罗增儒数学奥林匹克丛书

LUO ZENG RU SHU XUE AO LIN PI KE CONG SHU

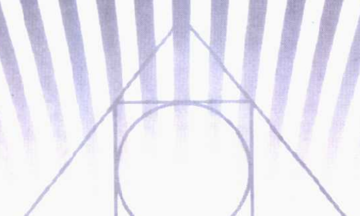
新世纪版

初中数学
奥林匹克

同步辅导　专题讲练　激发兴趣　拓展思维

二年级

罗增儒 主编



陕西师范大学出版社

罗增儒数学奥林匹克丛书

初中数学奥林匹克

二 年 级

主　编　罗增儒
副主编　安振平
　　　　江树基
　　　　刘康宁

陕西师范大学出版社

图书代号:JF185000

图书在版编目(CIP)数据

初中数学奥林匹克·二年级/罗增儒主编. —西安:陕西师范大学出版社,2001.7

ISBN 7-5613-0737-3

Ⅰ. 初… Ⅱ. 罗… Ⅲ. 数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 15574 号

责任编辑	朱永庚
封面设计	徐　明
责任校对	郭健娇
出版发行	陕西师范大学出版社
社　　址	西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网　　址	http://www.snuph.com
经　　销	新华书店
印　　制	潼关县印刷厂
开　　本	850×1168　1/32
印　　张	5.875
字　　数	129 千
版　　次	2001 年 7 月第 1 版
印　　次	2003 年 5 月第 4 次
定　　价	6.00 元

开户行:光大银行西安南郊支行　账号:0303070-00330004695

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电　话:(029)5307864　5233753　5251046(传真)

E-mail:　if-centre@snuph.com

让竞赛培训更加科学——写在前面

1986年4月,中国数学会普及工作委员会在西安召开了第四届年会,会上讨论了竞赛培训工作中一个近乎空白的问题——资料.没想到两三年后,各级各类的数学竞赛“讲座”或“教材”如雨后春笋,我本人也深深卷入到“奥林匹克数学学科建设”的课题中去,为多家报刊、出版社编写了从小学、中学到大学的辅导资料.然而,这主要是一种热情,说真的,我当时对数学竞赛的内容与方法心中没底.后来随着中国数学奥林匹克的国际性崛起,竞赛教材与竞赛培训都在急剧升温,一些意想不到的情况出现了:重复性的资料既多又滥,名目繁多的竞赛和以创收为目的的奥校应运而生,横行双休日的培训加重了学生的负担……

主要发生在大城市的“竞赛热”有悖于数学竞赛的初衷.今天我们回过头来再看数学竞赛培训工作的时候,10年的时间使我们成熟了20年.有一些基本的经验我们愿作为本书的编写说明与使用建议供大家参考.

1. 知识同步　能力超前

就是说,数学竞赛培训的日常内容与中学教材进度同步,而在能力培养上适当超前.

据此,我们在编写本书时,有意跟初中义务教育新教材的进度保持一致,所穿插的算术问题(数论)、智力问题(组合数学)也力图从教

材中寻找生长点.而课本内容的深层挖掘与课外内容的同步渗透,将使学有余力的学生有机会能力超前.

由于各地的情况不一样,“同步”也应有差别,读者在具体使用中可以调整内容的顺序,一些较新、较深、较难的课题不妨移到假期再学习.

怎样从“知识同步”与“能力超前”之间找到一个可操作的切入点呢?我们的建议是:从高处接近中考,从低处靠拢竞赛.退可站稳中考脚跟,进可迈向竞赛高台.

2. 精讲多练　学会学习

数学竞赛是一种智力竞赛,又是一种第二课堂活动.因此,与第一课堂的教与学都应有区别,都应更注重于智力的开发.教练员的精讲应精在“结论是怎样发现的?解法是怎样找到的?”有的课题还可以组织学生自学讨论.学生的多练不是追求“习题效应”,而是要磨炼心理素质、培养解题感觉、学会怎样学习.

聪明的孩子到处都有,聪明而不学习只能成为蠢才,聪明而不善于学习会沦为庸才,聪明而又“会学习”的学生才有希望成为数学竞赛的佼佼者.同样,如果培训不能放手培养学生的自学能力、独立思考能力,便不可能产生竞赛型的强手.

与此相适应,我们在编写中,非常注意例题讲解的思路分析和习题配备的巩固性、启发性与新颖性.这当中,有我们命题、解题的经验积累,但也给读者的创造性思考留下了广阔的空间.我们期望读者,在使用本书过程中提出新思路、找到新解法、写出小论文.

3. 重视即时信息　站到起跑线上

第一课堂教学在传授知识上有个时间差,不可能随着日新月异的科技发展频繁更迭内容,讲的都是“昔时信息”.同样,尽管我们在写本书时采用了较新资料,但出版后也会逐渐变旧.而竞赛内容和方法是一种“活”的数学,每年都有大批新题目问世,读者在使用本书时,应随时吸收国内外数学竞赛的“即时信息”,使自己站到起跑线

上.一方面能开阔视野、形成更广泛的智力背景,另方面能造成一种既学习、又研究的开放性局面.

4. 业余自愿　激发兴趣

数学竞赛培训是一种第二课堂活动,它是日常课堂的延伸与补充,能够体现因材施教、发展个性特征、丰富学习生活、促进全面发展,但不能冲击第一课堂.因而,一定要坚持自愿参加的原则,包括学生兴趣转移的自由.一般说来,初中学生的兴趣指向还不太成熟,思维最近发展区也不甚明朗,竞赛培训的重点在于使初中学生获得数学文化的熏陶和创造机智的启蒙而终生受益.把初中生的竞赛培训当作数学工作者的早期职业培训是不恰当的.

作为前言的最后,谨向帮助、支持本书出版的有关人士表示由衷的感激,也向关心本书、并将提出批评指正意见的读者提前表示欢迎与谢意.

罗增儒

2001 年 4 月

目　录

第 一 讲　自然数的分拆 …… (1)
第 二 讲　因式分解 …… (7)
第 三 讲　因数分解 …… (14)
第 四 讲　末位数 …… (20)
第 五 讲　三角形 …… (26)
第 六 讲　分式 …… (34)
第 七 讲　恒等式的证明 …… (41)
第 八 讲　三角形中的不等关系 …… (48)
第 九 讲　待定系数法 …… (54)
第 十 讲　换元法 …… (62)
第十一讲　配方法 …… (68)
第十二讲　同余 …… (74)
第十三讲　四边形 …… (81)
第十四讲　比例 …… (88)
第十五讲　相似形 …… (95)
第十六讲　二次根式 …… (105)
第十七讲　共线点与共点线 …… (113)
第十八讲　面积 …… (119)
第十九讲　对称 …… (126)

第二十讲　推理问题……………………………（133）
第二十一讲　抽屉原理……………………………（139）
第二十二讲　图论思想……………………………（146）
习题答案……………………………………………（152）
（详细解答请参看罗增儒主编的《初中数学奥林匹克题解》）

第一讲 自然数的分拆

把一些自然数加起来得出一个自然数，这是求和，这个和是惟一的；反过来，把一个自然数表示成一些自然数的和，叫做自然数的分拆，分拆的方法通常是不惟一的，因此，我们想弄清各种分拆数的计算公式．

定义 把自然数 N 表示成 K 个自然数的和（$K\leqslant N$）叫做自然数 N 的 K 项分拆．如果交换加数的位置视为不同的分拆，则称为有序分拆；如果交换加数的位置仍视为相同的分拆，则称为无序分拆．为了叙述的方便，N 本身称为 N 的一项分拆．

一、自然数的无序分拆

1．二项分拆的种数

任意一个大于 1 的自然数 N，当它为偶数 $2m$ 时，有

$$\begin{aligned}N&=2m=1+(2m-1)=2+(2m-2)\\&=\cdots=m+m.\end{aligned}$$

共有 m 种二项分拆．

当 N 为奇数的 $2m+1$ 时，有

$$\begin{aligned}N&=2m+1=1+2m=2+(2m-1)\\&=\cdots=m+(m+1).\end{aligned}$$

共有 m 种二项分拆．

由于 m 恰好是$\frac{N}{2}$的整数部分,记作$\left[\frac{N}{2}\right]$,所以 N 的无序二项分拆种数为$\left[\frac{N}{2}\right]$.

2. 三项分拆的种数

数 1,2 没有三项分拆,其种数均为 0.

数 $3=1+1+1$,三项分拆有 1 种.

对 $N=n+3>3$,我们先取出 3 作三项分拆,然后 n 有 3 种情况往上添,都能产生 $n+3$ 的三项分拆;

(1) n 的三项分拆;

(2) n 的二项分拆;

(3) n 的一项分拆;

把这三种情况加起来,就得到一个递推公式:

$(n+3)$的无序三项分拆种数

$=n$ 的三项分拆种数 $+\,n$ 的二项分拆种数 $+1$.

【例 1】 分别求出 4,5,6,7 的无序三项分拆的种数.

解 4 的三项分拆种数

=1 的三项分拆种数 +1 的二项分拆种数 +1

$=0+0+1=1$.

5 的三项分拆种数

=2 的三项分拆种数 +2 的二项分拆种数 +1

$=0+1+1=2$.

6 的三项分拆种数

=3 的三项分拆种数 +3 的二项分拆种数 +1

$=1+1+1=3$.

7 的三项分拆种数

=4 的三项分拆种数 +4 的二项分拆种数 +1

$=1+2+1=4$.

【例 2】 将 10 个苹果分成 3 堆,每堆至少 1 个,问有几种不同

的分法?

解　此题就是求 10 的无序三项分拆种数,有

10 的三项分拆种数

=7 的三项分拆种数 + 7 的二项分拆种数 + 1

=4+3+1=8(种).

请读者自行写出这 8 种分拆.

3. 自然数 N 的无序 K 项分拆($N>K$).

类似三项分拆种数的求法,可得:

N 的 K 项分拆种数

=($N-K$)的 K 项分拆种数 + ($N-K$)的($K-1$)项分拆种数 + … + ($N-K$)的二项分拆种数 + ($N-K$)的一项分拆种数.

据此,可将 N 的无序 K 项分拆列表如下:

K \ N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
一项	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
二项		1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7
三项			1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19
四项				1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27
五项					1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30
六项						1	1	2	3	5	7	11	14	20	26
七项							1	1	2	3	5	7	11	15	21
八项								1	1	2	3	5	7	11	13
九项									1	1	2	3	5	7	11
十项										1	1	2	3	5	7
十一项											1	1	2	3	5
十二项												1	1	2	3
十三项													1	1	2
十四项														1	1
十五项															1
总计	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	174

4. 有附加条件的分拆

这要根据具体的条件进行具体的分析.

【例 3】 把 10 分拆为两个或两个以上素数(允许重复使用)之和,共有几种分拆法?

解 10 以内的素数有 2,3,5,7. 其和为 10 的有

$$10=3+7=5+5 \quad (二项分拆)$$
$$=2+3+5 \quad (三项分拆)$$
$$=2+2+3+3 \quad (四项分拆)$$
$$=2+2+2+2+2, \quad (五项分拆)$$

共有 5 种分拆法.

【例 4】 将 12 本相同的书分成 4 堆,要使每堆都至少有一本书且各不相等,应怎样分?

解 12 的无序四项分拆有 15 种,通过列举可挑出互不相等的,但较麻烦. 我们先考虑互不相等,有 $1+2+3+4=10$,剩下的 2 本分给其中的一堆或两堆,

$$12=1+2+3+6=1+2+4+5,$$

所以,12 本书可按 1,2,3,6 或 1,2,4,5 两种方式分成 4 堆.

二、自然数的有序分拆

1. 二项分拆的种数

先把自然数 N 表示为 N 个数的和

$$N=1+1+\cdots+1, \quad ①$$

再从 $N-1$ 个加号中任取 1 个,然后把由这个加号所分割开的两段数分别相加后,便得到 N 的一个二项分拆,反之,N 的每一个二项分拆都可以写成

$$N=(1+\cdots+1)+(1+\cdots+1) \quad ②$$

的形式,相当于从①中取一个括号,所以 N 的二项有序分拆数为 $N-1$ 种.

2. 三项分拆的种数

仿照二项分拆的讨论知,三项分拆数相当于从①中的 $N-1$ 个加号取 2 个加号的方法数. 由于取第一个加号时有 $N-1$ 种取法,取

第2个加号时有 $N-2$ 种取法，相乘得 $(N-1)(N-2)$ 种取法，但相乘的计算有重复，所以，

N 的三项有序分拆数为 $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$ 种.

3. 自然数 N 的有序 K 项分拆的种数 $(N \geqslant K)$

仿照三项分拆的讨论知，K 项分拆数相当于从①中的 $N-1$ 个加号取出 $K-1$ 个加号的方法数，到高中将会学到，用组合记号 C_{N-1}^{K-1} 来表示，其计算公式是

$$C_{N-1}^{K-1}=\frac{(N-1)(N-2)\cdots(N-K+1)}{(K-1)(K-2)\cdots 2\cdot 1}.$$

这个公式，也是不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=N$$

的正整数解的个数公式.

【例5】 将10表示为8个数之和，加数相同顺序不同算两种不同的表示法.

解 这个问题就是10的有序8项分拆，把①中的9个加号取出7个，相当于剩下2个，因而，有 $\frac{9\times 8}{2}=36$ 种不同的方法，其中加数为2,2,1,1,1,1,1,1的有28种，加数为3,1,1,1,1,1,1,1的有8种.

习 题 1

(一) 选择题(有且只有1个正确)

1. 把5个苹果分给甲、乙、丙3个人，每人至少1个，可有(　)种不同的分法.

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

2. 把15个苹果分成3堆，每堆至少1个，可有(　)种不同的分法.

(A) 7　　(B) 18　　(C) 19　　(D) 20

3. 一次拿出3个素数,使其和为30,有(　)种不同的拿法.

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

4. 把1分,2分,5分的硬币凑成一角钱(硬币可以重复使用),共有(　)种不同的凑法.

(A) 7　　(B) 8　　(C) 9　　(D) 10

(二) 填空题

1. 将1997分成两个自然数之和,其中乘积最大的分法是______.

2. 一次取5个互不相等的奇数,使其和为29,共有______不同的取法.

3. 3个年龄不等的儿童,其年龄之和为18,积为180,则这3个儿童的年龄从小到大依次为______.

(三) 把11分拆为几个自然数的和,使乘积最大,应如何分拆?

(四) 试证　每个大于6的自然数都可表示成两个大于1且互素的自然数之和.

(五) 证明　用1克、2克、4克砝码各1个,8克的砝码4个可以称出从1到39克的任一个整数重量.

第二讲 因式分解

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解(或分解因式).这要求我们掌握好3点：

(1)因式分解的对象是多项式，无论是被分解式还是分解后的每一个因式都必须为多项式.

(2)因式分解的过程是恒等变形，每一步都必须保持前后两式恒等，可以通过反用乘法或代入具体数值来检验.

(3)因式分解的结果是整式连乘积的形式，并且每个因式都要分解到不能再分解(与讨论的范围有关，本讲仅限于有理数的范围).

多项式的因式分解是代数式进行恒等变形的基础，也是进一步处理方程、不等式、数的整除等问题的重要工具.它与多项式的乘法、除法都有联系，也有一般的解题步骤——一提取、二公式、三分组，但没有固定的解题公式(不能像一元一次方程的解法那样)，方法灵活多变，技巧性很强.下面，我们将在课本5个公式、4种方法的基础上作一点深化提高.

一、公式法

这种方法反映了因式分解的本质，即多项式乘法的反运算，它多用在提取公因式之后，或根本就没有公因式之时，也用在分组时的组内或各组之间.较重要的公式有(对比初一分册第20讲整式的乘除)：

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$,

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$,

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$,

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$,

$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$,

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$,

$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n})$.

【例 1】 分解因式$(ax-by)^3+(by-cz)^3+(cz-ax)^3$.

解法 1

$$\begin{aligned}\text{原式}&=[(ax-by)+(by-cz)][(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+\\&\quad(by-cz)^2]+(cz-ax)^3\\&=(ax-cz)[(ax-cz)^2-3(ax-by)(by-cz)]+(cz-ax)^3\\&=(ax-cz)^3-3(ax-by)(by-cz)(ax-cz)+(cz-ax)^3\\&=3(ax-by)(by-cz)(cz-ax).\end{aligned}$$

解法 2 因为 $(ax-by)+(by-cz)+(cz-ax)=0$,

所以 $(ax-by)^3+(by-cz)^3+(cz-ax)^3$

$=3(ax-by)(by-cz)(cz-ax)$.

注 想一想,解法 2 用了哪个公式?

二、分组分解法

当因式分解不能直接提出公因式、也不能直接用公式时,就应考虑用分组分解法了.而技巧性强的分组常需拆项或增添项,为了理解拆项、添项的由来,我们先来看多项式的乘法:

$$\begin{array}{r}x^2-x-2\\ \times)\qquad x-2\\ \hline x^3-x^2-2x\qquad\\ -2x^2+2x+4\\ \hline x^3-3x^2\qquad\quad+4\end{array}$$

可见，在乘法运算中 x^2 项的系数作了合并，与因式分解相对应的便是拆项；而在乘法运算中 x 项的系数互相抵消了，与因式分解相对应的便是添项.

由于合并同类项结果是惟一的，而反过来分拆则是不惟一的，并且对于抵消了的项再找回来实在不知从何入手，这就是拆项、添项困难和方法灵活多样的一个原因.

【例 2】 分解因式 x^3-3x^2+4.

解法 1 拆二次项，有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^3+x^2-4x^2+4\\&=x^2(x+1)-4(x+1)(x-1)\\&=(x+1)(x^2-4x+4)(\text{还要再分解})\\&=(x+1)(x-2)^2.\end{aligned}$$

解法 2 拆二次项，有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^3-2x^2-x^2+4\\&=x^2(x-2)-(x+2)(x-2)\\&=(x-2)(x^2-x-2)\\&=(x-2)^2(x+1).\end{aligned}$$

解法 3 拆常数项，有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^3+1-3x^2+3\\&=(x+1)(x^2-x+1)-3(x+1)(x-1)\\&=(x+1)[(x^2-x+1)-3(x-1)]\\&=(x+1)(x^2-4x+4)\\&=(x+1)(x-2)^2.\end{aligned}$$

解法 4 拆二次项、添一次项，有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^3+x^2-4x^2-4x+4x+4\\&=x^2(x+1)-4x(x+1)+4(x+1)\\&=(x+1)(x^2-4x+4)\\&=(x+1)(x-2)^2.\end{aligned}$$