

断裂力学

浙江大学《新技术译丛》编译组

断 裂 力 学

(译文集)

浙江大学 化机、工科学教研组 编译
《新技术译丛》编译组 编译

*

浙江大学《新技术译丛》编译组出版

浙江诸暨印刷厂印刷

*

定价: 0.70元

(国内发行)

前 言

断裂力学是门崭新的学科，自六十年代初诞生以来，发展极为迅速，新的理论、新的实验方法不断涌现，目前国外在这方面的研究规模巨大，遍及材料、冶金、航空、宇航、建筑、机械制造等各个领域。

我国近年来也已开始重视材料的“断裂应力”“断裂韧性”的探讨，“断裂力学”的研究正日益展开。我们这里选译了国外专业会议、期刊上登载介绍的几篇资料，讨论的是有关纯幂硬化应力-应变关系、塑性形变理论应用、球形容器低周强度、焊接应变、镍棒断裂机理等内容，以供有关专业人员参考。由于专业和文字水平很低，错误之处在所难免，请读者批评指正。

目 录

1. 全塑性裂缝问题：在平面应变情况下的中心裂缝
板条..... (1)
2. 出(非)平面剪切下的全塑性中心裂缝板条..... (23)
3. 平面应力裂纹问题的全塑性解和对大范围屈服的
估算..... (35)
4. 纯镍在简单拉伸试验中断裂机理图的发展..... (53)
5. 焊接头错位对60公斤级高强度钢半球形压力容器
的低周疲劳强度的影响..... (75)
6. 测量焊接件应变和拘束的文献综述..... (95)

全塑性裂缝问题:

在平面应变情况下的中心裂缝板条

本文列出了应力和应变关系用一纯幂硬化规律表征的固体裂纹问题的公式。对于这种问题来说,用与积分路线无关的 J 积分度量的裂纹尖端奇异性强度和作用载荷、载荷作用点位移以及裂纹张开位移之间存在着简单的函数关系。这种问题的解对塑性增量理论以及塑性变形理论都是有效的:它们也可用于包含稳定蠕变的一些裂纹问题。本文提出了平面应变状态下有限宽度的中心裂纹板条的数值结果,初步讨论了把上述结果用于大范围屈服断裂力学的适用程度。

绪 言

当裂纹尖端的应力场对裂纹呈对称或反对称且主要属平面应力或平面应变状态时,弹塑性应变硬化材料中稳定裂纹尖端毗邻区域的特性可用一简单的参数表示之。在小应变塑性变形理论的下文中,裂纹尖端应力和应变场奇异性幅度直接与 Rice [1] 提出的 J 积分有关。 J 积分与积分路线无关,它是用以度量奇异性强度的一个合适的参量。在发展大范围屈服断裂判据中,这个方法的显著作用已经由 Begley 和 Landes [2,3] 在其完成的一系列试验中加以阐明了。

对于塑性应变与应力幂次方成正比的幂乘硬化材料,此奇异性问题业已在一定程度上研究过了 [4,5]。当处于小范围屈

服时,可用一个简单的公式把 J 与弹性应力强度因子联系起来。大范围屈服时,一般说来不能简单地算出 J 值,这是因为 J 以一种复杂的方式与几何形状、载荷水平和非线性应力-应变特性相关。然而,在进行试件和一般裂纹体断裂分析时,需要有 J 与诸如裂纹张开位移、载荷作用点位移以及作用载荷等数量之间的关系。

在他们起初的试验中, Begley 和 Landes[2,3] 曾使用一个与实验相吻合的方法,以获得 J 和载荷作用点位移之间的关系。最近已提出了一个较简单的估算 J 和载荷作用点位移之间关系的近似方法[6]。这一方法利用 Irwin 对弹性分析作出的塑性修正和全塑性分析结果,能从小范围屈服区域外插到全塑性区。根据有限单元法作出的很多的数值计算看来,如[7-10]中所述,有限单元法对于大范围屈服分析是很有希望的,但是这样计算至少有一个缺点,那就是材料特性或外形一有变化就必须再次重作计算。

本文阐述应力-应变特性取为纯幂硬化形式(如 Ilyushin [11]所述)的材料的全塑性断裂问题。对于这种问题,在 J 和作用载荷或任一位移量之间有着一个非常简单的函数关系。这些解形式简单,由此表明:除了可看出全塑性状态的特性以外,如同上述那样,在外推法中计及应变硬化,看来是有用的。全塑性裂纹问题另一个有吸引力的特色是,对于单调增大的作用载荷来说,这些解既对塑性变形理论又对塑性增量理论严格有效。本文提出了平面应变状态下中心裂纹板条受拉伸载荷时的数值计算结果。

全塑性裂纹问题表达式

应变-位移方程和平衡方程是古典的线性关系时应用塑性

理论小应变表达式。假定应力和应变之间存在着一个单纯的幂硬化关系，在简单拉伸中

$$\varepsilon/\varepsilon_0 = \alpha(\sigma/\sigma_0)^n \quad (1)$$

式中， α 是一个无因次的常数，而 ε_0 和 σ_0 是应变和应力的参考值（通常宜采用 $\sigma_0 = E\varepsilon_0$ ， E 为杨氏模数）。因

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ii}\delta_{ij} \text{ 和 } \sigma_e^2 = \frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}$$

用最简单的变形理论（ J_2 变形理论）使(1)推广成下式

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} = \frac{3}{2}\alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{S_{ij}}{\sigma} \quad (2)$$

由于 $\varepsilon_{pp} = 0$ ，材料是固有不可压缩的。

如果考虑基于(2)的边界值问题，其中全部边界上的作用力已给定，且当这些拉力的大小处处都与单一的载荷参数成线性比例时，其作用方向保持不变，则如同首次由 Ilyushin [11] 所表明的那样，在物体中每一点的应力也随此载荷参数作线性变化。当此载荷参数单独增加时，每点上应力分量的相对比例没有变化，因而，对于塑性增量理论及 J_2 流动理论来说，其解也是严格正确的。这些条件对于如下的裂纹问题显然是满足的：裂纹不受力作用，在外侧边界上作用力是与单一的参数成比例或者在无限远处趋近于恒定应力情况。

本文中，注意的是I型的平面应变问题（ $\varepsilon_{33} = 0$ ），此处应力场对裂纹对称。在这情况下，裂纹尖端奇异性的应力、应变和位移场具有如下形式

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij}, \sigma_e] &= \sigma_0 K_n r^{-(1/2(n+1))} [\tilde{\sigma}_{ij}(\theta), \tilde{\sigma}_e(\theta)] \\ \varepsilon_{ij} &= \alpha \varepsilon_0 K_n r^{-(n/2(n+1))} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta) \\ u_i &= \alpha \varepsilon_0 K_n r^{[1/2(n+1)]} \tilde{u}_i(\theta) \end{aligned} \quad (3)$$

式中， r 是离裂纹尖端的距离， θ 是从裂纹正前方量起的角度。无因次函数 $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$ ， $\tilde{\sigma}_e(\theta)$ ， $\tilde{u}_i(\theta)$ 和 $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta)$ 与应变硬化指数 n 有

关, 业已在[4]中给出。塑性应力和塑性应变强度因子 K_0 和 K_1 按 $K_1 = (K_0)^n$ 相联系。把 $\tilde{\sigma}_s(\theta)$ 的最大值规一为1后, 就可给予这些幅值以明确的意义。

若应变能密度定义如下:

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \alpha \sigma_0 \epsilon \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{n+1}$$

则可由[1]给出平面问题的与积分路线无关的 J 积分

$$J = \int_r (w_{,1} - \sigma_{ij,n} u_{i,1}) ds \quad (4)$$

这里把裂纹取为位于 x_1 轴, 而 r 是围绕裂纹尖端的任何周线。塑性强度因子与 J 由下式联系起来

$$J = \alpha \sigma_0 \epsilon_s K_0 K_1 I_n = \alpha \sigma_0 \epsilon_s (K_0)^{n+1} I_n = \alpha \sigma_0 \epsilon_s (K_1)^{(n+1)/n} I_n \quad (5)$$

式中, 对应于一个区间的 n 值的数值常数 I_n 给予[4]中*。

说明上稍加改变, 上述公式可直接应用于稳定的即第二阶段的蠕变。对于拉伸时形式为 $\epsilon/\epsilon_s = \alpha(\sigma/\sigma_0)^n$, 并以下式推广到多数状态

$$\frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\epsilon_s} = \frac{3}{2} \alpha \left(\frac{\sigma_r}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{S_{ij}}{\sigma_0}$$

的一个蠕变定律来说, 如果量 ϵ_{ij} 和 K_1 都用它们的变化率 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 和 $\dot{K}_1$ 来替换, u 也用 $\dot{u}_i$ 来替换, 则前面所有的公式都继续可用。此时 w 是应变变化率势能, 而 J 仍起着表征裂纹尖端附近应力和应变变化率场的单一参数的作用。这样, 由(5)式, 裂纹尖端应变变化率奇异性的幅度是

$$\dot{K}_1 = [J/(\alpha \sigma_0 \epsilon_s I)]^{n/(n+1)}$$

* 由于在(3)中 r 具有长度量纲, 因此 $(K_0)^{n+1} = (K_1)^{(n+1)/n}$ 也具有长度的量纲。如果改变一下, 取 r 为无量纲, 例如, 离尖端的间距除以裂纹长度 a 之半, 使之正则化, 则 K_0 和 K_1 也是无量纲的, (5)式将代之以 $J = \alpha \sigma_0 \epsilon_s a K_0 K_1 I_n$ 。

应变变化率由(3)式给出, 而以 θ 为变量的 $\tilde{\epsilon}_{ij}(\theta)$ 保持不变。

本文对平面应变状态下的中心裂纹板条作了一些详细的研究。裂纹长 $2a$, 位于宽 $2b$ 的一个板条的中央, 该板条沿垂直于裂纹方向的长度以无穷大计(见图1中的插图)。当 $|x_2| \rightarrow \infty$, 平面上各应力趋于: $\sigma_{22} = \sigma^\infty$, $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$ 。边缘 $x_1 = \pm b$ 并不受力。

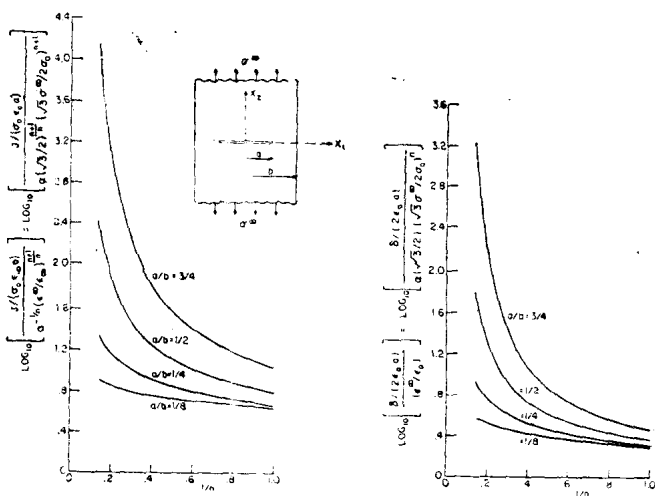


图1 a/b 为常数时, 作为 $1/n$ 的函数, 以 ϵ^∞ 或 σ^∞ 正则化处理后的 J 和 σ 曲线

如同[11]中所述, 材料特征由(2)式表示的受拉力的边界问题中, 应力与作用的拉力线性相关。对于一个平面问题来说, 弄清这一点的最容易的方法是设想一个用应力函数经由(2)式表示的协调方程。在应力函数中, 由此得到的方程式是应力函数 n 次方的齐次方程式; 因此, 如果一个给定的应力场

是它的一个解的话, 则同一个场的任何倍数也一定是它的解了。于是全塑性裂纹问题的解以函数形式表示为:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}/\sigma_0 &= (\sigma^\infty/\sigma_0) \hat{\sigma}_{ij}(x/a, a/b, n) \\ \varepsilon_{ij}/\varepsilon_0 &= \alpha(\sigma^\infty/\sigma_0)^n \hat{\varepsilon}_{ij}(x/a, a/b, n) \\ u_i/(\varepsilon_0 a) &= \alpha(\sigma^\infty/\sigma_0)^{n+1} \hat{u}_i(x/a, a/b, n)\end{aligned}\quad (6)$$

特别是

$$\begin{aligned}J &= \alpha \sigma_0 \varepsilon_0 a (\sigma^\infty/\sigma_0)^{n+1} \hat{J}(a/b, n) \\ \delta &= \alpha \varepsilon_0 a (\sigma^\infty/\sigma_0)^n \hat{\delta}(a/b, n)\end{aligned}\quad (7)$$

式中, $\delta = u_2(x_1 = 0, x_2 = 0^+) - u_2(x_1 = 0, x_2 = 0^-)$ 取为裂纹中心处的裂纹张开位移。顶上加有 $(\hat{})$ 符号的无因次函数与作用的应力 σ^∞ 无关, 仅决定于参数 a/b 和 n , 而在场量情况下还决定于无因次坐标 x/a 。于是, 由此解的特性 (如 (6) 第一式所示) 可得, 应力的演变在每个点上都是成比例的, 因此这一解对 J_2 流动理论以及 J_2 变形理论来说都是有效的。

现把 $|x_2| \rightarrow \infty$ 时达到的应变引入, 这样做也是很方便的。由于考虑的是平面应变, $|x_2| \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &\rightarrow 0, \quad \sigma_{22} \rightarrow \sigma^\infty, \quad \sigma_{33} \rightarrow \frac{1}{2} \sigma^\infty, \quad \sigma_c \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma^\infty, \\ \varepsilon_{33} &= 0, \quad \varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11} \rightarrow \varepsilon^\infty\end{aligned}\quad (8)$$

因此由 (2) 式可得

$$\frac{\varepsilon^\infty}{\varepsilon_0} = \alpha \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma^\infty}{\sigma_0} \right)^n \quad (9)$$

式中 σ^∞ 取为正值。

曾使用裂纹尖端奇异元的有限单元法算出对应于很多 a/b 和 n 值的 $\hat{\sigma}_{ij}$, $\hat{J}$ 等量值。由于材料是完全非线性和不可压缩的, 这使有限单元法计算复杂得很。在附录中将略为详细地论

述这一方法。在下一节我们就直接把计算结果列出来。

中心裂纹板条的数值结果

由(7)和(9)式得到的正则化处理后的 J 和 δ 如下式

$$\frac{J}{\alpha^{-1} \sigma \epsilon a \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{(n+1)/n}} = \frac{J}{\alpha \sigma \epsilon a \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{n+1}} = \frac{J}{\left(\frac{\sqrt{3} \sigma}{2} \right)^{n+1}} = f_1 \left(\frac{a}{b}, n \right) \quad (10a)$$

$$\frac{\delta}{2 \epsilon_0 a \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{n+1}} = \frac{\delta}{2 \epsilon_0 a \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{n+1}} = f_2 \left(\frac{a}{b}, n \right) \quad (10b)$$

式中, f_1 和 f_2 是 a/b 和 n 的无因次函数。表 1 中列出了对应于四个 a/b 值和六个 n 值 (由 1 至 7) 的 f_1 和 f_2 的计算结果。超过这些参数值的范围, (10) 式中的两个无因次组合就要改变三个量级, 这可由图 1 中作为 $1/n$ 的函数的无因次组合的对数曲线看出。 n 固定不变, $a/b \rightarrow 1$ 时, 这两个数值是无界的; 而当 a/b 固定不变, $n \rightarrow \infty$ 时, 这两个数值也是无界的。图 2 中示出转换图形。

在考虑比(10)式更合适的正则式之前, 我们将先提出一个用裂缝中心裂纹张开位移 δ 表示的合适的 J 的正则式。这个关系式是有些意义的, 特别是对断裂韧性试验[12]来说。由中心裂纹刚塑性板条的极限分析, 大家都知道这一关系式在 $n \rightarrow \infty$ 极限情况下的表达式[6]。在此极限情况下, 对于所有 a/b 的值来说

$$J = (2/\sqrt{3}) \sigma \delta \quad (11)$$

在线弹性极限, 即 $n=1$ 情况下正则形式为:

$$\frac{J}{\alpha^{-1} \sigma \epsilon a \left(\frac{b}{b-a} \right) \left(\frac{\delta}{2 \epsilon a} \right)^2} \quad (12)$$

表 1 †

$a/b \backslash n$	$n=1$	$n=1.5$	$n=2$	$n=3$	$n=5$	$n=7$
$a/b \rightarrow 0$	$f_1=4\pi/3 \pm$ $f_2=2.0 \pm$ $f_3=\pi/3 \pm$ $f_4=-$ $f_5=4\pi/3 \pm$ $f_6=2.0 \pm$	$f_3=1.25 \S$	1.37 §	1.50 §	1.64 §	1.76 §
$a/b=1/8$	$f_1=4.23$ $f_2=1.92$ $f_3=1.00$ $f_4=0.100$ $f_5=3.70$ $f_6=1.68$	4.97 2.22 1.20 0.129 4.07 1.82	5.46 2.45 1.33 0.154 4.18 1.87	6.02 2.77 1.48 0.211 4.04 1.86	7.08 3.30 1.65 0.314 3.63 1.69	8.15 3.74 1.77 0.408 3.20 1.47
$a/b=1/4$	$f_1=4.59$ $f_2=2.01$ $f_3=0.855$ $f_4=0.197$ $f_5=3.44$ $f_6=1.51$	5.90 2.44 1.10 0.253 3.83 1.58	7.07 2.87 1.26 0.307 3.98 1.61	9.30 3.73 1.46 0.405 3.92 1.57	14.58 5.76 1.69 0.572 3.46 1.37	22.06 8.60 1.81 0.681 2.94 1.15
$a/b=1/2$	$f_1=6.24$ $f_2=2.31$ $f_3=0.586$ $f_4=0.396$ $f_5=3.12$ $f_6=1.15$	9.28 3.11 0.882 0.493 3.28 1.10	13.03 4.12 1.10 0.580 3.26 1.03	24.26 6.97 1.45 0.719 3.03 0.872	80.08 20.41 1.87 0.887 2.50 0.638	264.3 62.80 2.11 0.959 2.06 0.491
$a/b=3/4$	$f_1=10.92$ $f_2=2.92$ $f_3=0.321$ $f_4=0.597$ $f_5=2.73$ $f_6=0.729$	20.73 4.61 0.645 0.726 2.59 0.576	37.28 7.26 0.952 0.821 2.33 0.454	119.2 19.34 1.45 0.932 1.86 0.302	1273.0 170.1 2.03 0.992 1.24 0.116	14040.0 1749.0 2.27 0.999 0.857 0.107

‡ 精确值 § 外推值

+ $n=1$, $a/b \rightarrow 1$ 时的极限值是 $f_3=0$ 和 $f_3=16\pi/(3(\pi^2-4))$ 。对所有的 a/b 值, $n=\infty$ 时极限值是 $f_3=4/\sqrt{3}$ 和 $f_3=1, 0$ 。

当 $a/b \rightarrow 0$ 时趋于一有限值, 而当 $a/b \rightarrow 1$ 时趋于零。选用

$$\frac{J}{a^{-n+1} \sigma \varepsilon_0 a \left(\frac{b}{b-a} \right)^{n+1} \left(\frac{\delta}{2 \varepsilon_0 a} \right)^{n+1} n} = f_3 \left(\frac{a}{b}, n \right) \quad (13)$$

此式与(11)式、(12)式以及(7)式这样的一般函数形式是一致的。 f_3 的计算值给于表 1 中, 并绘于图 3。在本文的整个篇幅中, 任一图中的曲线的外推部分都用虚线表示之。特别是, $n > 7$ 时图 3a 中的曲线段被外推至 $n = \infty, f_3 = 4/\sqrt{3}$ 时的极限值, 该值可由(11)式精确地求得。 $a/b \rightarrow 0$ 时的曲线是通过外推到图 3b 所示的这个极限而得到的。由于对(13)式中所提出的几何特性 $[b/(b-a)]^{1/n}$ 的可靠性还不落实, 已不再试图把图 3b 中的曲线引伸到 $a/b = 1$ 去。

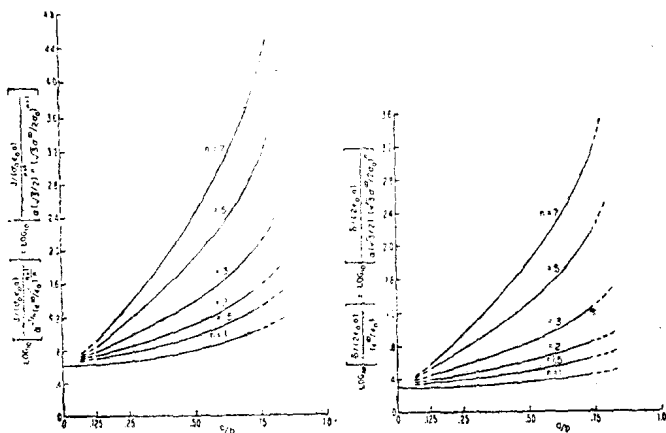


图2 n 为常数时, 关于 e^∞ 和 σ^∞ 作正则化处理后, 作为 a/b 函数的 J 和 δ 曲线

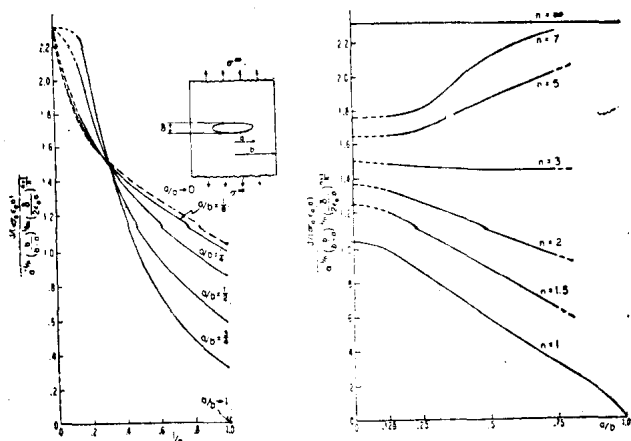


图3 关于 δ 作正则化处理的 J 曲线

图4a所示曲线是 $a/b = 1/2$ 对应于某几个 n 值以 $\delta/2$ 作正则化处理后的垂直于裂纹方向的位移曲线。这些曲线与 σ^∞/σ_0 无关。在全塑性条件下，当 n 约大于 5 时，在裂纹中心处的裂纹张开位移是裂纹上所有各点（裂纹两端点除外）的张开位移的一个较好的近似值。

考察一个沿 x_2 方向长 $2h$ 的板条，如图4b所示，在其 $x_2 = \pm h$ 处作用有 $\sigma_{22} = \sigma^\infty$ 。令载荷作用点的位移为 Δ ，

$$\Delta = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [u_2(x_1, h) - u_2(x_1, -h)] dx_1 \quad (14)$$

板条上作用的应力在此位移上要做功。在 $n \rightarrow \infty$ ，即相当于刚塑性的极限下，变形局限于图4b所示的四个 45° 剪切带，如同[13]所述。在此极限下，只要 h 大于 $(b-a)$ ， Δ 就等于 δ 而与 h 无关。然而，对于一定的应变硬化指数值，当 σ^∞ 值给定时， Δ 就不再与板条长度无关了，只要 h 比 a 或 $b-a$ （当与其中任一有关时）足够大， Δ 基本上是随 h 线性增加的。对于一个作用

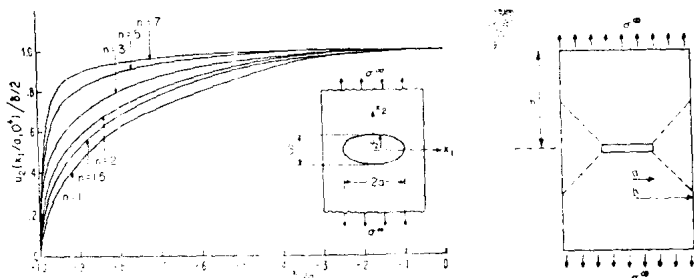


图 4 (a) 裂纹张开位移曲线, (b) 表明刚塑性极限情况下位移线的有限长板条的几何图形

有应力 σ^{∞} 长为 $2h$ 的无裂纹板条来说, 载荷作用点位移是

$$\Delta_{\text{无裂纹}} = 2h\varepsilon^{\infty} \quad (15)$$

式中, ε^{∞} 按 (9) 式给定。令载荷作用点残余位移 Δ_R 为

$$\Delta_R = \Delta - \Delta_{\text{无裂纹}} \quad (16)$$

h 足够大时, Δ_R 基本上是与 h 无关的; $n \rightarrow \infty$ 时, $\Delta_R = \Delta = \delta$ 。对于一定的 n 值和一给定的应力值 σ^{∞} , 若已知 Δ_R , 就可由 (16) 式得出 Δ 。

Δ_R 和 δ 之比示于图 5。如同附录中所述, 计算时选用的 h/b 值要足够的大, 以保证我们所提出的 Δ_R 值是 $h \rightarrow \infty$ 时的极限值位于数值方法的精确度范围以内。下式的函数 f_4 值

$$\frac{\Delta_R}{\delta} = f_4(a/b, n) \quad (17)$$

给于表 1 中。当处于全塑性极限 ($n = \infty$), $\Delta_R = \delta$ 时, 一个很小的应变硬化量在 a/b 大约小于 $1/2$ 时会使上述关系起很大的变化。只要简单地利用 (17) 式消去 (13) 式中的 δ , 就能得到以 Δ_R 表示的 J 的表达式。

对 ε^{∞} 或 σ^{∞} 选择一个合适的 J 正则化形式, 是一件比较精

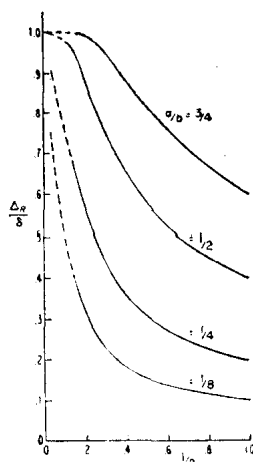


图5 载荷作用点残余位移对裂纹中心的裂纹张开位移的比值

细的事情。图1和图2中所用到的正则化(10)式是与 a/b 毫不相关，而这就导致 f_1 和 f_2 对 a/b 密切相关。用于线弹性($n=1$)的一个正则化形式

$$\frac{J}{\alpha \sigma_0 \epsilon_0 a [b/(b-a)] (\sigma^\infty / \sigma_0)^2} \quad (18)$$

当 $a/b \rightarrow 0$ 和 $a/b \rightarrow 1$ 时，具有一定的有限值，且精确可知[14]。

作用在裂纹两侧韧带上的净截面应力是 $\sigma_{\text{净}} = \sigma^\infty b/(b-a)$ 。在裂纹两侧的韧带区域中，当 $n \rightarrow \infty$ 时，则接近于下列极限值：

$$\sigma_2 \rightarrow \sigma_0, \quad \sigma_3 \rightarrow \sqrt{3} \sigma_{\text{净}}/2 \Rightarrow \sigma_{\text{净}} \rightarrow 2\sigma_0/\sqrt{3}$$

由(7)式， J 与增加了 $(n+1)$ 次方的应力成正比。试探性地考虑一个以净韧带应力为依据的正则化形式，即

$$\frac{J}{\alpha \sigma_0 \epsilon_0 a \left(\frac{\sqrt{3} \sigma_{\text{净}}}{2 \sigma_0} \right)^{n+1}} = \frac{J}{\alpha \sigma_0 \epsilon_0 \left(\frac{b}{b-a} \right)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{3} \sigma^\infty}{2 \sigma_0} \right)^{n+1}} \quad (19)$$

这与解(7)的一般函数形式显然是一致的。为了使 $n=1$ 时(18)式与(19)式相一致,把(19)式乘以 $b/(b-a)$ 。还用 $(\sqrt{3}/2)^{(n+1)/n}$ 去除以(19)式,以得到本文所用的正则化的最后形式

$$\frac{J}{\alpha \sigma_0 \epsilon_0 a \left(\frac{b}{b-a}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{(n+1)/n} \left(\frac{\sqrt{3} \sigma^*}{2 \sigma_0}\right)^{n-1}} = \frac{J}{\alpha^{-1/n} \sigma_0 \epsilon_0 a \left(\frac{b}{b-a}\right)^n \left(\frac{\epsilon^*}{\epsilon_0}\right)^{(n+1)/n}} = f_3(a/b, n). \quad (20)$$

裂纹张开位移的正则形式取为

$$\frac{\delta/(2\epsilon_0 a)}{\alpha \left(\frac{b}{b-a}\right)^n \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3} \sigma^*}{2 \sigma_0}\right)^n} = \frac{\delta/(2\epsilon_0 a)}{\left(\frac{b}{b-a}\right)^n \left(\frac{\epsilon^*}{\epsilon_0}\right)} = f_0(a/b, n). \quad (21)$$

f_0 和 f_3 的数值列于表 1 中, 在图 6 以实线绘出。

用这些式子标绘曲线显然是很成功的。通过这些式子强调了当 n 较大时几何形状对 J 和无穷远处的应力或应变之间关系所起的极强烈的影响。然而, 它们不允许外推到 n 大于约为 10 的值, 该值相应于低应变硬化的情况。它们也不允许准确的外推到 $a/b=0$, 即在无限体中具有有限裂纹的极限情况。

一些对于出平面剪切 (Ⅱ型) 全塑性问题密切相关的结果是有用的。Amazigo [15] 曾研究了无限体中具有半长度为 a 的有限裂纹。假定纯幂硬化定律类似于式(1), 即

$$\gamma/\gamma_0 = \alpha(\tau/\tau_0)$$

并应用类似于式(2)的形式加以推广之。Amazigo 对于这个问题的精确解的结果示于图 7。这个解的函数形式与 $a/b=0$ 时的(7)式相同。对于大的 n 值, Amazigo 得到

$$\frac{J}{\alpha^{-1/n} \tau_0 \gamma_0 a (\gamma^*/\gamma_0)^{(n+1)/n}} \approx \frac{\delta}{a \gamma^*} \approx 0(\sqrt{n}) \quad (22)$$

式中, 裂纹张开位移 δ 取为裂纹在它中心处的两个面的相对位移。当 $n \rightarrow \infty$ 时, J 和 δ 的关系式接近于全塑性结果 $J = \tau_0 \delta$, 如