刷
印數：8,601—15,600 本

定價：(7 類)0.46 元

序　　言

本會爲了學習蘇聯先進經驗，幫助教師積極提高教學質量，並根據當前中學教學實際需要，决定着手編寫有關高中數學各科包括幾何、三角、代數教材內容的小册子，陸續分批出版，以提供中學數學教師作爲進一步研究和了解教材的參考，從而更好地掌握教材的教學目的。同時也可供高中學生作爲課外鑽研的題材，以利更深刻地理解教材內容。我們希望通過這一套小册子的出版，能使數學界同志對中學數學教材的研究得到廣泛的交流。

這本"相似形"的小册子，是根據一九五四年中央人民政府教育部中學數學教學大綱修訂草案高一平面幾何相似形的教材內容編寫的。不過在若干地方略有引伸，所以這樣，或者由於考慮到教學方法，或者由於需要說明教材的科學性和系統性。教師在課堂教學時，應當根據吉西略夫原著高級中學課本平面幾何進行講解，避免較複雜的論證。

本册對綫段的度量、綫段的比例、相似概念與相似變換作了比較系統的敍述，對於相似形的證明與作圖則着重問題的分析和討論，特別對於聯系實際作了比較詳細的介紹。

本會在編寫本册前，曾擬就編寫計劃，邀請上海市十餘個學校的高中平面幾何教師參加意見，又經華祇文、李忠諫、徐

春霆、張元書、賴雲林、黃松年等同志兩次討論確定初步編寫提綱。分別由張元書、賴雲林兩同志提供材料，而由黃松年同志執筆寫成，再經楊榮祥、范際平兩同志校訂，最後由黃松年同志作了修正。雖然這樣，但由於我們水平有限，時間忽促，缺點是難免的，希望數學界同志予以批評和指正。

中國數學會上海分會中學數學研究委員會

一九五五年八月

目　　錄

學習相似形的目的及其基礎知識

過去我們在初中階段研究平面幾何直綫形與圓的時候，所接觸到的幾何圖形，都只研究這些量與量之間相等的關係或不等的關係。如證明兩個三角形的全等，或其對應邊角相等；又如利用同圓或等圓的條件，來得出等弦對等弧，等弧對等弦等等；這些圖形，不論三角形或圓，都是由物體中抽象出來的。但在客觀存在中，有許多大小不等、形狀相同的物體，譬如，鏡中的人物、照片、電影銀幕上的人物等等。我們在研究客觀存在中量與量的相等關係以後，自然要進入研究它們大小不等、形狀相同的關係。因此，我們有研究相似形的必要。

我們的祖先早就運用了相似形的理論，在發展生產方面做出了偉大的成就。如夏禹治水，使洪水由高山流入平川，就是運用了相似直角三角形的性質；與周公同時代的商高運用直角三角形勾三股四弦五的性質及相似直角三角形，測量太陽的高度。三國時，魏劉徽運用了相似三角形的性質研究了重差術，運用它測量海島的高度，即爲現在三角學的起源。南北朝祖冲之利用相似比的性質研究圓周率，求得圓周率在3.1415926與3.1415927之間。他對研究圓周率的精密度，在那個時候在世界上是首創。從這裏使我們更加體會學習平面幾何相似形，不僅要理解相似的幾何圖形的性質及運用這

些性質來解決作圖、計算、證明等問題，同時要掌握幾何圖形相似變換的規律，訓練自己能善於運用相似變換的理論，進行實地測量距離和高度、繪製地形圖、製作有關的工具等等的基本技能。這些不僅對今後學習立體幾何和其他科學知識打好基礎，而且，使自己掌握了這些技能以隨時爲建設祖國保衛祖國而忠誠的服務。在蘇聯反法西斯衛國戰爭的時候，許多青年丢下書包，走向保衛祖國自由獨立戰爭的最前綫，在艱苦的戰爭環境裏，他們有的靈活地運用了在課堂所學到平面幾何相似形的理論知識，發揮了無比的智慧，運用自己的身長、步伐等生理條件，或者運用最簡單的工具，如一根木頭或樹枝，進行測量距離或高度以偵察敵人，了解敵人和戰勝敵人。這就是理論聯系實際，使課堂所學的知識變爲一種活的知識的具體表現。這些都是值得我們學習的。

相似形一章是歐幾里德平面幾何重要組成部分之一，它是緊接着直綫形和圓的基礎上而提出的教材，同時又爲今後研究正多邊形及面積兩章教材創造條件。**而相似形一章的理論基礎主要又建築在平行綫公理，阿基米德公理和康脫兒公理的基礎上**，從阿基米德及康脫兒公理來研究綫段的量度，從綫段的可公度和不可公度導出兩綫段之比，再從平行公理及兩綫段之比導出相似形概念，再進入幾何圖形相似變換性質的研究。因此，不僅相似形一章與平面幾何各章互相啣接緊密聯系，就是相似形整個一章的教材內容前後都具有科學的系統性，內在的關聯相互制約的。蘇聯吉西略夫所編高中平面幾何就是具有這樣科學的系統性，使我們在學習時能獲得一個完

整的概念。以往教材對綫段的量度這個概念的研究很忽視，雖然也能研究相似形，只不過是零羅堆砌，爲機械的照顧歐幾里德幾何系統，而安排相似形的研究，以致對於相似變換這一個極重要的理論避而不談，或者接觸很少。因此帶給學生是一些含含糊糊的知識，更不會運用所學到的東西到實際中去。而蘇聯吉西略夫所編高中平面幾何教材，徹底改變了這些不良傾向。我們這次編輯這本小册子，也就是完全根據部頒中學數學教學大綱修訂草案和吉西略夫所編教材的精神來編寫的。

現在我們先來研究平行公理，阿基米德公理及康脫兒公理的性質。**什麼叫做平行公理呢？歐幾里德幾何平行公理是："設 a 是任意一直線，A 是不屬於這直綫的一點，於是在 a 與 A 所決定的平面上至多只有一條通過 A 而不與 a 相交的直綫。"** 由於這個平行公理和它等價的公理，而導出有關相似形的定理。

1. 通過直綫外每個點，只能引一條直綫平行於已知直綫。

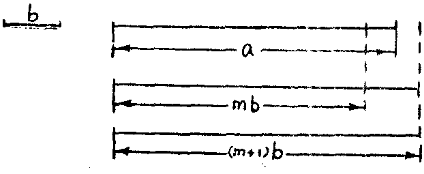
2. 兩條平行直綫與第三條直綫相交，則同位角相等。

3. 三角形內角的和，等於兩直角。

這些公理或定理在初中幾何已經詳細的研究過，這裏不再重複。

什麼叫做阿基米德公理呢？阿基米德公理是："設 AB 與 CD 是任意兩綫段，於是在直綫 AB 上，存在着無限個點 A_1，A_2，A_3，……A_{n-1}，A_n，這樣的排列着，使點 A_1 在 A 與 A_2 之間，點 A_2 在 A_1 與 A_3 之間等等，且綫段 AA_1，A_1A_2，……$A_{n-1}A_n$，

各與綫段 CD 疊合，而點 D 在 A_{n-1} 與 A_n 之間。"這也就是說："凡兩個綫段 a 和 b（圖 1）無論較長綫段 a 如何長，較短的綫段 b 如何短，我們總可以在較長的綫段 a 上連續截取較短的綫段 b，截取到某一次以後，就可得出沒有剩餘或者得到比較短綫段更短的剩餘綫段。"



（圖 1）

如 a, b 爲已知綫段，$a>b$，則可求出一個自然數 m（圖 1），使 $mb \leq a$ 或 $(m+1)b>a$。

阿基米德，是紀元前 287—212 年希臘的數學家，他從許多勞動人民生活實際中積累的經驗，予以總結，得出這條幾何綫段量度的公理，對當時自然科學和數學的推進起了一定的作用。

關於阿基米德公理我們再用下面的問題來說明：設綫段 AB 與綫段 CD，AB 與 CD 分別用一個正數 a, b 來表示。

1. 當綫段 AB 等於綫段 CD，即 $a=b$。

2. 若 P 是 AB 間的一個點，綫段 AP 與 PB 分別對應於一個正數 c 及 d，則 $AB=c+d$。

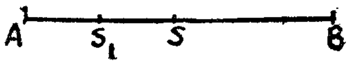
3. 設 AB 爲單位綫段，用 AB 去量度 CD，若 CD 恰好含有一倍的 AB，則 CD 稱爲含有一個單位綫段（AB）的長，或稱 $CD=1$。

4. 綫段 CD 大於綫段 AB，則 $b>a$。

5. 若綫段 CD 間含有一點 P，令 CP, PD 分別對應一個正數 c 及 d，而綫段 $CP=AB$，即 $c=a$。$CP+PD=CD$，

即 $b=c+d$，代入得 $b=a+d$，$\because a, b, d$ 均表示正數，$\therefore b>a$。

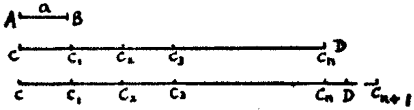
6. 若 AB 爲單位綫段，如將 AB 二等分，用 S 表示中點，則 $AS=SB=\frac{1}{2}AB$，同樣可將 AS（或 SB）分爲二等分，用 S_1 表示 AS 中點，則 $AS_1=SS_1=\frac{1}{2}AS=\frac{1}{4}AB=\frac{1}{2^2}AB$，則 AS 稱爲單位綫段 AB 的 $\frac{1}{2}$，AS_1 稱爲單位綫段 AB 的 $\frac{1}{4}$（如圖 2）。如果我們再將 AS_1 二等分，設中點爲 S_2，則 AS_2 稱爲單位綫段 AB 的 $\frac{1}{2^3}$。



（圖 2）

照這樣不斷地截下去，我們可以求出 AS_n 爲單位綫段 AB 的 $\frac{1}{2^{n+1}}$。

7. 若 $CD>AB$，以 AB 爲單位綫段在 CD 上從 C 點向 D 點方向依次截取綫段 CC_1，C_1C_2，C_2C_3……等（使 C_1 在 C 與 C_2 之間，C_2 在 C_1 與 C_3 之間……C_n 在 C_{n-1} 與 C_{n+1} 之間），使均等於 AB 的長，如果有一點

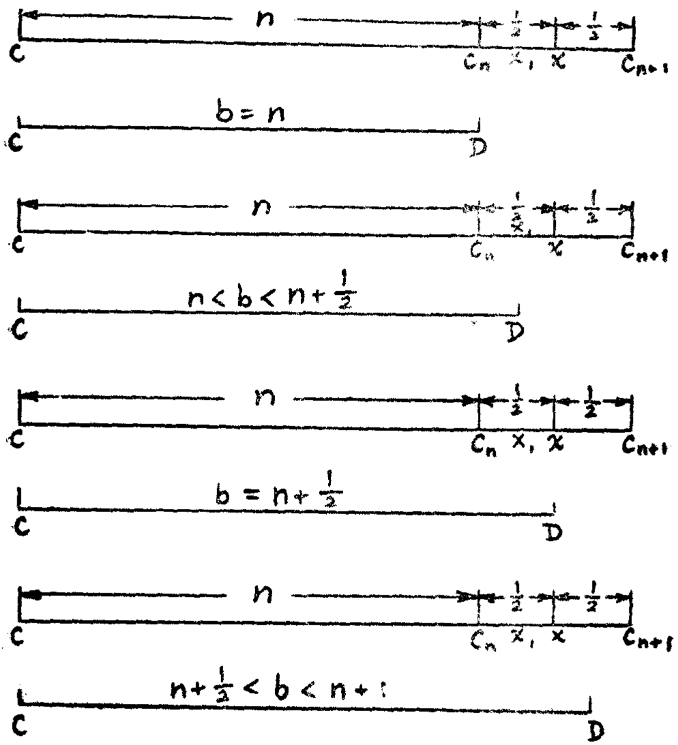


（圖 3）

C_n 與 D 點重合，則 $b=n$。如果沒有任何一點 C_1, C_2, C_3……C_n 與 D 重合則根據阿基米德公理，存在着兩個點 C_n 和 C_{n+1}，使 D 介乎 C_n 和 C_{n+1} 之間，這時 $n<b<n+1$。$\because$ 綫段

$CC_n < CD < CC_{n+1}$，∴ CC_n 及 CC_{n+1} 的長度就分別等於 n 和 $n+1$，這樣數目 b 可精確到單位數（如圖 3），b 可以準確到任意程度。這種得到數目 b 的值的步驟，稱為測量。

如果用 X 將 $C_n C_{n+1}$ 分成二等分，使 $C_nX = XC_{n+1}$，則 D 點或在 C_nX 綫段之間，或在 $C_{n+1}X$ 綫段之間，或與 X 點重合，此情況即說明 CD 或者小於單位綫段 AB 的一半或者大於單位綫段 AB 的一半，或者等於單位綫段 AB 的一半，即 $n< b < n+\frac{1}{2}$，$n+\frac{1}{2}< b < n+1$，$b=n+\frac{1}{2}$。（如圖 4）



（圖 4）

若$b = n + \frac{1}{2}$，則b的數目完全確定，也即測量的步驟終止。當$n < b < n + \frac{1}{2}$及$n + \frac{1}{2} < b < n + 1$的情況時，則$b$準確到單位綫段的$\frac{1}{2}$，但還可以繼續測量下去，再將綫段$C_nX$或$C_{n+1}X$二等分，即$C_nX_1 = X_1X$，也就是取單位綫段$\frac{1}{4}AB$去量$CD$，這時或者$D$與$X_1$重合，則測量步驟終止，得出準確到單位綫段$AB$的$\frac{1}{4}$的值。如果$D$與$X_1$又不重合，然後取單位綫段$\frac{1}{8}$，繼續測量下去。像這樣測量步驟可一直進行下去，這樣將b表成二進小數的形式，即$b = n.\ m_1m_2m_3$……，這裏n是表示整數部分，顯示CD綫段含多少單位綫段AB。m_1是第一位小數表示1或0，是看CD含有n個單位綫段以外，是否還包含單位綫段的一半。m_2也是1或者0，看CD除n個單位綫段和m_1個單位綫段的一半外，是否尙包含單位綫段的$\frac{1}{4}$。以下可依次類推。例如$b = 3.011$，則CD含三個單位綫段AB及一個$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{8}$的單位綫段，這時D與X_3重合。

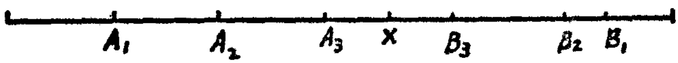
8. 若用單位綫段AB去量綫段CD，總可以找到足够大的整數n，使將單位綫段分成2^n相等部分以後，得到的綫段都小於它的單位綫段AB（如圖5）。$CD = CS + SD$，$CS = nAB$，$SD < AB$，則$CD = nAB + SD < (n + 1)AB$。

（圖 5）

若 $CD \geq (n+1)AB$，則 $CD = nAB + SD$，$\because SD = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2^2} + \frac{m_3}{2^3} + \cdots\cdots\right) AB$。其 $\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2^2} + \frac{m_3}{2^3} + \cdots\cdots\right) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots\right)$，但 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots\right)$ 是一個無窮等比級數，公比 $\frac{1}{2}$ 小於 1，它的和的極限爲 1，可見 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots\right) < 1$，即 $\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2^2} + \frac{m_3}{2^3} + \cdots\cdots\right) < 1$，$\therefore SD < AB$，故 $CD \geq (n+1)AB$ 爲不可能。

9. 如果綫段 AB 小於綫段 CD，而 a, b 是測量這兩個綫段的數目，則 $a < b$。

從上面一系列的問題可以看出阿基米德公理又可以說是：**“一個任何綫段，可以用任何一個單位綫段去量，它的量數，總可以用一個正數來表示。”關於它的逆問題是：“設在任意綫段 a 上，給予綫段的無窮敘列 A_1B_1，A_2B_2……其中每個後面的都在前面的一個的內部，若不存在着這樣的綫段**(如圖 6)**它在**



（圖 6）

所有這些綫段的內部，那末在直綫 a 上就存在着一個而且只有一個點 X 落在所有綫段 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3……等等的內部。”

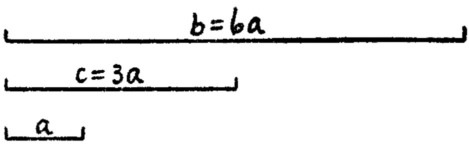
這也就是說："凡一個正數，我們總可假設一個綫段和它對應。"這個逆問題，我們稱爲康脫兒公理。關於這個公理，在這裏不作詳細的說明，我們只要知道它是阿基米德公理的逆問題，了解阿基米德公理的性質和意義就可以了（康脫兒是德國數學家 1845—1918）。

關於度量的概念

從阿基米德公理的基礎上，我們來研究空間任意兩綫段度量的問題。

定義："假如我們取一個定長綫段 a，分別去量任意兩綫段 b, c，如果 b, c 都正含有定長綫段 a 的正整倍數而沒有剩餘，則綫段 a 稱爲綫段 b, c 的公度。"

例如，$b=6a$，$c=3a$，則 a 爲 b, c 之公度。如果將 a 分成任意等分，則每一等分都是 b, c 的公度。如將 a 分成 n 等分，設 $b=6na'$，$c=3na'$，故 a' 亦必爲 b, c 之公度（如圖 7）。因此，當兩綫段，如有公度，則有無數個公度，這無數個公度中，不可能有最小的一個公度，因爲綫段 a 可作無數等分，但最小的等分的長度是無法知道的，而只有一個最大的公度。如當 $a=\frac{1}{3}S$，則 $b=6\cdot\frac{1}{3}S=2S$，$c=3\cdot\frac{1}{3}S=S$，則 S 爲最大公度。也即 c（即 S）就是 b 與 c 的最大公度。



（圖 7）

公度，就是可通約的意思。它相

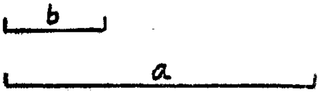
同於算術中兩個或者兩個以上的數的公約數的意思。在算術裏，我們知道只要兩個數不是互質的，則必定有公約數。如100，150都可用50來除盡它，100含50的兩倍，150含50的三倍，這裏50叫做100，150的公約數。但兩數如有公約數，則不止一個。如本例的50，25，10，都是它們的公約數。其中最大的一個公約數是50。至於兩條或兩條以上綫段的公度是具有同樣的性質。例如：只要有一條綫段拿它去量兩條或兩條以上綫段，都能量盡，則此兩條或兩條以上綫段必有公度，且有無數個公度。但只有一個最大公度。

關於兩條或兩條以上綫段的最大公度，有下面兩個重要的定理：

1. 如果兩條綫段中，較長的綫段，含有較短的綫段的整倍數而沒有剩餘，則較短綫段，就是這兩條綫段的最大公度。

如兩綫段 a,b，　$a > b$，　$a = nb$（n 表示正整數）。

求證：b 爲 a,b 的最大公度。



(圖 8)

證：$a = nb$，　b 含它本身的一倍，(如圖8)

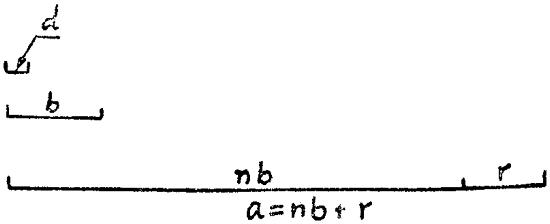
$\therefore b$ 爲 a,b 的公度。

$\because b$ 不可能再含有比它本身較長綫段的整倍數，

$\therefore b$ 爲 a,b 的最大公度。

2. 兩條綫段中，如果較長綫段含有較短綫段的整倍數而有剩餘，則這兩條綫段如有最大公度，即是較短綫段和剩餘綫段的最大公度。

如 $a = nb + r$，　$r < b$，(如圖9)



(圖 9)

求證：a,b 之最大公度 $=b,r$ 之最大公度。

證：當 b 與 r 同含有綫段 d 的整倍數。$r=md$, $b=Sd$,

(m,S 爲互質的正整數)

則 $a=nb+r=n(Sd)+md=(nS+m)d$,

$\therefore d$ 爲 a,b 的公度。

$\because a,b$ 及 b,r 兩組綫段同含有公度 d,

m 與 S 爲互質的,

$\therefore d$ 爲 b 與 r 的最大公度。

$\because a=(nS+m)d$, $b=Sd$,

而 $m+nS$ 與 S 亦必互質的,

可知 d 亦爲 a 與 b 之最大公度。

從兩綫段最大公度的基本性質，我們得出求兩綫段最大公度的方法。

例：設綫段 a 及 b, $a>b$。

求：a,b 之最大公度。

求法：將 b 綫段連續在 a 上截取，則可能出現有兩種情況：

1. 若以 b 連續在 a 上截取，截到某一次，正好將 a 截完,