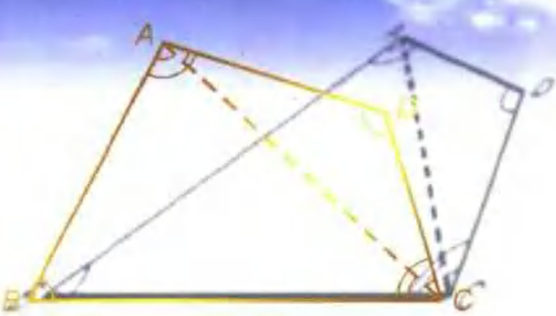
初中数学

龙门专题

四边形

南秀全 主编

(修订版)



龍門書局

龙门专题

四边形

(修订版)

主　编　南秀全
本册主编　付东峰　盛春贤

龍門書局

(修订版)

四　边　形

南秀全　主编

责任编辑　王　敏　乌　云

龍門書局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

中国人民解放军第1201工厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2002年3月修　订　版　开本:890×1240　A5

2002年7月第五次印刷　印张:5 3/4

印数:80 001－100 000　字数:213 000

ISBN 7-80160-125-4/G·161

定　价:6.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用，使学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，这是编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、生物四个学科共计55种，其中初中数学12种，高中数学12种，初中物理5种，高中物理7种，初中化学4种，高中化学10种，高中生物5种。

本套书在栏目设置上，主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——“基础篇”和“综合应用篇”(高中为“3+X”综合应用篇)。“基础篇”中的每节又分为“知识点精析与应用”、“视野拓展”两个栏目。其中“知识点精析与应用”着眼于把基础知识讲透、讲细，帮助学生捋清知识脉络，牢固掌握知识点，为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。“视野拓展”则是在牢固掌握基础知识的前提下，为使学生成绩“更上一层楼”而准备的。需要强调的是，这部分虽然名为“拓展”，但仍然立足于教材本身，主要针对教材中因受篇幅所限言之不详，但却是高(中)考必考内容的知识点(这类知识点，虽然不一定都很难，但却一直是学生在考试中最易丢分的内容)，另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高(中)考形势，综合题与应用题越来越多，试行“3+X”高考模式以后，这一趋势更加明显。“综合应用篇”正是为顺应这种形势而设，旨在提高学生的综合能力与应用能力，使学生而对纷繁多样的试题，能够随机应变，胸有成竹。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》，有以下几个特点：

1. 以“专”为先　本套书共计55种，你尽可以根据自己的需要从

中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释,读过一本后,可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2. 讲解细致完备　由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析,对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识,能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小,更易于理解和记忆。

3. 省时增效　由于“专题”内容集中,每一本书字数相对较少,学生可以有针对性地选择,以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4. 局限性小　与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及,并分别自成一册;“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排,而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题,即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系,从而自然地连点成线,从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义,以减小其随教材变动的局限性。

5. 主次分明　每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例,使学生能够根据自己的情况,权衡轻重,提高效率。

本套书的另一特点是充分体现“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才,它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言,只有提高教学质量,提高效率,才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出,讲、练到位,对于提高学生对某一专题学习的相对效率,大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖,编写难度很大,又受作者水平所限,书中难免有疏漏之处,敬请不吝指正。

编　者

2001 年 11 月 1 日

编委会（初中数学）

（修订版）

龙门专题

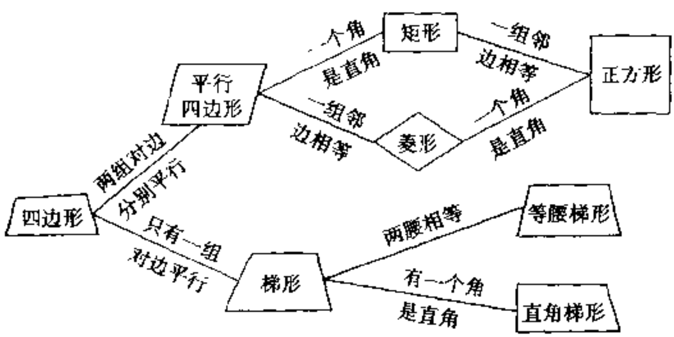
目　录

第一篇 基础篇

本书各章知识在中考题中比例如下表

四边形	平行四边形	梯形
约占 1%～3%	约占 3%～6%	约占 3%～5%

本书各章知识结构如下图



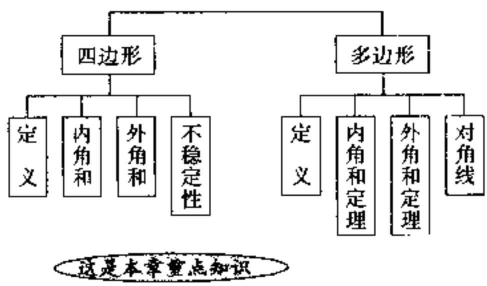
四边形是人们日常生活和生产实践中应用较广泛的一种图形，也是平面几何研究的主要对象．本书主要研讨四边形，就内容上来说，它是平行线和三角形知识的应用和深化，通过添加辅助线把四边形转化为三角形，运用三角形的知识来研究四边形的问题，从而得到四边形的一些新知识．当得到了四边形的新知识后，我们要掌握它，灵活运用它，特别要分清它们之间的联系、区别、共同点、不同点，如平行四边形与梯形的联系、区别．当已知一个四边形有一组对边平行，那么它可能是平行四边形，也可能是梯形，只有当你确定了另一组对边是否平行，才能区分它到底是平行四边形还是梯形；还有，几种特殊的平行四边形之间的共同点和不同点，主要表现在边、角、对角线上．只有弄清了这些，我们才能应付灵活多变的问题．学习了四边形后，随着知识的丰富，

解决问题方法的增多，当遇到一个问题要解决时，我们就能够分析、归纳、总结出最佳方法，灵活运用所学知识．就思想方法来说，四边形就存在着普遍联系的思想；四边形是通过三角形来研究的，这就体现了数学中的转化思想．就应用来说，四边形在日常生活中应用很广，如它的不稳定性、对称性等．学习本章内容时要注意联系实际，借助于实际例子来理解概念、性质．同时，也要用所学知识去解决实际问题，做到学以致用．

近年来，随着素质教育的深入、深化，对学生的创新、创造能力、动手能力、空间想象力及开放性思维、探索性思维提出了更高层次的要求，以大纲为准绳，中考试卷中涉及四边形的考题着意创新，出现了一大批风格清新、创意独特的题型，对四边形知识进行了拓展与延伸，并加重了应用性探讨．这些题型的出现，为我们学习四边形知识提供了新的导向，即在注重基础的同时，也要逐步锻炼创新意识，要培养空间想象能力，不能拘泥于传统的套用公式计算、求证例题的旧格调，还要着意留心生活中与四边形有关的事物，在实际中学习四边形知识．

第一章 四边形

本章知识结构如下图：



本章介绍了任意四边形的基础知识，并由此讨论了多边形的相关知识，重点与关键是学会运用辅助线把四边形问题转化为三角形问题求解.

1.1 四边形

知识梳理

本节重点是四边形内角和定理，难点是四边形内角和定理的推导.

知识点精析与应用

【知识点精析】

1. 四边形的定义

在平面内，不在同一直线上的四条线段首尾顺次相接组成的图形叫做四边形. 这个定义可以类比三角形的定义进行理解，但要注意四边形是在“**同一平面内**”的前提下定义的几何图形，这就是说所研究的是一个平面内的四边形.

2. 四边形的表示法

四边形用表示它的各个顶点的字母表示，书写时应按顶点顺序书写. 如图 1-1，可以记作四边形 $ABCD$，

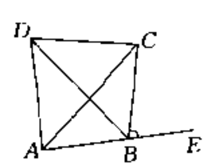


图 1-1

或四边形 $BCDA$ 等，习惯上按逆时针方向记作四边形 $ABCD$.

3. 四边形的对角线

四边形的对角线是指连结不相邻两个顶点的线段. 从四边形的一个顶点出发可引 1 条对角线，它共有两条对角线. 如图 1-1，线段 AC，BD 即是四边形 $ABCD$ 的两条对角线.

4. 四边形的内角与外角

(1) 四边形有四个内角，简称四边形的角，内角和为 360°.

(2) 四边形的外角是指四边形的角的一边与另一边的延长线所组成的角. 如图 1-1 中的 $\angle CBE$. 四边形的外角是与它有公共顶点的内角的邻补角. 在四边形的一个顶点处有两个外角，一般在研究时每个顶点处只取一个. 四边形的外角和等于 360°. 指每个顶点处取一个外角的和

(3) 四边形是内角和和外角和相等的几何图形.

5. 四边形的不稳定性

和三角形的稳定性相比，四边形具有不稳定性. 生活中的活动铁门就利用了这个性质，而有时在木门上加固木条构成三角形是为了克服四边形的不稳定性. 这些例子体现了几何知识在生活中的应用

【解题方法指导】

[例 1] 已知：在四边形 $ABCD$ 中，如果 $\angle A:\angle B:\angle C:\angle D=1:2:3:4$，求 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$ 的度数.

分析 由四边形内角和定理可知 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$，再依已知的内角比即可求出每一个角的度数.

解 设 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$ 的度数分别为 k°，$2k^\circ$，$3k^\circ$，$4k^\circ$.

则 $k^\circ+2k^\circ+3k^\circ+4k^\circ=360^\circ$. 任意四边形的内角和为 360°

解得 $k=36$.

$\therefore$ $\angle A=36^\circ$，$\angle B=2\times36^\circ=72^\circ$，$\angle C=3\times36^\circ=108^\circ$，$\angle D=4\times36^\circ=144^\circ$.

说明 本题应用了设参数 k 的代数方法求出四边形四个内角的度数. 不少几何的线段计算、角的计算以及证明题，如果应用代数方法求解（证），可使过程简洁、清晰. 特别是已知条件中如果出现比例关系时，采用设参数法是最常见的解题思路，通过设参数，结合几何知识，把问题转化为解方程，请读者一定要掌握这种技巧.

[例 2] 已知四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$ 的外角之比为 $8:6:3:7$. 求四边形各内角的度数.

分析 四边形的外角和是一个定值 360°，根据题中给出的比例关系可分别

求出每一个外角的度数．又因为同一个顶点的内角、外角互为邻补角，再求内角就容易了．

解 设四个外角度数分别为$8x$，$6x$，$3x$，$7x$，则 $8x+6x+3x+7x=360^\circ$．

解得 $x=15^\circ$．

有公共顶点的四边形内角、外角互补

$\therefore\ 8x=120^\circ$，$6x=90^\circ$，$3x=45^\circ$，$7x=105^\circ$．

即$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$ 的度数分别为 60°，90°，135°，75°．

说明 本例中应用的“**同一顶点的四边形的内角、外角互为邻补角**”是解题的另一个关键，它是一个隐含条件，所以，解几何题要善于依据几何图形的特点，熟悉一些常见基本图形的特点及性质，以便于求解．

［达标跟踪训练］

一、判断题

1．四边形是边数最少的多边形．（　　）

2．由四条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做四边形．（　　）

3．四边形的外角和等于内角和．（　　）

4．四边形中至少有一个角不是钝角．（　　）

5．四边形四内角之比为 2:2:3:5，则这个四边形中没有一个角是直角．（　　）

二、填空题

6．一个四边形的内角比是 1:2:3:4，则相应外角比是________．

7．四边形最多有____个钝角，最多有____个直角，最多有____个锐角，最少有____个钝角，最少有____个锐角．

8．四边形从一个顶点处可以引____条对角线，把四边形分成____个三角形，四边形共有____条对角线．

9．四边形 $ABCD$ 中，$\angle A:\angle B:\angle C:\angle D=2:3:5:8$，则$\angle B=$____．

10．四边形的三个内角分别为 70°，86°，96°，那么第四顶点处的外角等于____．

11．如图 1-2 中____是四边形的外角，度数是____．

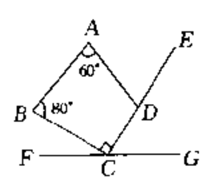


图 1-2

三、选择题

12．四边形 $ABCD$ 也可表示成（　　）

A．四边形 $BCDA$　　B．四边形 $BDCA$

C．四边形 $BADC$　　D．四边形 $ADBC$

13. 在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB \perp BC$，$CD \perp AD$，则 $\angle A$ 与 $\angle C$ 的关系是（　　）

A. $\angle A > \angle C$　　B. $\angle A < \angle C$　　C. $\angle A = \angle C$　　D. 互补

四、解答题

14. 已知：四边形 $ABCD$ 中，$\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 3:4:5:6$，求 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$ 的度数.

15. 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A = \angle C = 90°$，$\angle B = \frac{2}{7}\angle D$. 求 $\angle B$ 的度数.

16. 四边形 $ABCD$ 中，$\angle A = \angle B = \angle C$，$\angle D$ 的外角的度数为 78°. 求 $\angle A$ 的度数.

17. 如图 1-3，求 $\angle \alpha$ 的度数.

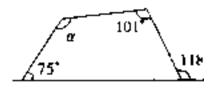


图 1-3

【答案与提示】

1. × 2. × 3. √ 4. √（若每个角都是钝角，则内角和大于 360°）

缺少“在同一平面内”的前提

5. ×（四个内角分别为 60°，60°，90°，150°） 6. 4∶3∶2∶1 7. 三，四，三，零，零 8. 一，两，两 9. 60° 10. 72°（第四顶点处内角为 $360° - 70° - 86° - 96° = 108°$） 11. $\angle ADE$，50° 12. A 13. D（$\because \angle A +$

根据定义找外角

$\angle B + \angle C + \angle D = 360°$，$\angle B + \angle D = 180°$，$\therefore \angle A + \angle C = 180°$） 14. 60°，80°，100°，120° 15. 40°（$\because \angle B + \angle D = 180°$，即 $\angle B + \frac{7}{2}\angle B = 180°$） 16. 86°（因 $\angle D = 180° - 78° = 102°$，则 $\angle A = \frac{360° - 102°}{3} = 258° \div 3 = 86°$） 17. 122°（设外角为 118°的相邻内角为 β，$\beta = 180° - 118° = 62°$，$\therefore \alpha = 360° - 101° - 75° - 62° = 122°$）

视野拓展

【释疑解难】

1. 把四边形的任何一边向两方延长，如果其他各边都在延长所得直线的同

通常情况下指的都是凸四边形

一旁，这样的四边形叫凸四边形. 如图 1-1 就是凸四边形，而图 1-4 不是凸四边形，这个概念要注意理解清楚.

这个结论应记忆

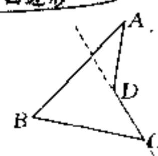


图 1-4

2. **如果两个角的两边互相垂直，那么这两个角相等或互补**. 课本上例 1 就是例子，也可以从这个例题中总结

出这个规律.

3. 教材上对四边形内角和定理证明时，采取连结对角线，把四边形转化为三角形求证的方法，这是解四边形问题的常用方法，即应用化新为旧的转化思想.

【典型例题导析】

[例 3] 一个四边形的两个对角的差为 55°，且它们两边互相垂直. 求这两个角的度数.

解 设这两个角分别为 $x°$，$y°$，则

$$\begin{cases} x-y=55, \\ x+y=180. \end{cases}$$

由两角差为55°可知，这两个角不相等

解得 $\begin{cases} x=117.5, \\ y=62.5. \end{cases}$

答 这两个对角分别为 117.5°，62.5°.

[例 4] 已知四边形 $ABCD$ 的周长为 70cm，$AB:CD=1:2$，$BC:DA=2:3$，且 AB 与 BC 的和是 25cm. 求四边形的边长.

解 设 $AB=x$ cm，$BC=y$ cm，则 $CD=2x$ cm，$DA=\frac{3}{2}y$ cm，则

$$\begin{cases} x+y=25, \\ x+2x+y+\frac{3}{2}y=70. \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x=15, \\ y=10. \end{cases}$$

$\therefore$ $AB=15$cm，$BC=10$cm，$CD=30$cm，$DA=15$cm.

[例 5] 如图 1-5，P 是四边形 $ABCD$ 内的任意一点，求证：$PA+PB+PC+PD \geqslant AC+BD$，并说明在什么条件下取等号.

证明 在$\triangle APC$ 中，$AP+PC>AC$；在$\triangle PBD$ 中，$PB+PD>BD$（三角形中任两边之和大于第三边）.

$\therefore$ $AP+BP+CP+PD>AC+BD$.

而当 P 点是对角线 AC、BD 的交点时，$AP+BP+CP+PD=AC+BD$.

$\therefore$ $PA+PB+PC+PD \geqslant AC+BD$.

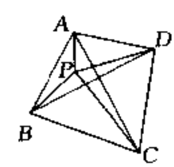


图 1-5

说明 这是一道用三角形知识解决的四边形问题.

[例 6] 如图 1-6，在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB:BC:CD:DA=2:2:3:1$，且$\angle B=90°$. 求$\angle DAB$ 的度数.

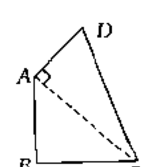


图 1-6

解 连结 AC.

$\because$ $AB:BC=2:2$，

它表明 $AB=BC$

$\angle B=90°$，

$\therefore\ \angle BCA=\angle BAC=45^\circ$，$AC=\sqrt{2}AB$.

运用等腰Rt△的三边比推得

设 $AB=2x$，则 $AC=2\sqrt{2}x$，$CD=3x$，$DA=x$，又 $AD^2+AC^2=x^2+(2\sqrt{2}x)^2=(3x)^2=CD^2$.

$\therefore\ \angle CAD=90^\circ$.　　勾股定理逆定理的应用

$\therefore\ \angle DAB=\angle DAC+\angle BAC=90^\circ+45^\circ=135^\circ$.

说明　连结四边形对角线是解题常用辅助线，本例综合运用了勾股定理及其逆定理.

【思维拓展训练】

一、选择题

1. 在四边形的每一个顶点处与内角相邻的外角共有（　　）个.

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

2. 在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$DC=BC$，那么与$\angle B$ 相等的角是（　　）

A. $\angle A$　　B. $\angle D$

C. $\angle C$　　D. $\angle A$，$\angle D$，$\angle C$

3. 若一个一般的四边形的一组对角都是直角，则另一组对角可以（　　）

A. 都是钝角

B. 都是锐角

C. 是一个锐角和一个直角

D. 是一个锐角和一个钝角

4. 下列说法中，正确的是（　　）

A. 四边形有四条对角线

B. 四边形的外角和与三角形的外角和相等

C. 四边形的内角可以都是锐角

D. 四边形的外角可以都是钝角

5. 四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 的外角为 100°，$\angle B$ 的外角为 120°，$\angle C$ 的外角为 60°，则$\angle D$ 的度数为（　　）

A. 40°　　B. 60°　　C. 80°　　D. 100°

6. 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle A=40^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=80^\circ$；$\triangle DEF$ 中，$\angle D=90^\circ$，$\angle E=37^\circ$，$\angle F=53^\circ$，且 $BC=EF$. 现将它们拼成一个四边形，则这个四边形外角最小值为（　　）

A. 47°　　B. 63°　　C. 47°或 63°　　D. 不能确定

二、解答题

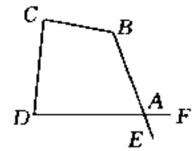


图 1-7

7. 如图 1-7，四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAF$、$\angle DAE$ 是与 $\angle BAD$ 相邻的外角，且 $\angle BAD:\angle BAF=4:5$. 求 $\angle BAD$、$\angle BAF$、$\angle DAE$ 的度数.

8. 四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle C$.

求证：$AD \parallel BC$.

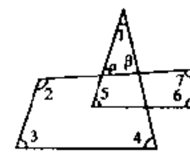


图 1-8

9. 如图 1-8，求 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7$ 的度数.

10. 已知：四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB$ 的平分线与 $\angle ABC$ 的平分线相交于点 M. 求证：$\angle AMB=\dfrac{1}{2}(\angle C+\angle D)$.

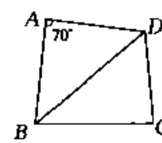


图 1-9

11. 如图 1-9，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，BD 平分 $\angle ABC$，如果 $\angle A=70°$，$\angle ABC=80°$，求 $\angle C$ 和 $\angle ADC$ 的度数.

12. 四边形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$CD=12$，$AD=13$，$\angle B=90°$. 求四边形 $ABCD$ 的面积.

13. 某四边形的四边长度依次为 3，7，x，5，求 x 的取值范围.

解　根据两点之间线段最短公理，可得 $\begin{cases} 7+3+5>x, \\ 7+x+5>3, \\ 7+x+3>5, \\ 5+3+x>7. \end{cases}$

解得 $-1<x<15$.　　$\therefore$　x 的取值范围是 $-1<x<15$.

上述解答正确吗？如果有错误，请指出错误的原因，并直接写出 x 的取值范围.

14. 求证：四边形两条对角线的和小于它们的周长，大于周长的一半.

15. 四边长为 3，4，5，6 的四边形存在吗？若存在，有多少个？若不存在，请说明理由.

【答案与提示】

1. B　2. B　3. D　4. B　5. D（$\because$ $\angle D$ 的外角 $=360°-100°-120°-60°=80°$）　6. C　7. $\angle BAD=80°$，$\angle BAF=\angle DAE=100°$

因为另一组对角的和为 180°

8. $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=2(\angle A+\angle B)=360°$，$\therefore$ $\angle A+\angle B=180°$，$\therefore$