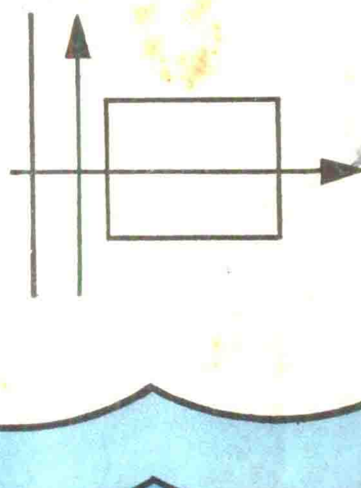
有越流补给时流向面状井的地下水不稳定流计算



胡佩清 著

地质出版社

有越流补给时流向面状井的地下水不稳定流计算

北京工业大学计算机科学系

胡 佩 清 著

地 质 出 版 社

有越流补给时流向面状井的

地下水不稳定流计算

北京工业大学计算机科学系

胡佩清　著

*

地质矿产部书刊编辑室编辑

责任编辑：沈树荣

地质出版社出版

（北京西四）

沧州地区印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：850×1168 $^{1}/_{32}$ 印张：6 $^{1}/_{2}$　字数：166,000

1982年10月北京第一版·1982年10月北京第一次印刷

印数：1—2,845册·定价：1.50元

统一书号：15038·新869

序　言

在实现我国四个现代化的伟大号召下，目前全国工农业生产正在蓬勃地发展，在这种大好形势推动下，许多厂矿供水（或矿山疏干排水）与农田灌溉都需要大量应用地下水资源（或排除地下水）。由于所需要（或疏干）的地下水量很大，过去用少量钻孔取水的办法已解决不了问题，故最近许多单位，为了满足生产上的要求，都采用面状井（供水时，是按面积均匀分布的开采井群；矿山疏干排水时，是矿坑排水系统）来开采（或疏干）地下水。在这种情况下，正确地计算地下水可开采（或疏干）的水量，并以最少的投资和设备，进行最合理地开采与利用地下水资源，是我们目前重要的课题。

有越流补给时，流向面状井地下水不稳定流计算比单井计算复杂得多，因为当确定面状井的流量（$Q_{总}$）和水位降深（S）时，流向面状井的水流阻力不仅与面状井所在含水层的边界条件、厚度、岩性以及面状井的大小和形状有关，而且还与抽水延续时间和上下相邻层越流补给条件相联系，当直接确定抽水井中水位降深（S_0）时，还要考虑井壁过滤器产生的附加阻力的问题。

对于无边界（无限平面）含水层中，无越流补给时流向面状井地下水不稳定流计算的问题，过去国内外文献中都曾有过介绍，但对于不同边界条件下有越流补给时流向面状井地下水不稳定流计算的问题则缺少专门研究。为此，本书作者从1976年开始，根据五种不同的地质边界条件，把含水层综合为十六种计算类型，并应用热传导原理的基本理论和方法，在前人理论基础上导出不同地质边界条件下有越流补给时流向面状井的地下水不稳定流计算公式（见表 7），并把它编成为应用电子计算机计算的源程序。此外，还打印了一系列实用的计算数值（本书称为水流阻力系数

R值），列于附表中，以供读者计算应用。

计算工作者，只需根据单井抽水资料，确定有关参数和变量后，即可在有关附表中，查得水流阻力系数R值，代入本书中的计算公式，就能求得计算区地下水预报的数值。

由于自然界条件复杂，本书附表中的水流阻力系数R值，不能包括所有的计算情况。对于一些特殊的情况，可以按照书后所列的计算R值的源程序，根据自己所掌握的原始资料，填好输入表格，直接在电子计算机上计算所需的R值。

目　录

第一章　有越流补给时流向面状井的地下水不稳定流计算公式

在本章中，我们准备介绍无边界（无限平面）、直线边界、相互垂直边界、两边平行边界以及三面边界等五种不同边界条件下，各种（十六种类型）含水层中面状井地下水不稳定流的计算公式和计算方法。

§1　无边界含水层有越流补给时流向面状井的地下水不稳定流计算

在有着巨厚第四系沉积物的广阔平原中，经常存在有无边界的含水层，而在这类含水层中（大部份属于承压水流），地下水坡降很小，流速缓慢，侧向流来的水量甚是微小。

当这类含水层由面状井开采时，如果得不到上下相邻含水层的越流补给，则面状井所开采的水量，大部份是消耗含水层的"弹性水量"，故经过较长时间开采后，在含水层中就会出现以面状井为中心的大面积盘底状降落曲面，而且这种降落曲面还会随着开采时间的延续而不断地向外扩展。

如果含水层得到上下相邻含水层的越流补给，上述的降落曲面在达到一定的开采条件时，就不再向外延伸，能保持稳定的状态。

在无边界含水层中，通常面状井分布的形状有长方形和圆形两种，现分别介绍如下。

（一）流向长方形面状井的地下水不稳定流计算

在无边界含水层中，如果存在一个由三层以上均质含水层组

成的含水层组（见图1），有一个面积为F，开采总流量为$Q_{总}$的长方形面状井在其中工作（见图2），面状井则由n个均匀分布的完整井组成，井的过滤器部份位于第二个含水层中，此含水层的顶底板是由弱透水层构成的。开采前，第二含水层与上下相邻含

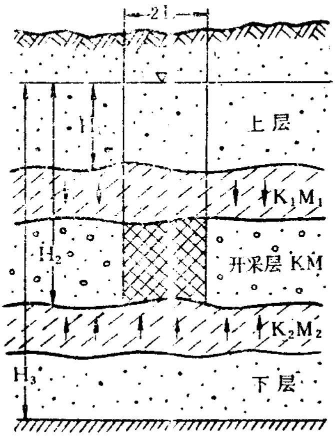


图 1

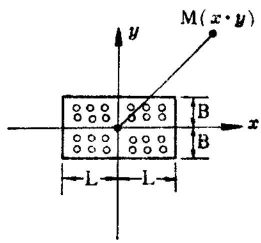


图 2

水层（即一、三含水层）都具有水力联系；开采后，上下相邻层的水头并未随时间改变（或改变很小），但被开采的含水层（即第二含水层）的水头却逐渐下降，故在三个相邻含水层之间产生了垂直水头坡降，在这种水力条件作用下，上下相邻含水层就通过弱透水层对第二含水层产生了垂直的水流补给，这种补给关系，称为越流补给。

在上述越流系统中，第二含水层为开采层，上下相邻的含水层为补给层。

综合上述条件，可得定解问题为

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+f(x,y,t)-W(x,y,t) \\
\qquad\qquad (-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty,\ t>0) \\
u\big|_{t=0}=0 \qquad (-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty) \\
u\big|_{x^2+y^2\to 0}=0 \qquad (t>0)
\end{cases}
$$

其中

$$f(x,y,t)=\varepsilon\frac{M}{\mu^*}\left(或\ \varepsilon\frac{\bar{h}}{\mu}\right)$$

$$W(x,y,t)=\frac{a^2}{B_0^2}u$$

$$\varepsilon\begin{cases}\dfrac{Q_{总}}{F} & (-L<x<L,\ -B<y<B)\\ 0 & 其他地区\end{cases}$$

现应用汇面的方法，假定在无边界（无限平面）含水层中，以具有无限个固定流量的按面状均匀分布的汇点所形成的汇面来代替实际上均匀分布的井群（即面状井）进行工作，而这些汇点的总和流量却等于每个实际井流量的总和，这样当汇面经过$d\tau$时刻工作后，从含水层中释出的水量，通过汇面单位面积上的抽水量应为$(Q_{总}/F)d\tau$，并且认为在整个开采过程中，单位开采率$\varepsilon=Q_{总}/F$是保持不变的，则应用分离变量法，解上述偏微分方程后❶即得

$$U=\int_0^t\frac{f(\xi,\eta,\tau)}{4\pi a^2(t-\tau)}e^{-\frac{a^2}{B_0^2}(t-\tau)}d\tau\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta \qquad (1)$$

根据本题（图2）的假设条件，可知面状井的工作范围由$-L$到L，$-B$到B，故得

$$单位开采率\ \varepsilon=\frac{Q_{总}}{4LB}$$

$$流量函数\ f(\xi,\eta,\tau)=\varepsilon\frac{M}{\mu^*}=\frac{Q_{总}}{4LB}\ \frac{a^2}{K}=常量$$

把上述数值代入式（1）中，即得有越流补给时流向长方形面状井的地下水不稳定流计算公式为

$$u=\frac{Q_{总}}{4\pi K}R_{A-1} \qquad (2)$$

R_{A-1}为水流阻力系数，有越流时

❶ 解法见《地下水非稳定流有限单元计算方法——'BT'法》，1982年。

$$R_{A-1}=\frac{1}{4LB}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)}e^{-\frac{a^2}{B_0^2}(t-\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int_{-L}^{L}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\int_{-B}^{B}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta \qquad (3)$$

无越流时（$B_0^2\to\infty$），

$$R_{A-1}=\frac{1}{4LB}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)}d\tau\int_{-L}^{L}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\int_{-B}^{B}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta \qquad (4)$$

为了便于计算，现设

$$\omega=\frac{t-\tau}{t};\quad \alpha_0=\frac{a^2t}{B_0^2};\quad \alpha_B=\sqrt{\frac{a^2t}{B^2}};\quad \alpha_L=\sqrt{\frac{a^2t}{L^2}};$$

$$\beta=\frac{B}{L};\alpha_L^2=\beta^2\alpha_B^2;\quad \overline{x}=\frac{x}{L};\quad \overline{y}=\frac{y}{B};\quad \overline{\xi}=\frac{\xi}{L};\quad \overline{\eta}=\frac{\eta}{B}$$

把上述比例系数代入式（3）和（4）中，可得改变后水流阻力系数R_{A-1}的计算公式为

有越流时，水流阻力系数

$$R_{A-1}(\alpha_0,\beta,\alpha_B,\overline{x},\overline{y})=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{\omega}e^{-\alpha_0\omega}d\omega\times$$

$$\times\int_{-1}^{+1}e^{-\frac{(\overline{x}-\overline{\xi})^2}{4\beta^2\alpha_B^2\omega}}d\overline{\xi}\times$$

$$\times\int_{-1}^{+1}e^{-\frac{(\overline{y}-\overline{\eta})^2}{4\alpha_B^2\omega}}d\overline{\eta} \qquad (5)$$

无越流时（$\alpha_0=0$），水流阻力系数

$$R_{A-1}(0,\beta,\alpha_B,\overline{x},\overline{y})=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{\omega}d\omega\int_{-1}^{+1}e^{-\frac{(\overline{x}-\overline{\xi})^2}{4\beta^2\alpha_B^2\omega}}d\overline{\xi}\times$$

$$\times\int_{-1}^{+1}e^{-\frac{(\overline{y}-\overline{\eta})^2}{4\alpha_B^2\omega}}d\overline{\eta} \qquad (6)$$

上述水流阻水系数R_{A-1}的计算公式（5）和（6）虽很复杂，但读者应用时已不需要亲自去运算，本书已把它编成为源程序（A），

并应用电子计算机计算了一系列R_{A-1}数值，列于附表（A）中，计算时，只需根据$\alpha_0, \beta, \alpha_B, \overline{x}, \overline{y}$等五个变量，由附表（A）中查得$R_{A-1}$值，代入式（2）中计算，即可求得计算区地下水预报数值。

由于计算座标中心放在面状井中心（见图2），故各象限的R_{A-1}值都是对称相等的。

（二）流向圆形面状井的地下水不稳定流计算

设有一个半径为R_0的圆形面状井，在无边界含水层中工作（见图3），面状井由n个均匀分布的完整井组成，其他越流条件与（一）相同。

综合上述条件，可得定解问题为

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+f(r,t)-W(r,t) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (0\leqslant r<\infty,\ t>0) \\
u\big|_{t=0}=0 \qquad\qquad (0\leqslant r<\infty) \\
u\big|_{r\to\infty}=0 \qquad\qquad (t>0)
\end{cases}
$$

其中 $f(r,t)=\varepsilon\dfrac{M}{\mu^*}\left(\text{或}\varepsilon\dfrac{\overline{h}}{\mu}\right)$

$$W(r,t)=\frac{a^2}{B_0^2}u$$

$$\varepsilon\begin{cases}\dfrac{Q_{\text{总}}}{\pi R_0^2} & (0<r<R_0)\\ 0 & (r>R_0)\end{cases}$$

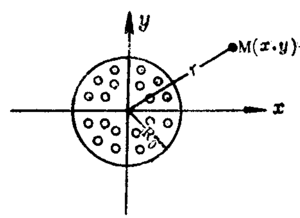


图 3

应用分离变量法，解上述偏微分方程后，即得有越流补给时流向圆形面状井地下水不稳定流的计算公式为

$$u=\frac{Q_{\text{总}}}{4\pi K}R_{A-2} \tag{7}$$

有越流时，水流阻力系数

$$R_{A-2}(\alpha_0,\overline{r},\alpha)=\int_0^1\frac{1}{\omega}e^{-\alpha_0\omega}d\omega\int_0^1\frac{2\overline{\rho}}{\pi}d\overline{\rho}\times$$

$$\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{(\bar{r}^2+\bar{\rho}^2-2\bar{r}\bar{\rho}\sin\phi)}{4\alpha\omega}}d\phi \qquad (8)$$

无越流时，水流阻力系数

$$R_{A-2}(0,\bar{r},\alpha)=\int_0^1\frac{1}{\omega}d\omega\int_0^1\frac{2\bar{\rho}}{\pi}d\bar{\rho}\times$$

$$\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{(\bar{r}^2+\bar{\rho}^2-2\bar{r}\bar{\rho}\sin\phi)}{4\alpha\omega}}d\phi \qquad (9)$$

式中 $\alpha_0=\frac{a^2t}{B_0^2}$； $\bar{r}=\frac{r}{R_0}$； $\alpha=\frac{a^2t}{R_0^2}$

上面公式已编成为源程序（A）。

如已知r值（见图3，计算点M到圆中心点的距离)，就可以根据α_0，$\bar{r}$，α等三个变量，由附表（A）中查得R_{A-2}值，代入公式(7)中进行计算

以上各式中符号说明如下：

$Q_总$——面状井总流量（米^3/天)；

K——渗透系数（米/天)；

M——含水层厚度（米)；

a^2——压力传导系数（米^2/天)；

μ——给水度；

μ^*——弹性给水度；

t——不稳定开采时间（天)；

x,y——计算点M的座标值(米)；

B——面状井宽度之半(米)；

L——面状井长度之半(米)；

B_0^2——越流阻力系数(米^2)；

R_0——圆形面状井半径(米)；

r——计算点M到圆形中心的距离(米)；

R_{A-1}——长方形面状井水流阻力系数；

R_{A-2}——圆形面状井水流阻力系数；

u——水头函数。

对于越流阻力系数 B_0^2：

上层有越流时，

$$B_0^2=\frac{KMM_1}{K_1}$$

下层有越流时，

$$B_0^2=\frac{KMM_2}{K_2}$$

上下层都有越流时，

$$B_0^2=\frac{KMM_1}{K_1+\frac{M_1}{M_2}K_2}$$

式中 M_1,M_2——上下弱透水层厚度（米）；

K_1,K_2——上下弱透水层渗透系数（米/天）。

对于水头函数 u：

承压水计算时，

$$u=MS$$

无压水计算时，

$$u=\frac{1}{2}(h_0^2-h^2)\ \text{（此时只有无越流计算）}$$

承压-无压水计算时，

$$u=\frac{1}{2}[(2H_0-M)M-h^2]$$

式中 S——经过开采时间 t 后，M(x,y) 点的水位降深（米）；

H_0和h_0——开采前，M(x,y)点的原始水头和含水层厚度（米）；

h——经过开采时间 t 后，M(x,y)点的含水层厚度（米）。

§2 直线边界含水层有越流补给时流向面状井的地下水不稳定流计算

在自然界中，含水层往往被不透水断层所穿通或被河流切

割，因而形成了直线边界含水层，面状井如果布置在直线边界（断层或河流）附近，当其工作时，流向面状井的地下水流不仅受含水层的岩性、厚度等因素影响，而且还受边界条件的影响，因此上节的公式已不能应用，需要采用渗流理论中映射和叠加的方法来解决问题。

直线边界可分为阻水边界和供水边界两大类。下面仅就长方形面状井对计算方法进行讨论。

（一）阻水边界附近长方形面状井的地下水不稳定流计算

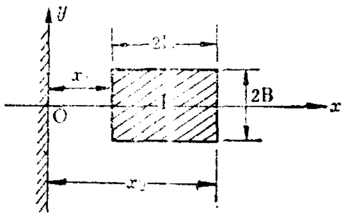


图 4

现假定阻水边界附近的均质含水层中，有一个面状井在工作（见图4），面状井由n个均匀分布的完整井组成，其他条件均与上节所述者相同。

在平面上，我们取y轴与直线阻水边界重合，x轴通过面状井的中心垂直阻水边界，面状井距边界的距离为x_1及x_2（图5）。

根据渗流理论，如要把边界附近的面状井当作汇面来看，必须采用映射的方法。所谓映射法，乃是相对某一边界面来映射实际面状井（开采井群或灌水井群），使得在边界另一边，有一个对称的、强度相等的虚构面状井（见图5）来代替边界的作用，以保持原来的水流条件不改变。经过这样映射后，平面上好象去掉了边界，两个面状井（实际的为I，虚构的为II）犹如在无限平面上工作一样。在这种情况下，就可以以两个汇面的作用来代替实际的和虚构的面状井的作用，平面上任意点M(x,y)的势（差）就可以用叠加的方法进行计算。

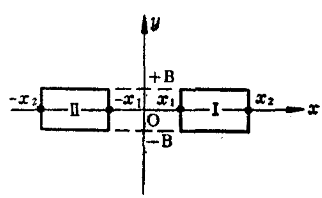


图 5

由图5可知，经过映射后，汇面I（实际面状井I）对M(x,y)点产生的势（差）u_{I}，根据公式（1）可得

$$u_{\mathrm{I}}=\int_{0}^{t}\frac{f(\xi,\eta,\tau)}{4\pi a^{2}(t-\tau)}e^{-\frac{a^{2}}{B_{0}^{2}}(t-\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\int_{-B}^{B}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta \qquad (10)$$

汇面Ⅱ（虚构的面状井Ⅱ）对M(x,y) 点产生的势（差）u_{II}为

$$u_{\mathrm{I}}=\int_{0}^{t}\frac{f(-\xi,\eta,\tau)}{4\pi a^{2}(t-\tau)}e^{-\frac{a^{2}}{B_{0}^{2}}(t-\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int_{-x_2}^{-x_1}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\int_{-B}^{B}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta \qquad (11)$$

现以φ换$-\xi$，代入上式中，则得

$$u_{\mathrm{II}}=\int_{0}^{t}\frac{f(\varphi,\eta,\tau)}{4\pi a^{2}(t-\tau)}e^{-\frac{a^{2}}{B_{0}^{2}}(t-\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int_{x_2}^{x_1}e^{\frac{-(x+\varphi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d(-\varphi)\int_{-B}^{B}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta \qquad (12)$$

为了与式（10）有相同的符号，在上式中又以ξ换φ，则得

$$u_{\mathrm{II}}=\int_{0}^{t}\frac{f(\xi,\eta,\tau)}{4\pi a^{2}(t-\tau)}e^{-\frac{a^{2}}{B_{0}^{2}}(t-\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\int_{-B}^{B}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta \qquad (13)$$

由此可得，两个汇面（两个面状井）对M(x,y) 点产生的势（差）叠加为

$$u=u_{\mathrm{I}}+u_{\mathrm{II}}=\int_{0}^{t}\frac{f(\xi,\eta,\tau)}{4\pi a^{2}(t-\tau)}e^{-\frac{a^{2}}{B_{0}^{2}}(t-\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)d\xi\times$$

$$\times\int_{-B}^{B}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta \qquad (14)$$

根据本题的条件，可知

$$单位开采率\quad \varepsilon=\frac{Q_{总}}{4LB}$$

$$f(\xi,\eta,\tau)=\frac{Q_{总}}{4LB}\cdot\frac{a^2}{K}=常量。$$

把上述数值代入（14）式，即得直线阻水边界有越流补给时流向长方形面状井的地下水不稳定流计算公式

$$u=\frac{Q_{总}}{4\pi K}R_{B-1} \tag{15}$$

式中 R_{B-1}——水流阻力系数，有越流时，

$$R_{B-1}=\frac{1}{4LB}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)}e^{-\frac{a^2}{B_0^2}(t-\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int_{x_1}^{x_2}(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}})d\xi\times$$

$$\times\int_{-B}^{B}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta \tag{16}$$

因 $x_2=x_1+2L$，除以 L 后，得

$$\frac{x_2}{L}=\frac{x_1}{L}+2=\overline{x_1}+2$$

并把上节的变换量代入上式后，即得有越流时，水流阻力系数

$$R_{B-1}(\alpha_0,\beta,\overline{x_1},\alpha_B,\overline{x},\overline{y})$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{\omega}e^{-\alpha_0\omega}d\omega\int_{\overline{x_1}}^{\overline{x_1}+2}(e^{-\frac{(\overline{x}-\overline{\xi})^2}{4\beta^2\alpha_B^2\omega}}+e^{-\frac{(\overline{x}+\overline{\xi})^2}{4\beta^2\alpha_B^2\omega}})d\overline{\xi}\times$$

$$\times\int_{-1}^{+1}e^{-\frac{(\overline{y}-\overline{\eta})^2}{4\alpha_B^2\omega}}d\overline{\eta} \tag{17}$$

当上式中越流系数 $\alpha_0=0$ 时，即得无越流时的水流阻力系数 $R_{B-1}(0,\ \beta,\overline{x_1},\alpha_B,\overline{x},\overline{y})$ 的计算公式。