高等學校教學用書

數學物理方程

上 册

A. H. 吉洪諾夫
A. A. 薩馬爾斯基 著

高等教育出版社

高等學校教學用書

數學物理方程

上册

A.H.吉洪諾夫　A.A.薩馬爾斯基著
黃克歐等譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的吉洪諾夫（А. Н. Тихонов）與薩馬爾斯基（А. А. Самарский）合著的"數學物理方程"（Уравнения математической физики）的1953年修訂第二版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲國立大學物理系及數學物理系教科書。

中譯本分上、下二册出版。

本書上册是由黃克歐、黃壽恒、郭可詹、黃盛清、曹俊翻譯的。譯後並經黃克歐、黃壽恒校閱。

數學物理方程

上　册

А. Н. 吉洪諾夫, А. А. 薩馬爾斯基著

黃克歐等譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

書號501（譯440）　開本850×1168 1/32　印張13 12/16　字數360,000

一九五六年一月上海第一版

一九五六年四月上海第二次印刷

印數3,501—6,500　定價(8) ￥1.50

上 册 目 錄

二版序言…………………………8
初版序言…………………………9
第一章　偏微分方程分類…………………………11
§1. 二階偏微分方程的分類…………………………11
1. 二自變量的微分方程…………………………11
2. 多自變量二階方程的分類…………………………18
3. 常係數線性方程的典則形式…………………………20
第一章習題…………………………22
第二章　雙曲線型方程…………………………24
§1. 可化爲雙曲線型方程的最簡單的問題. 邊界問題的提法…………………………24
1. 弦的微小横振動方程…………………………24
2. 桿與弦的縱振動方程…………………………28
3. 弦振動的能量…………………………29
4. 導體中電振盪方程之推演…………………………31
5. 膜的横振動…………………………32
6. 流體動力學方程與聲學方程…………………………34
7. 邊界條件與初始條件…………………………39
8. 一般問題的簡化…………………………44
9. 在多變量情况下的邊界問題的提法…………………………45
10. 唯一性定理…………………………46
習題…………………………49
§2. 傳播波法…………………………51
1. 達蘭貝爾公式…………………………51
2. 物理意義…………………………53
3. 解的穩定性…………………………59
4. 半有界直線與延拓法…………………………62

5. 關於有界線段的問題……68
6. 波的瀰散……72
7. 振動的積分方程……76
8. 沿特徵線的間斷的傳播……79
習題……80
§3. 分離變量法……84
1. 弦的自由振動方程……84
2. 解的意義……89
3. 用駐波疊加表示任意的振動……93
4. 非齊次方程……98
5. 一般的第一邊界問題……104
6. 穩定的非齊次的邊界問題……105
7. 沒有初始條件的問題……107
8. 集中的力……112
9. 分離變量法的一般程序……115
習題……121
§4. 在特徵線上給有數值的問題……124
1. 問題的提法……124
2. 逐次逼近法……126
習題……131
§5. 一般的雙曲線型線性方程解法……131
1. 互伴微分運算子……131
2. 解的積分形式……133
3. 黎曼函數的物理意義……136
4. 常係數方程……139
第二章習題……143
第二章附錄……144
I. 關於樂器的弦振動……144
II. 關於桿的振動……147
III. 有載荷的弦的振動……151
1. 問題的提法……151
2. 有載荷的弦的固有振動……153
3. 一端繫有重量的弦……157
4. 固有值的矯正……157

IV. 氣體動力學方程和衝擊波理論 …… 159
1. 氣體動力學方程．能量守恆定律 …… 159
2. 衝擊波．動力學的相容條件 …… 161
3. 弱性間斷 …… 167
V. 氣體吸收作用的動力學 …… 171
1. 描述氣體吸收作用過程的方程 …… 171
2. 漸近解 …… 175
VI. 物理上的類比 …… 182

第三章 拋物線型方程 …… 187
§1. 可化爲拋物線型方程的最簡單問題．邊界問題的提法 …… 187
1. 熱傳播的線性問題 …… 187
2. 擴散方程 …… 191
3. 在空間的熱傳播 …… 192
4. 邊界問題的提法 …… 195
5. 最大値原理 …… 201
6. 唯一性定理 …… 204
7. 無窮直線上的唯一性定理 …… 207
§2. 分離變量法 …… 208
1. 齊次邊界問題 …… 208
2. 源函數 …… 213
3. 帶有間斷初始條件的邊界問題 …… 215
4. 非齊次熱傳導方程 …… 222
5. 一般的第一種邊界問題 …… 225
習題 …… 227
§3. 無窮直線上的問題 …… 229
1. 無窮區域的源函數 …… 229
2. 無窮直線上的熱傳播 …… 237
3. 半有界直線上的邊界問題 …… 247
§4. 沒有初始條件的問題 …… 255
第三章習題 …… 259
第三章附錄 …… 261
I. 溫度波 …… 261
II. 放射性蛻變對地殼溫度的影響 …… 265

III. 熱傳導理論中的相似法 …… 270
1. 無窮直線上的源函數 …… 271
2. 非線性熱傳導方程的邊界問題 …… 273
IV. 凍結問題 …… 274
V. 愛因斯坦-庫爾摩哥羅夫方程 …… 280
VI. δ—函數 …… 284
1. δ-函數的定義 …… 284
2. δ-函數之展開爲福氏級數 …… 287
3. δ-函數在源函數的作法上的應用 …… 289

第四章 橢圓型方程 …… 293

§1. 能化爲拉普拉斯方程的問題 …… 293
1. 穩定熱場. 邊界問題的提法 …… 293
2. 液體的勢流. 穩定電流與靜電場的勢 …… 294
3. 曲線坐標系的拉普拉斯方程 …… 296
4. 拉普拉斯方程的一些特解 …… 300
5. 調和函數與複變量的解析函數 …… 301
6. 逆矢徑變換 …… 304

§2. 調和函數的一般性質 …… 305
1. 格林公式. 解的積分表示式 …… 306
2. 調和函數的一些基本性質 …… 311
3. 第一邊界問題的唯一性與穩定性 …… 314
4. 帶有間斷的邊界條件的問題 …… 316
5. 孤立奇點 …… 317
6. 調和函數在無窮遠處的正則性 …… 320
7. 外邊界問題. 二維及三維問題的解的唯一性 …… 321
8. 第二邊界問題. 在無窮遠處的正則性的條件. 唯一性定理 …… 324

§3. 用分離變量法解決關於最簡單區域的邊界問題 …… 327
1. 圓的第一邊界問題 …… 328
2. 泊瓦松積分 …… 333
3. 間斷邊界值的情形 …… 336

§4. 源函數 …… 338
1. 方程 $\Delta u=0$ 的源函數及其基本性質 …… 338
2. 靜電源像法與球的源函數 …… 343

3. 圓的源函數……346
4. "半空間"的源函數……347
§5. 勢論……349
1. 體勢……349
2. 平面問題. 對數勢……351
3. 旁義積分……353
4. 體勢的一階導函數……361
5. 體勢的二階導函數……364
6. 面勢……368
7. 李雅浦諾夫曲面與曲線……372
8. 雙層勢的間斷性……376
9. 單層勢的性質……380
10. 面勢對解決邊界問題的應用……383
11. 與邊界問題對應的積分方程……388
§6. 有限差分法……392
1. 關於拉普拉斯方程的有限差分法的概念……392
2. 用逐次逼近法求有限差分方程之解……395
3. 模型法……398
第四章習題……399
第四章附錄……401
I. 體勢的漸近表達式……401
II. 靜電學上的問題……405
III. 電學勘探法的基本問題……411
IV. 矢量場之確定……418
V. 保角變換法對靜電學的應用……421
VI. 保角變換法對流體動力學的應用……425
VII. 雙調和方程……431

第二版序言

初版中所發現的一些排印錯誤及不正確之處，在本版內業經消除。若干章節並略施修訂。變動最多者爲特殊函數一篇的開端及第四章。並編寫了新的第六章附錄，以說明熱傳導方程的有限差分方法。

對 В. И. 斯米爾諾夫所提供的許多寶貴意見，對 А. Г. 斯維施尼珂夫在籌備第二版時的幫助，作者在此深致謝忱。

А. 吉洪諾夫。

А. 薩馬爾斯基。

初版序言

本書是供物理系學生用作教本而編寫的。

數學物理問題的範圍是與各種物理過程的研究緊密地聯繫着的。這些過程包括流體動力學、彈性理論、電動力學等部門中所研究的各種現象。在這些研究中發生的數學問題有許多共同之處，而這些問題就構成了數學物理研究的對象。

這一門科學所特有的研究方法，就本質上說，是數學方法。但是數學物理學問題的提法，因與物理學問題的研究有密切的聯繫，它們遂具有本身獨具的特點。例如一個過程的開始和終結階段，往往帶有性質不同的特點，因而需要採用不同的數學方法。

數學物理學問題的範圍極其廣泛。本書中只研究可化爲偏微分方程的數學物理問題。

作者力求使本書的取材和論述適應典型物理過程的特點，因此取材係依照方程的基本類型來編排。

每一類型方程的研究，都從可化爲所欲研究的該類型方程的最簡單物理問題開始。對各個問題的數學提法，最簡單問題解法的嚴格講述，及所得結果的物理意義均予以特別的注意①。每章中均附有習題，其目的主要爲培養運算技術的熟練。某些習題本身也具有物理的趣味。

但本書正文內所包括的一些最簡單的問題不能充分表明該類問題的多樣性，也不能充分說明數學物理學的作用和地位。因此每章之末

① 在課堂上講述數學物理學課程時，我們不但用口述方式闡明所得結果的物理意義，而且在可能時也用物理模型來說明數學的結論。

均有附錄，其中載有應用正文內所述方法來解決物理和技術方面各種問題的例子，並列有超出正文範圍外的例題。無疑的，這種例題的選擇是大有伸縮餘地的。

本書只包括數學物理學方法這門課程中的一部分教材。書中不包含積分方程和變分法。近似法的論述也不夠完整。

作者認為本書可以只講上述材料，以便能早日出版。

本書是根據 A. H. 吉洪諾夫在莫斯科大學物理系講授十年以上的講稿編寫的。這些講稿的內容曾部分地刊載於 1948—1949 年刊印的講義中。講義的材料在本書中已被擴充並予以徹底的改編。

作者得以在此對作者的學生及工作上的同志 A. Б. 瓦西里葉瓦，B. Б. 格拉斯珂，B. A. 伊林，A. B. 穆齊亞諾夫，O. И. 帕尼契，Б. Л. 洛史傑斯涅斯基，A. Г. 斯維施尼珂夫及 Д. Н. 柴塔葉夫表致謝忱而感到愉快，若無上述諸同志的幫助，作者未必能使本書在短期內付印，又 Ю. Л. 拉賓諾維奇曾親閱原稿並提供許多寶貴的意見，在此也一併致謝。

A. 吉洪諾夫。

A. 薩馬爾斯基。

第一章　偏微分方程分類

數學物理的許多問題可化爲偏微分方程，尤以二階偏微分方程最爲常見。在本章我們將討論這種方程的分類。

§1. 二階偏微分方程的分類

1. 二自變量的微分方程　讓我們先給出一些必要的定義。

未知函數 $u(x, y)$ 與它的一階及二階偏導函數之間的關係式①：

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})=0$$

叫做含有二自變量 x, y 的二階偏微分方程。含更多個自變量的方程，可以仿照此法寫出。

假使方程的形式爲

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F_1(x, y, u, u_x, u_y)=0, \qquad (1)$$

式子裏 a_{11}, a_{12}, a_{22} 只是 x, y 的函數，那麼這方程就叫做：關於最高階導函數的線性方程。

假設係數 a_{11}, a_{12}, a_{22} 不但是 x, y 的函數，而且像 F_1 一樣，也是 x, y, u, u_x, u_y 的函數，這種方程叫做準線性方程。

假設一方程不但對於最高階導函數 u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}，而且對於函數 u 及其一階導函數 u_x, u_y 都是一次，即

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0, \qquad (2)$$

---

① 我們採用如下的導數符號：

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}, u_y=\frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}。$$

式子裏 $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ 只是 x, y 的函數，那麼它就叫做線性方程。假設方程(2)的係數與 x, y 無關，則它就是常係數線性方程。假設 $f(x, y)=0$，那麼這方程就叫齊次方程

藉助於可逆的變量變換

$$\xi=\varphi(x, y), \quad \eta=\psi(x, y),$$

我們得到相當於原方程的新方程。很自然會提出一個問題：怎樣選取 ξ, η 方可使含這種新變量的方程有最簡單的形式呢?

在這一段裏，我們就二自變量 x, y 關於最高階導函數的線性方程(1)，對剛才提出的問題，給以答覆。

把導函數變換爲對新變量的導函數，得到：

$$\left.\begin{aligned}
u_x&=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x,\\
u_y&=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y,\\
u_{xx}&=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx},\\
u_{xy}&=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy},\\
u_{yy}&=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}\text{。}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

把(3)式中這些導函數的值代入(1)，就有：

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi}+2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta}+\bar{a}_{22}u_{\eta\eta}+\bar{F}=0, \quad (4)$$

式子裏
$$\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,$$
$$\bar{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+a_{22}\xi_y\eta_y,$$
$$\bar{a}_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2,$$

而函數 $\bar{F}$ 與二階導函數無關。應注意如果原方程是線性的，即

$$F(x, y, u, u_x, u_y)=b_1u_x+b_2u_y+cu+f,$$

則 $\bar{F}$ 的形狀如下：

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)=\beta_1u_\xi+\beta_2u_\eta+\gamma u+\delta,$$

亦即 $\bar{F}$ 這方程仍然是線性方程①。

① 要注意，假設變量變換是線性的，則 $\bar{F}=F$，這由於在公式(3)內，ξ 及 η 的二階導函數等於零，以致 $\bar{F}$ 不會得到由變換二階導函數所產生的添加項。

選取變量 ξ 和 η 時使係數 $\bar{a}_{11}$ 等於零。於是讓我們考慮一階偏微分方程

$$a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=0\ 。\tag{5}$$

設 $z=\varphi(x, y)$ 是這方程的任何一個特解，則令 $\xi=\varphi(x, y)$ 時，係數 $\bar{a}_{11}$ 顯然要等於零。可見，上面所提出的選取新自變量的問題，是與求方程(5)的解有關係的。

讓我們證明下面兩個引理：

1. 假設 $z=\varphi(x, y)$ 是方程

$$a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=0$$

的特解，則關係式 $\varphi(x, y)=C$ 是常微分方程

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0\tag{6}$$

的一般積分。

2. 假設 $\varphi(x, y)=C$ 是常微分方程

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$$

的一般積分，則函數 $z=\varphi(x, y)$ 滿足方程(5)。

讓我們來證明第一個引理。既然函數 $z=\varphi(x, y)$ 滿足方程(5)，所以等式

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=0\tag{7}$$

是恆等式，這是因爲這解 $z=\varphi(x, y)$ 的定義域內全體 x, y 都滿足這個等式。若由隱式 $\varphi(x, y)=C$ 所確定的函數 y 滿足方程(6)，則關係式 $\varphi(x, y)=C$ 就是方程(6)的一般積分。

現令 $$y=f(x, C)$$

是由隱式 $\varphi(x,y)=C$ 所確定的函數，於是有

$$\frac{dy}{dx}=-\left[\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}\right]_{y=f(x, C)},\tag{8}$$

式子裏括號與指標 $y=f(x, C)$ 表示必須用 $f(x, C)$ 替代方程(8)右端的變量 y。因爲

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=$$
$$=\left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\right]_{y=f(x,C)}=0,$$

而方括號內的式子，不僅當 $y=f(x, C)$ 時，而且對 x, y 一切的值，都等於零，所以推得 $y=f(x, C)$ 滿足方程(6)。

再來證明第二個引理。令 $\varphi(x, y)=C$ 是方程(6)的一般積分，讓我們證明對於任意的一點 (x, y) 都有

$$a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0。\tag{7}$$

現令 (x_0, y_0) 爲任一已給點，假使我們能證明在這點等式(7)成立，則由於 (x_0, y_0) 是任意取的，可以推知等式(7)是恆等式，於是函數 $\varphi(x, y)$ 就是方程(7)的解。過點 (x_0, y_0) 作方程(6)的積分曲線，假定 $\varphi(x_0, y_0)=C_0$，並且考慮曲線 $y=f(x, C_0)$。顯然，$y_0=f(x_0, C_0)$。對於這曲線上所有的點均有：

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=$$
$$=\left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\right]_{y=f(x,C_0)}=0。$$

在最後的等式中，令 $x=x_0$ 卽得：

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0, y_0)+2a_{12}\varphi_x(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0)+a_{22}\varphi_y^2(x_0, y_0)=0,$$

這就是所要證明的[①]。

方程(6)叫做方程(1)的特徵方程，它的積分叫做特徵線。

假設 $\varphi(x,y)=$ 常數，是方程(6)的一般積分，則令 $\xi=\varphi(x, y)$ 時，$u_{\xi\xi}$ 的係數就變爲零。假設 $\psi(x, y)=$ 常數是方程(6)的另一個與 $\varphi(x, y)$ 無關的一般積分，則令 $\eta=\psi(x, y)$ 時，$u_{\eta\eta}$ 的係數也變爲零。

① 上面所建立的方程(5)與(6)的關係，相當於一階線性偏微分方程與常微分方程組之間熟知的關係。(參看 Степанов 著：微分方程——原書 1937 版，287 頁；Смирнов 著：高等數學教程孫念增譯本，第二卷第一分册，76 頁)。把方程(5)的左邊分解爲兩個線性微分式子的乘積，就可以證實它。

分解方程(6)為兩個方程：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}。 \tag{10}$$

根號內的式子的正負號，可用來確定下列方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F=0 \tag{1}$$

的各種類型。我們將稱這個方程在點 M 是：

雙曲線型，若在點 M，$a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$；

橢圓型，若在點 M，$a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$；

拋物線型，若在點 M，$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$①。

不難驗證關係式

$$\bar{a}_{12}^2-\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}=(a_{12}^2-a_{11}a_{22})(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x)^2$$

的正確性，由此推知方程類型在變量變換中的不變性。但對於定義域中不同的點，方程可能屬於不同的類型。

讓我們考慮區域 G，假設在它的所有的點上，方程是屬於同一類型的。經過區域 G 的每一點有二特徵線，而對於雙曲線型方程是兩條相異的實特徵線，對於橢圓型方程是兩條複數的而且互異的特徵線，對於拋物線型方程，這兩條實特徵線彼此重合。

我們分別研討上述的每一種情形：

1. 對於雙曲線型方程 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$，且方程(9)與(10)的右端是兩個相異的實值，它們的一般積分 $\varphi(x, y)=C$ 與 $\psi(x, y)=C$ 定出實特徵線族。令

$$\xi=\varphi(x, y), \quad \eta=\psi(x, y), \tag{11}$$

用 $u_{\xi\eta}$ 的係數除方程(4)以後，把它化為下列形式

$$u_{\xi\eta}=\Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

① 這些名稱，採自二次曲線理論。

此處
$$\Phi = -\frac{\overline{F}}{2\overline{a}_{12}},$$
這叫做雙曲線型方程的典則形式①。

我們時常也用第二種典則形式。令
$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta,$$
即
$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$
式子裏，α 與 β 是新變量。於是
$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \quad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})。$$
因此，方程(4)化爲下列形狀：
$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1, \quad (\Phi_1 = 4\Phi)。$$

2．對於拋物線型方程 $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$，方程(9)與(10)相重合，於是我們得到方程(6)的一個一般積分：$\varphi(x,y) =$ 常數。在這種情況下，假設
$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$
此處 $\eta(x, y)$ 是與 φ 無關的任一函數。這樣選取變量後，由於 $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$，所以，係數

① 爲了表明用函數 φ 與 ψ 以引入新變量 ξ 與 η 的可能性，必須證實此二函數的無關性，而它的充分條件就是對應的函數行列式不等於零。假定函數行列式
$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$
在某一點 M 處爲零，則二行成比例，亦即
$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{\psi_x}{\psi_y},$$
但是，這是不可能的，因爲
$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad 及 \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$
$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0)$$
（此處，我們假定了 $a_{11} \neq 0$，但這不會限制一般情形的）。於是 φ 與 ψ 的無關性被證實了。