陈通鑫　唐守默
陈家骏　编

中国环境科学出版社

高中代数
下册

重点问题详解

重点问题详解

高中代数 下册

陈通鑫 唐守默 陈家骏 编

中国环境科学出版社

1993

（京）新登字098号

内 容 简 介

本书包括高三代数全部知识内容，对其中应知应会的知识点和重难点，或易混易错不好掌握的疑点，以及可能遇到的各种问题，逐一提出问题，并做了详尽的回答，有些问题还配有必要的小型练习，以求弄清知识，巩固概念、提高能力。

本书条目按课文顺序编排，易于查找。适合高中学生及自学青年阅读参考，也可供教师备课参考。

重点问题详解

高中代数 下册

陈通鑫 唐守默 陈家骏 编

*

中国环境科学出版社出版

北京崇文区北岗子街8号

昌平兴华印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经售

*

1993年3月第 一 版 开本787×1092 1/32

1993年3月第一次印刷 印张4

印数1—5,000 字数92千字

ISBN7-80093-305-9/G·337

定价：2.50元

前　言

“学则须疑”，有疑有解则能提高和进步。

学习是一个特殊的认识过程，是在教师帮助下加速对所学知识的认识过程。课堂学习时间是有限的，重要的是培养自学能力，以提高学习效果。自学时有了疑问和疑难怎么办？要靠无声的老师做辅导，这就是有益的——书。

为此，向大家奉献一套中小学课本中《重点问题详解》，一书在手，似教师陪坐身旁。

该书是以问题的形式出现的。因为一切科学都是从为什么开始的，而且问题是启动思维的动力。所以，以问题的形式，贯穿全书是最有益的，它把学习中的重点、难点、疑点设计成问题，使读者一目了然，便于阅读和使用。

遇有疑难，请先思考，然后翻阅此书，认真阅读，即可生效。

本书的特点是：

一、源于课本，重点突出，解答详尽。

该丛书，随着课本进度，将所学内容的重难点和疑惑不解的问题，提出来做详尽的解答，并有例题，以帮助读者深刻理解，提高学习实效。

二、提出问题，文字精辟，促进思考。

该丛书，对所有重点问题，均以问题形式出现的。问题是思维的动力。你有问题可到该书中去找解；丛书中提出的问题，促你思考，然后阅读解答，使你从中得到提高。

三、应用知识，总结方法，提高能力。

提高能力，是学习的重要目的。该丛书根据课程的要求，及时总结学习方法和掌握应用知识的方法，以取得举一反三之效，促进读者学习能力的提高。

四、辞书性，题解性，兼而有之。

该丛书，具有辞书性和题解性。为了说明课本中的重点知识，在解答之中，则要博引例证，以丰富内容，可取辞书之效。遇有典型问题，解之详尽，故有题解功能。

编写这套丛书是一个大胆的尝试，虽然我们依据设想做了很多努力，但是不妥之处也还难免。欢迎广大读者批评指正。

目　　录

为什么初学者感到“排列组合”难学

中学数学中所涉及的排列组合问题，一般都是研究在按照某种规则做某件事时，可以有多少不同的方法。

例如，在二进制中，用0、1两个数码可以组成多少不同的四个数位的数.对于这类比较简单的问题，我们可以采用一一列举的方法，写出所有的四位二进制数.答案是以下16个：

0000，	0001，	0010，	0011，
0100，	0101，	0110，	0111，
1000，	1001，	1010，	1011，
1100，	1101，	1110，	1111.

对于更为复杂，数字更为庞大的情形，一一列举往往很难办到，所以需要研究计数的规律及法则，这就是排列组合。

确实有些初学者感到排列组合题很难解，有些人甚至产生了畏难情绪。这有以下几方面的原因：

一是同学们在以往的学习中，习惯于处理“必然”现象。即由条件A必然推得结论B。而排列组合问题由对确定现象的研究转入了对“随机”现象的研究。如上面例子中，每个数位上的数字可以是0，也可以是1。对于这种“随意”性，需要我们有较灵活的思维方法，初学者往往不适应。

另外，这部分内容中的许多概念：如元素、位置、顺序，及排列、组合，排列种数、组合种数等比较抽象，它们可以有许多不同的实际原型，要求我们有较强的抽象思维能力。

再有，排列组合应用题形式变化多样，限制条件往往比较隐晦，计算中很容易产生重复或遗漏现象。而答数常常很

大，不便于用直观方法来检验，这又要求我们有较强的分析能力。

因此，只靠对题型、套模式的机械模仿，是不可能学好排列组合的。重要的是需要独立思考。也正因为如此，这部分是培养锻炼我们分析、解决问题能力的极好内容。

“排列组合”部分还有一个特点：它涉及其它数学知识不多，计算手段又很简单，大部分问题只需要用自然数及其四则运算就够了。因此不管你前面数学知识掌握得如何，只要从这一部分起，切实学好概念和基本原理，动脑筋弄懂弄透每一个有关问题，循序渐进，逐步增加题目的难度，以上困难都是可以克服的。只要掌握了思维的规律，步入到“排列组合”这一五彩缤纷的数学奇境，你会领略到数学的魅力，体验到思维的无限乐趣。

什么是“加法原理”和“分类计数”法

所谓“加法原理”，是根据自然数加法的意义得出的：若集合A有m个元素，集合B有n个元素，集合A与B无公共元素，把集合A与B的元素合并在一起得到集合C，那么集合C必然有$m+n$个元素。推广到一般情形，就是把一个有限集合A，分割成n个互不相交的子集、A_1、$A_2\cdots A_n$，那么$|A|=|A_1|+|A_2|+\cdots\cdots+|A_n|$，其中$|A_i|$表示集合$A_i$含有元素的个数。（如图1所示）这里特别要指出的是：任何两个子集互不相交，即$A_i\cap A_j=\phi$（$i\neq j$，i，$j=1$，$2\cdots n$）；

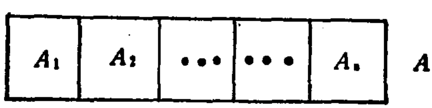

图 1

集合A的元素无一遗漏地被分割到它的某一子集A_i之中，即$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$。

如果我们把完成一件事的方法集合看作是集合A，划分成的n个互不相交的子集是n类不同方法，则得到一般教科书上的“加法原理”：

做一件事，完成它可以有n类不同的办法，在第一类办法中有m_1种不同的方法，在第二类办法中，有m_2种不同的方法，……在第n类办法中，有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同的方法。

这里一定要注意：

（1）每一类中的每一种方法都可以单独完成这件事；

（2）两类不同办法中的方法，互不相同（即分类不重复）；

（3）完成这件事的任何一种方法都属于某一类中（即分类时无遗漏）。

满足以上三条，在计数时总方法数等于各类方法数的和。这种计数方法我们称为“分类计数法”，或“分类相加计数法”。

当然，在具体问题中，还要根据某一标准进行分类，标准不同，分类方法也不同。只要满足以上三条，最后的计数结果应该是相同的。

例　计算所有两位数中，使用过的数字1的个数。

解法一　把所有含数字1的两位数分为三类：一、仅十位数字含有1的两位数，有10，12，13，……19。共用到9个“1”；

二、仅个位数字含有1的两位数，有21，31，41，……91。共用到8个“1”；

三、个位、十位数字都含有1的两位数，只有11，用到

2个“1”．

所以，总数$N=9+8+2=19$（个）

解法二　把两位数分为两类：

一、10——19中，含有1的数有10，11，12，……19．共用到11个“1”；

二、20——99中，含有1的数有21，31，41，……91．共用到8个“1”．

所以，总数$N=11+8=19$（个）

什么是“乘法原理”和“分步计数法”

同样根据自然数乘法的意义，也可以得到“乘法原理”．自然数的乘法定义为几个相同加数求和的运算，例如$2\times3=2+2+2$。

这正象一棵树上长出了三个主枝，每个主枝上又长出了2个分支，那么这棵树共有$2+2+2=2\times3=6$个分枝，如果每个分枝上又长出了4片树叶（见图2），那么此树共有$4+4+4+4+4+4=4\times6=4\times2\times3$片树叶．如果我们把树的每一层分叉看作由主干通到树叶的一个步骤，那么寻求树叶的工作分这样三步完成：第一步，找到一根主枝（有3种方法）；第二步，从此主枝上任选一分枝（有2种方法）；第三步，在此分枝上任选一片树叶（有4种方法）．（图2）共可找到$4\times2\times3$片不同的树叶。

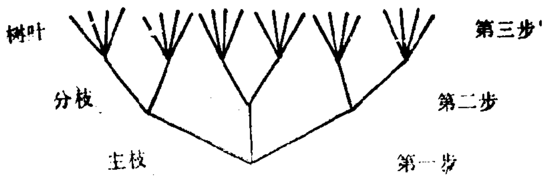

图2

这就是教科书上所说的“乘法原理”。

做一件事，完成它需要分成互相衔接的 n 个步骤。做第一步有 m_1 种不同方法，做第二步有 m_2 种不同方法，……做第 n 步有 m_n 种不同的方法。那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times m_3\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法。

这里特别要指出的是：

（1）任何一步中的一种方法都不能完成此事，必须且只须连续走完这几步，才能完成此事。也就是说：分别取自 n 个步骤中的 n 种方法，对应完成这件事的一种方法。

（2）各步计数相互独立。就是说，任何一步中的任何一种方法都可以和下一步中的一种方法衔接。

这种计数方法，我们称为“分步计数法”或“分步相乘计数法”。

图 2 称为“树图”，使用树图很容易把分步计数时所用的全部方法列出，也能直观地说明乘法原理与乘法意义的关系。

例如，从 A 地到 B 地有三条道路（a_1，a_2，a_3），从 B 地到 C 地有两条道路（b_1，b_2）（图 3）。写出从 A 地经过 B 地到达 C 的所有走法。

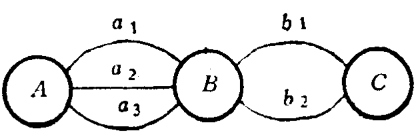

图 3

树图 4 给出了从 A 经过 B 到达 C 的所有走法。因为此树（横长的树）共有 6 片“树叶”，对应六种不同走法。（最后一个分枝点上分出的小枝，称为“树叶”）。

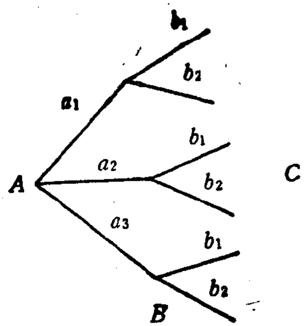

图 4

它们是：a_1b_1，a_1b_2，a_2b_1，a_2b_2，a_3b_1，a_3b_2。

应用"加法原理"和"乘法原理"的关键是什么

正确应用加法原理的关键是既无重复又无遗漏的分类。

例1 某班50名学生中，数学不及格的8人，物理不及格的7人，两门全及格的40人，求数学或物理不及格的人数。

错误解法：因为数学不及格的8人，物理不及格的7人，根据分类相加计数法，数学或物理不及格的共有 $8+7=15$（人）。

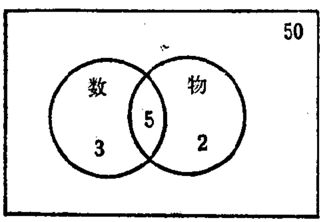

图 5

分析：此解法错误在于分类中出现了重复。由已知，有不及格科目的人数为 $50-40=10$（人），所以实际上物理或数学不及格的即这10人。如果要分类的话，应分为三类：仅数学一门不及格的3人，仅物理一门不及格的2人，两门都不及格的5人。（如图5）

应用乘法原理的关键是正确设计分步程序。

例2　三封信投入4个不同的信箱，有几种不同的投放方法？

解：正确的分步程序是，投放工作可分三步完成：第一步，投第一封信有4种不同的投法；第二步，投第二封信也有4种不同投法；第三步，投第三封信也有4种不同的投法。根据乘法原理，共有$N=4\times4\times4=64$种不同投放方法。

有的同学这样分析：从各信箱投入信的情况出发考虑：第一个信箱中投入的信可以是0封，1封、2封、3封，共4种可能，第二、三、四信箱中投入信也各有4种可能。所以共有$N=4\times4\times4\times4=256$种不同投放方法。

这种解法错在哪里？为什么会多出192种投法？

错误在于这种分步程序各步之间不是相互独立的。若第一个信箱中投入了1封信，第二个信箱只可能再投入0、1、2封信，……所以第一步的结果影响第二步的方法数，第一、二步的结果影响第三步的方法数。不合理的分步，当然会使计算结果错误。

很多问题中，既要用到加法原理，又要用到乘法原理。这时，一定要分清哪一部分分步，哪一部分分类，是先分步还是先分类。

例3　从5本文艺书，4本科技书和3本政治书中选出不同类的2本，有几种选法？

解：做这件事应先分类，每一类中再分两步完成。

第一类：选一本文艺书一本科技书，有5×4种选法；第二类：选一本文艺书一本政治书有5×3种选法；第三类：选一本科技书一本政治书有4×3种选法。

所以总数为$N=5\times4+5\times3+4\times3=47$（种）。

有人分成这样三类：选一本文艺书，另一本科技或政治

书有 $5\times(4+3)=35$ 种选法；选一本科技书另一本其它书有 $4\times(5+3)=32$种选法；选一本政治书及另一本其它书有$3\times(5+4)=27$种选法，所以共有$N=35+32+27=94$（种）。

请同学们分析，这种解法错在哪里？

排列组合的区别和联系是什么

排列组合都是研究"从n个不同元素中选取m个($m\leqslant n$)"的安排或配置问题的。如果选出的m个元素还要"按照一定的顺序排成一列"则是排列问题，如果选出的m个元素"不管顺序如何并成一组"则属于组合问题。为了区别是排列还是组合，对于取出的m个元素，我们可以改变一下排列顺序，如果是不同的取法则属于排列问题，如果是同一种取法则是组合问题。

例1 （1）10人见面，互相握手问候，共握几次手？（2）10人互相通信，共写多少封信？

解：（1）因为甲和乙握手与乙和甲握手是一回事，所以属于组合问题。答案是$C_{10}^{2}=45$。

（2）甲给乙写一封信，乙给甲写一封信是两封不同的信，有顺序问题，因此属排列问题。答案是$P_{10}^{2}=90$。

例2 （1）从10个学生中选出3人参加会议，有几种不同的选法？（2）从10个学生中选出3人参加三个不同的会议，有几种不同的选派方法？

解：（1）选出甲、乙、丙三人与乙、丙、甲三人参加同一会议是同一种选法。因为与顺序无关，所以是组合问题。答案是$C_{10}^{3}=120$。

（2）选出甲、乙、丙三人，考虑他们依次参加一、二、三三种不同会议，与乙、丙、甲分别参加一、二、三会议是不同选派方法。与顺序有关，是排列问题，答案是$P_{10}^{3}=720$。

正因为排列比组合多一个顺序问题，所以所有的排列都可以分两步完成：第一步，从n个不同元素中选取m个（$m\leqslant n$）；第二步，把选出的m个元素按不同顺序排成一列。所以排列数与组合数有以下关系：

$$P_n^m=C_n^m\cdot P_m^m,C_n^m=\frac{P_n^m}{P_m^m}.$$

有些问题，其中某一部分是排列问题，另一部分是组合问题，一定要小心地区别开来。为了慎重起见，也可以先选取（做组合），再排序（做排列）。

例3 从1、3、5、7、9中选出2个奇数字，从2、4、6、8中选出2个偶数字，可以组成多少没有重复数字的四位数？

如果一看到组成四位数就简单地理解为排列问题，就会发生以下错误：

选排两个奇数字有P_5^2种方法；选排两个偶数字有P_4^2种排法。所以不同的四位数有$P_5^2\cdot P_4^2=20\times12=240$（个）。

这种解法错误在于仅就两个奇数字及两个偶数字各自排序，而未对奇偶数字共同排序。

正确解法是：

第一步，选取奇数字有C_5^2种选法；第二步，选偶数字有C_4^2种选法；第三步，选出的两个奇数字和两个偶数字放在一起排序（做全排列）有P_4^4种排法。

所以可组成无重复数字的四位数共有：

$$C_5^2\cdot C_4^2\cdot P_4^4=10\times6\times24=1440\text{（个）}.$$

“树图”在解决排列问题中有什么作用

“树”是图论中的一个概念，它指的是一个连通的无圈图。“树图”就是“树”形图，好象一棵树一样，从树干上长出几个主枝，主枝又可分叉长出分枝，分枝再分叉成小分