最优控制的数学方法及应用

童季贤　张显明　编著

西南交通大学出版社

最优控制的
数学方法及应用

童季贤　张显明　编著

西南交通大学出版社

(川)新登字 018 号

内 容 简 介

最优控制的数学方法及应用一书，是按照最优控制理论体系，突出数学方法而编写的，书中结合了工程实践，举了不少最优控制在电气、机械工程上的应用实例．

书中反映了最优控制在理论和应用方面的新进展，结合有关章节编入了延时系统最优控制、抗扰性、奇异最优控制，同时考虑到计算机的应用，编入了许多计算程序框图．

本书可供自动控制、电气工程、机械工程各有关专业的工程技术和科研教学人员阅读；可供这些专业的高年级学生和研究生选作教材；也可供理科有关专业人员参考．

最优控制的数学方法及应用
童季贤　张显明　编著
*
西南交通大学出版社出版发行
（成都　九里堤）
新华书店经销
西南交通大学出版社印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：8.625
字数：180　千字　　印数：1000 册
1994 年 4 月第 1 版　1994 年 4 月第 1 次印刷
ISBN7—81022—665—7/O·056
定价：6.50 元

前　　言

最优控制的发展已有40多年的历史了，它的诞生和发展一直与数学密切相关．特别是计算机的发展，大大开扩了最优控制理论的广泛应用．现在已发展有许多相关的分支，如随机控制、自适应控制、大系统理论、计算机控制、模糊控制等．最优控制理论还渗透到工程技术、经济管理科学诸多方面．

本书讲述经典理论同时概括了一些现代控制理论的进展，如有关奇异最优控制的讨论（第四章），延时系统的最优控制（第六章）以及方块脉冲函数在最优控制计算中的应用（第六章）等．本书特别对有关应用列出相应的框图以便于利用计算机实现计算．

作者参加了有关课题的研究（参考文献[10]、[11]、[18]），这些课题得到国家自然科学基金的资助．本书是受湖南大学最优控制课程教授童调生的委托，作为研究生的教材编写的．张显明参加了部分章节的编写．书中概括的有些成果是由湖南大学童调生、张显明、章兢、陈明武及刘星等提供的（参考文献[10]～[13]、[15]～[17]）．

编写本书侧重于最优控制的数学理论和计算方法．书中所涉及的基础知识，一般不超出高等数学、线性代数、控制工程理论的范围．本书可供自动控制专业高年级学生、研究

6A671 63

生阅读或选作教材，也可供工程各类专业教师和科技人员自学参考．

在本书的出版过程中，西南交通大学出版社给予了极大的支持．在此谨致谢意．

西南交通大学应用数学系
童季贤
一九九四年三月

目　　录

第一章　最优控制的基本问题

最优控制理论开始于20世纪中叶. 由庞特里亚金(Пунтриядин)提出的极大值原理至今已有30多年的发展. 最优控制在工矿企业、交通运输、电力工业、国防工业、武器系统等部门的广泛应用，反过来又促进了最优控制理论的发展完善.

近几年，随着大规模集成电路的发展，大大提高了线路的集成度、可靠性及信息处理的速度；微型机的问世和它的发展为最优控制系统的高精度、高效率、智能化、多功能、最优化、自适应化创造了条件，最优控制系统由模拟控制阶段进入了数字控制阶段. 这就使最优控制理论也发生了深刻的变化.

§1—1　概　　述

最优控制常有两方面问题：首先，以效率为性能指标的最优控制，例如最小能耗、最大行程、最大转速变化、最短时间控制等；其次，是二次型性能指标的最优控制，例如电动机调速、发电机励磁、随动系统等二次型性能指标的最优控制. 后者是以提高系统的动态性能为目标的控制. 这两大基本问题是互相有联系的. 二次型性能指标也包含着快速性、降低能耗和提高效率等，单纯以效率为指标而不考虑系统的

动态性能往往是难以接受的．例如，电车最小能耗控制的加速度会令人产生极大的反感．然而以效率为指标的最优控制作为电气控制系统的理论仍然是有价值的，可以作为设计中的一种理想参考曲线．这种理想参考曲线的思想在经典的电气控制理论中就曾经采用过，例如在电气传动系统不考虑发热限制的快速控制中，电流的理想参考曲线是矩形的．

为了说明最优控制的基本问题和基本概念，先看几个实例．

例 1—1 有一电路图如图 1—1，输出电压是一宽度为 T 的脉冲，试求在线路电阻 R 上规定的能耗为 K 的条件下使输出电压 $V_0(t)$ 平均值为极大的输出电压波形．

解 根据电路可以列出微分方程：

$$i(t)=\frac{1}{R}[V_0(t)-V_i(t)],$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_0(t)=\frac{1}{C}i(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t)=i^2(t)R,$$

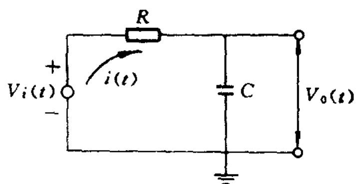

图 1—1

其中，$q(t)$ 是电阻 R 上的能耗．我们重点研究电压 $V_0(t)$ 和能耗 $q(t)$ 的状态，于是令 $V_0(t)=x_1$，$q(t)=x_2$，$V_i(t)=u$，上述方程可以写为如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=\frac{1}{RC}(x_1-u),\\ \dot{x}_2&=\frac{1}{R}(x_1-u)^2,\end{aligned}\right\}\qquad(1—1)$$

其中，x_1、x_2 称为该电路的状态变量，$\dot{x}_1\triangleq\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$，$\dot{x}_2\triangleq\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$，上

式又称作状态方程．而 $V_i(t)$ 是可以人为控制的，因此 $u=V_i(t)$ 称之为控制变量．电路中各变量的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} x_1(0)&=0,\\ x_2(0)&=0,\\ x_1(T)&=V,\\ x_2(T)&=K. \end{aligned}\right\} \tag{1—2}$$

输出电压 $V_0(t)$ 在 $[0, T]$ 上的平均值就是我们考虑的性能指标，即为

$$J=\int_0^T \frac{V_0(t)}{T}\mathrm{d}t. \tag{1—3}$$

最优控制的问题就是在满足状态方程（1—1）和边值式（1—2）的条件下求出使得性能指标式（1—3）取极大的输入电压、输出电压及在电阻 R 上的能耗时间曲线．

使性能指标取极大的这些曲线中，输入量即输入电压称为最优控制曲线；电阻 R 上的能耗 $q(t)$ 及输出电压 $V_i(t)$ 称为最优轨线．

这个最优控制问题中的状态变量只有 2 个，求解比较容易．可以用极小值原理获得解析结果，我们将在后面讨论．

例 1—2 最优调节器问题如图 1—2 所示．直流调速系统的受控对象为晶闸管直流电动机．

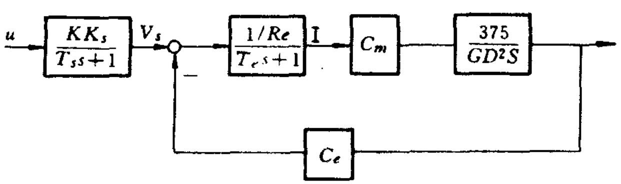

图 1—2

其中，K_s—可控整流功率放大器的电压放大系数；T_s—等效于可控整流功率放大器的惯性环节的时间常数；T_e—电枢电路的电磁时间常数；R_e—电枢电路电阻；GD^2—机电系统折算到电动机轴上的飞轮矩；C_e、C_m—分别为电机的电势常数和转矩常数；u—可控整流功率放大器的输入电压（控制量）；V_s—可控整流功率放大器的输出电压；n—电机转速；I—电枢电流.

若令 $x_1=n$，$x_2=I$，$x_3=V_s$，根据系统的动态结构图（1—2）有如下的微分方程：

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{375C_m}{GD^2}x_2, \\
\dot{x}_2 &= -\frac{C_e}{R_eT_e}x_1 - \frac{1}{T_e}x_2 + \frac{1}{R_eT_e}x_3, \\
\dot{x}_3 &= -\frac{1}{T_s}x_3 + \frac{KK_s}{T_s}u.
\end{aligned}\right\} \qquad (1—4a)$$

若记为矢量和矩阵形式，令

$$\left.\begin{aligned}
x &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T, \\
A &= \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{C_m 375}{GD^2} & 0 \\ -\dfrac{C_e}{R_eT_e} & -\dfrac{1}{T_e} & \dfrac{1}{R_eT_e} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{T_s} \end{bmatrix}, \\
B &= \left[0 \quad 0 \quad \frac{KK_s}{T_s}\right]^T,
\end{aligned}\right\} \qquad (1—4b)$$

于是，（1—4a）式可写为

$$\dot{x}=Ax+Bu.$$

给定初始条件（即为初始状态）

$$x(t_0) = x_0 \tag{1—5}$$

终端状态自由.

根据调节器问题的性质，可规定性能指标为

$$J = \int_{t_0}^{t_f}[q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{33}x_3^2 + ru^2]\mathrm{d}t, \tag{1—6}$$

或记为矩阵形式

$$J = \int_{t_0}^{t_f}[x^TQx + u^TRu]\mathrm{d}t.$$

性能指标中的 R 和 Q 是加权矩阵

$$Q=\mathrm{diag}(q_{11},\ q_{22},\ q_{33}),$$

$$R=[r]=\mathrm{diag}(r,\ r,\ r),$$

其中，$u=[0,\ 0,\ u]^T$. 以上的性能指标表示了系统的变量即状态偏离平衡位置的偏差的二次型.

调节的目的是使偏离平衡位置的状态尽量回到平衡位置上来，使 J 趋近于零，这就相当于使以上的性能指标为最小. 在性能指标中还包含了控制 u 的二次型 ru^2，该项是考虑到控制功率的限制而设.

于是，调速系统的最优调节器问题可以叙述为：在给定系统状态方程式（1—4）和初值式（1—5）的条件下，求使性能指标式（1—6）取极小的最优控制. 显然这是以动态性能为目标的最优控制问题.

例 1—3 最小能耗控制问题：直流他励电动机由零转速起动到某一终点转速，要求起动过程能耗最小，试求出最优的电流曲线和转速曲线.

解 如果只考虑该问题的主要损耗，即电枢电路电阻上的损耗，并且忽略电枢电路的电感，根据直流他励电动机电枢电路方程和运动方程，可写出如下的状态方程：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\lambda'}{\mu_p}n,$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=\frac{375C_m}{GD^2}I.$$

若令 $x_1=\theta$，$x_2=n$，则可写为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=\frac{1}{\mu_p}x_2,\\ \dot{x}_2&=\frac{375C_m}{GD^2}I,\end{aligned}\right\}\tag{1—7}$$

式中，μ_p 为与机械传动比有关的常数.

在以上控制问题中取电枢电流 I 为控制量，根据电机的换向条件的限制应满足如下的不等式约束：

$$I\leqslant I_m.\tag{1—8}$$

开始起动和起动的终态应满足边界条件

$$\left.\begin{aligned}x_1(0)&=0,\\ x_2(0)&=0,\\ x_1(t_f)&=x_{1f},\\ x_2(t_f)&=x_{2f}.\end{aligned}\right\}\tag{1—9}$$

起动过程中电枢电路的电能损耗

$$\Delta E=\int_0^{t_f}R_eI^2\mathrm{d}t,\tag{1—10}$$

其中，R_e 为电枢电阻，根据问题的性质，取（1—10）为性能指标.

以上的控制问题可以叙述为在满足（1—7）、（1—8）、（1—9）的约束条件下求使性能指标式（1—10）取最小的最

优控制（电流）及最优轨线（转速和转角）. 显然这是以提高效率为目标的最优控制问题.

最优控制 $u^*(t)$ 一旦确定以后，代入状态方程即可解出最优轨线 $x^*(t)$；再把 $u^*(t)$ 和 $x^*(t)$ 代入性能指标的表达式，即可计算出性能指标的最优值. 显然性能指标值取决于控制函数 $u(t)$ 的选取. 性能指标的定义域是控制函数空间，其值域是某实数集. 这种关系称作泛函. 性能指标是一个泛函，因此求解最优控制问题归结为泛函的条件极值问题.

求解最优控制问题的解析方法主要有变分法、极小（大）值原理和动态规划. 古典变分法一般只能求解没有控制约束的那一类最优控制问题，或控制域为开域的情形. 50 年代后期由前苏联学者庞特里亚金（Пунтриядин）建立的极大值原理以及美国学者贝尔曼（Bellman）建立的动态规划，则可用于求解控制域为有界闭域的那类最优控制问题. 这两种理论的建立是控制理论由"经典"转向现代的重要标志.

通过极大值原理和变分法求解最优控制归结为解一组微分方程的两点边值问题. 对于维数稍高的系统，要获得解析的结果是不可能的，所以用数值的方法搜索最优控制以及微分方程两点边值问题的数值方法是求解最优控制问题的重要计算方法.

§1—2 最优控制的数学描述

从§1—1 的实例可以看出，最优控制问题中应包含状态方程、边界条件、控制约束，有时还包括状态约束. 现在分述如下：

1. 状态方程

它反映了被控系统在动态过程中所遵循的物理或化学等规律．在集中参数的情况下，动态系统的运动规律可以用一组一阶常微分方程来描述．写为矢量的形式：

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1—11}$$

式中

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

是空间 R^n 中的矢量，

$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_r)^T$$

是空间 R^r 中的矢量；

$$f(x, u) = (f_1(x, u), f_2(x, u), \cdots, f_n(x, u))^T$$

是 n 维矢量函数．设函数

$$f_i(x, u)(i = 1, 2, \cdots, n)$$

对 x、u 是连续的；对 x 是连续可微的．

2. 边界条件

即物理系统的初始状态和终端状态应满足的条件．初始时刻 t_0 和初始状态通常是给定的，即

$$x(t_0) = x_0. \tag{1—12}$$

但是，在某些特殊情况中，初始状态不一定按照上式给定．

在终端时刻 $t=t_f$ 时要求满足终端约束条件

$$N_i(x(t_f), t_f) = 0, \tag{1—13}$$

$i = 1, 2, \cdots, m(m \leqslant n)$．在 R^n 空间中，所有满足（1—13）式的点 $x(t_f)$ 组成的集合记为 Ω.

$$\Omega = \{x(t_f) \mid N_i(x(t_f), t_f) = 0, i = 1, 2, \cdots, m\}. \tag{1—14}$$

我们称 Ω 为目标集，其中函数 $N_i(x(t_f),\ t_f)$ 对 x 、t_f 连续可微.

终端时刻 t_f 可以是固定的，也可以是不固定的. 例如在快速控制问题中，t_f 是自由的.

我们把具有(1—13)式终端约束问题称做可变终端问题. 若没有终端约束条件，则称为自由终端问题. 若 $x(t_f)=x_f$ 是给定的，则称为固定终端问题. 这时目标集蜕变成一点，且(1—13)式可记为

$$x(t_f)-x_f=0.$$

各分量 $x_i(t_f)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 也可以部分自由、部分固定、部分满足一定约束条件. 后两者均可以用(1—13)式表示.

3. 控制变量 u

假定对象的运动是可以控制的. 我们把允许控制的值域称作为控制域 U. 如果对控制量没有约束，则控制量的值域

$$U=\boldsymbol{R}^r,$$

即控制量可以在整个 r 维空间中取值. 一般情况下，控制变量 u 都受到一定的约束，则 U 为 $\boldsymbol{R}^r$ 中的一个子集，例如：

$$U=\{u\,|\,a_i\leqslant u_i\leqslant b_i\ ,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r\}.$$

a_i，b_i 为常数，则 U 是一个有界闭集，也是一个广义矩形.

如果控制域是一个广义正方形时，则有

$$U=\{u\,|\,|u_i|\leqslant 1\ ,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r\}.$$

显然，应在 $u\in U$ 的条件下求解最优控制.

许多问题的最优控制不但能在控制域的边界上取值，甚至在边界上跳来跳去（例如开关型或 Bang-Bang 型的控制），所以函数 $u(t)$ 应包括分段连续函数. 我们把在控制域上取值