理论力学教程 下册

（物理专业用）

〔苏〕И. И. 奥里霍夫斯基 著

阎金铎 李松岩 译

高等教育出版社

内 容 简 介

本书根据莫斯科大学出版社出版的 И. И. 奥里霍夫斯基著《理论力学教程》（物理专业用）1978 年第三版译出。原书经苏联高等教育部审定为高等学校物理专业的教科书。

该书较系统地叙述了理论力学和连续介质力学的基本理论和基础知识。对伽利略-牛顿力学的基本概念和定律，动量、动量矩和能量的变化及守恒定律，广义有势力的拉格朗日、哈密顿和哈-雅方程，以及在统一基础上处理理想流体、粘性流体和弹性体的连续介质力学规律等，都较为重视。对二体问题，散射的经典理论，非惯性系中动量、动量矩、能量定理，在有势力、回转力和耗散力作用下系统的线性振动理论，弱非线性系的克雷洛夫-波戈留波夫方法，运动方程的平均法等，都作了较详细的讨论。此外，书中还有大量关于电荷在已知电磁场中的运动、粒子散射、分子振动、非线性振动、磁流体动力学等方面的例题。

原书共十三章。中译本分上、下册出版。本书为下册，内容包括刚体动力学、哈密顿方程、连续介质力学的基本概念和基本定律、理想流体、粘滞流体和理想弹性体等六章

本书可作为高等学校物理专业及有关专业的教学参考书，亦可供有关科技人员学习参考。

理论力学教程

（物理专业用）

下 册

〔苏〕И. И. 奥里霍夫斯基 著

阎金铎 李松岩 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.5 字数 181 000

1988 年 9月第 1 版 1988 年 9 月第 1 次印刷

印数 00 001—2,08）

ISBN7-04-001929-9/O·688

定价 3.20 元

目 录

第二部分 连续介质力学基础

第八章　刚体动力学

前面(例如第一章)曾经指出，绝对刚体的概念在确定参照物中具有重要的作用。引入长度的标准也与刚体的概念有关。同时，在外力作用下，刚体运动的理论具有重要的意义。这个理论在实际中获得了非常广泛的应用；例如回转仪的运动、卫星的旋转等等问题的解决，都是以此理论为基础的。

§ 8.1　刚体运动方程

任何刚体都可以看作是这样一种质点系，这质点系中的诸质点彼此以长度不变而质量可忽略的细杆刚性地固连在一起(见本书上册 197 页)。换句话说，可以把刚体当作受有内理想约束的质点系。所以刚体自由度的数目小于相应自由质点系的自由度的数目。

只要知道固连于所研究刚体上的 S' 系的运动规律，就可以完全描述该刚体相对于某一参照系 S 的运动规律(见图 4.1 及图4.2)例如自由刚体(不受外约束的刚体)的运动规律由六个标量函数决定，即 S' 系原点矢径 $\mathbf{r}_{o'}(t)$ 的三个投影以及三个欧勒角 $\varphi(t)$、$\theta(t)$ 和 $\psi(t)$。

注意，动量变化定律及动量矩变化定律也适用于可视为质点系的自由刚体，而且这两个定律(由于自由刚体的诸点彼此刚性地固连在一起)将完全描述自由刚体的运动，也就是说，这两个定律就是运动方程①，只要指出以下一点就可证实这一结论：动量变化

① 对任意的质点系，应用动量变化定律和动量矩变化定律给不出系统运动的全部信息。

定律(2.103)和动量矩变化定律(2.111)是对于六个变数（即矢量 $\mathbf{r}_{o'}$ 的三个投影及 φ, θ, ψ 角）的六个二阶微分方程组。事实上，相对于固连在刚体上的 S' 系，刚体所有点的矢径都是常矢量，而所有点的速度均为零，也就是

$$\mathbf{r}'_i = x'_{i0}\mathbf{n}_{x'} + y'_{i0}\mathbf{n}_{y'} + z'_{i0}\mathbf{n}_{z'}, \mathbf{v}'_i = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,N), \tag{8.1}$$

式中 $\mathbf{r}'_i$ 和 $\mathbf{v}'_i$ 是刚体第 i 个点相对于 S' 系的矢径和速度；$\mathbf{n}_{x'}$、$\mathbf{n}_{y'}$、$\mathbf{n}_{z'}$ 是 S' 系笛卡儿坐标的单位矢；x'_{i0}、y'_{i0}、z'_{i0} 是矢量 $\mathbf{r}'_i$ 在 S' 系坐标轴上的恒定投影；而 N 是组成刚体的质点数目。所以相对于 S 系，刚体各点的矢径和速度分别等于[见(1.6)和(4.32)式]

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{o'} + \mathbf{r}'_i, \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \ (i=1,2,\cdots,N), \tag{8.2}$$

式中 $\mathbf{v}_{o'}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 分别是 S' 系的原点相对于 S 系的速度和 S' 系的角速度。

利用以上表达式或 § 4.7 中的关系式，可得

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_{o'} + m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_m, \mathbf{M} = \mathbf{r}_{o'} \times \mathbf{P} + m\mathbf{r}'_m \times \mathbf{v}_{o'} + \vec{\mathscr{M}}, \tag{8.3}$$

式中 $\mathbf{r}'_m$ 是刚体质心相对于 S' 系的矢径，而

$$\vec{\mathscr{M}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \tag{8.3'}$$

是动量矩的一部分，当 $\omega = 0$ 时这一部分为零（因此矢量 $\vec{\mathscr{M}}$ 可以称为刚体的**转动动量矩**）。这里应注意到，根据(8.1)式，在固连于刚体的 S' 系中，

$$\mathbf{v}'_m = 0, \quad \mathbf{P}' = 0, \quad \mathbf{M}' = 0. \tag{8.4}$$

在刚体理论中，矢量 $\mathbf{F}^e$ 和 $\mathbf{L}^e$ 的表达式和一般质点系理论中的形式相同[见(2.102)和(4.63)式]：

$$\mathbf{F}^e = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}^e_i, \mathbf{L}^e = \mathbf{r}_{o'} \times \mathbf{F}^e + \vec{\mathscr{L}}^e, \tag{8.5}$$

式中 $\vec{\mathscr{L}}^e = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}^e_i$.

所以，由(8.3)及(4.17)—(4.19)式可以看出，刚体的动量 $\mathbf{P}$ 依赖于 $\mathbf{v}_{o'}$ 和三个欧勒角及其导数，而刚体的动量矩 $\mathbf{M}$、外力之和 $\mathbf{F}^e$、外力矩之和 $\mathbf{L}^e$ 则除了依赖于上述诸量外还可能含有 $\mathbf{r}_{o'}$. 于是，刚体的动量和动量矩变化定律

$$\dot{\mathbf{P}}=\mathbf{F}^e, \qquad \dot{\mathbf{M}}=\mathbf{L}^e \tag{8.6}$$

中仅有的未知量是函数 $\mathbf{r}_{o'}$ 以及 φ、θ、ψ，从而以上两式就是自由刚体的运动方程。

如果刚体受有外约束，那么刚体的运动方程取以下形式[见(5.19)和(5.20)式]:

$$\dot{\mathbf{P}}=\mathbf{F}^e+\mathbf{R}^e, \qquad \dot{\mathbf{M}}=\mathbf{L}^e+\mathbf{L}_R^e, \tag{8.7}$$

式中 $\mathbf{R}^e$ 及 $\mathbf{L}_R^e$ 分别是所有外约束对物体的反作用力之和及所有这些约束的反作用力矩之和[求解(8.7)还应再给出加于刚体上的约束方程]。

注意，对固连在刚体上的 S' 系的选择是任意的，并影响外力矩 $\vec{\mathscr{L}}^e$ 的值①；仅当外力之和等于零这一特殊情况下，外力矩 $\vec{\mathscr{L}}^e$ 才与 S' 系原点 O' 的选择无关，也就是

$$\text{当} \mathbf{F}^e=0 \text{时}, \qquad \mathbf{L}^e=\mathscr{L}^e. \tag{8.8}$$

例如，当加在物体上的是力偶时就属于这种情况。力偶是指这样的两个力，二者大小相等指向相反而且在不同的作用线上(图8.1)。这时因为 $\mathbf{F}_2^e=-\mathbf{F}_1^e$，而 $\mathbf{r}_{21}=\mathbf{r}'_{21}$，所以

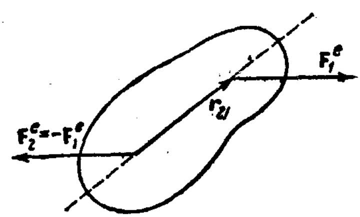

图 8.1

$$\mathbf{F}^e=\mathbf{F}_1^e+\mathbf{F}_2^e=0,$$

$$\mathbf{L}^e=\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1^e+\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2^e=\mathbf{r}_{21}\times\mathbf{F}_1^e=\vec{\mathscr{L}}^e.$$

---

① 只有标积 $\vec{\mathscr{L}}^e\cdot\mathbf{F}^e$[根据(8.5)这一标积等于 $\mathbf{L}^e\cdot\mathbf{F}^e$]与 O' 的选择无关。

应着重指出的是 S' 系的选择，当 S' 系反映了刚体的性质和问题的其他条件时，可以使问题的求解大大简化．例如，在求解自由刚体运动的问题时，宜于将 S' 系的原点选在刚体的质心上，因为这时

$$\mathbf{r}_{o'}=\mathbf{r}_m,\quad \mathbf{v}_{o'}=\mathbf{v}_m,\quad \mathbf{r}'_m=0, \tag{8.9}$$

而动量和动量矩的表达式则取以下简单的形式：

$$\mathbf{P}=m\mathbf{v}_{o'},\quad \mathbf{M}=\mathbf{r}_{o'}\times\mathbf{P}+\vec{\mathscr{M}}; \tag{8.10}$$

式中 $\vec{\mathscr{M}}$ 是物体相对于平动质心系 S_m 的转动动量矩［见(4.50)式］．这时，可用下述两个方程代替自由刚体的运动方程(8.6)；即刚体质心相对于 S 系的运动方程以及刚体相对于 S_m 系的转动动量矩的变化定律［见(2.102)和(4.55)式］：

$$m\ddot{\mathbf{r}}_m=\mathbf{F}^e,\quad \dot{\vec{\mathscr{M}}}=\vec{\mathscr{L}}^e. \tag{8.11}$$

如果刚体相对于 S 系有一个不动点，那么宜于将此点取为 S 系及 S' 系的原点．这时，

$$\mathbf{r}_{o'}=0,\ \mathbf{v}_{o'}=0, \tag{8.12}$$

而矢量 $\mathbf{P}$、$\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{L}^e$ 则由(8.3)式和(8.5)式分别等于

$$\mathbf{P}=m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'_m,\quad \mathbf{M}=\vec{\mathscr{M}},\ \mathbf{L}^e=\vec{\mathscr{L}}^e \tag{8.13}$$

(这时动量和动量矩完全由刚体相对于 S 系的转动所决定)．

如果刚体在均匀重力场中运动，那么外力之和及其力矩分别等于［见定义式(2.89)］

$$\mathbf{F}^e=\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{g}=m\mathbf{g},\ \mathbf{L}^e=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{g}=\mathbf{r}_m\times\mathbf{F}^e. \tag{8.14}$$

由此可见，在均匀重力场中，作用在刚体上的外力矩之和等于"作用"到质心上的合外力的力矩。根据(8.14)，对质心的力矩等于零，于是在均匀重力场中，自由刚体的运动方程取以下形式：

$$\ddot{\mathbf{r}}_m=\mathbf{g},\quad \dot{\vec{\mathscr{M}}}=0. \tag{8.15}$$

所以，如果自由刚体在均匀重力场中运动，则此刚体相对于 S_m 系

的动量矩是守恒的①.

在刚体平衡的情况下,$\mathbf{P}=0$, $\mathbf{M}=0$,所以作用在静止刚体上的力及其力矩应当满足以下方程[见(8.7)]:

$$\mathbf{F}^e+\sum_i \mathbf{R}_i^e=0,\ \mathbf{L}^e+\Sigma \mathbf{r}_i\times \mathbf{R}_i^e=0, \qquad (8.16)$$

式中 $\mathbf{R}_i^e$ 是作用在第 i 点上的约束力[方程(8.16)之外还应附加约束方程,或某些例如确定约束力方向的条件].

上述所有的刚体运动方程都能写成拉格朗日方程的形式。为了建立第二类拉格朗日方程,应该把刚体的动能、广义势和广义耗散力 Q^d 表为独立变量的函数。利用关系式(4.64)、(8.4)并考虑到 $T'=0$,即可得到

$$T=\frac{mv_{0'}^2}{2}+m\mathbf{v}_{o'}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_m')+\mathscr{T}. \qquad (8.17)$$

式中$\frac{mv_{0'}^2}{2}$是刚体仅作平动时的动能部分,$\mathscr{T}=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i')^2$是刚体仅作转动的动能部分,而 $m\mathbf{v}_{o'}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_m')$是既与平动有关又与转动有关的"混合"项。如果原点 O' 与刚体的质心重合,那么"混合"项在任何情况下都为零,而(8.17)则为[见(4.52)]

$$T=\frac{mv_m^2}{2}+\mathscr{T}, \qquad (8.18)$$

式中$\mathscr{T}$为刚体相对 S_m 系的**转动动能**。

由于刚体各点之间的距离是不变的,所以刚体的内能是恒定的,因此刚体的广义势$\mathscr{U}^e$ 等于刚体在外场中的势$\mathscr{U}$,也就是

$$\mathscr{U}=\mathscr{U}^e. \qquad (8.19)$$

将关系式(8.17)、(8.19)和欧勒运动学公式(4.18)联立,就可

① 对于在均匀重力场中运动的任意自由力学系统,公式(8.14)和方程(8.15)也成立,但是这时方程(8.15)不是运动方程。

求得刚体的拉格朗日量(拉格朗日函数)。如果把三个欧勒角和矢量 $\mathbf{r}_{o'}$ 在 S 系坐标轴上的三个投影作为自由刚体的独立坐标，并用这些独立坐标表示出 T、$\mathscr{U}^e$ 和 Q^d，那么由(5.77)即可得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_j}\right)-\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_j}\right)=Q_j^d \qquad (j=1,2,\cdots,6), \qquad (8.20)$$

式中 q_1、q_2、q_3 是矢量 $\mathbf{r}_{o'}$ 的三个投影，$q_4=\varphi, q_5=\theta, q_6=\psi$，而 $\mathscr{L}=T-\mathscr{U}^e$。如果在刚体上又加有完整理想约束，则仍可得到形如(8.20)的方程，但自由度数减少了.

例 8.1 均匀电场中的带电双原子分子.

质量分别为 m_1、m_2 并分别带 e_1、e_2 电荷的两个质点，联结在一个长为 l、质量可忽略的细杆上。这个“哑铃”在场强为 $\vec{\mathscr{E}}$ 的匀恒电场中运动。选择初始条件，使分子的运动发生在一个平行于场强 $\vec{\mathscr{E}}$ 的固定平面内。试求分子(“哑铃”)的运动方程以及细杆对质点的反作用(表示成广义坐标和广义速度的函数)。

令惯性系 S 的 Ox 轴沿着场强 $\vec{\mathscr{E}}$ 的方向，而 Oxy 平面与运动平面相重合(图 8.2)。S' 系的原点刚连在分子的质心上，$O'x'$ 轴沿着分子轴的方向，而 $O'x'y'$ 平面与 Oxy 平面相重合。把分子质心运动方程[见(8.11)]

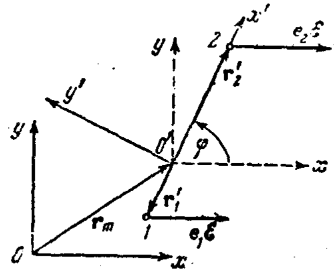

图 8.2

$$(m_1+m_2)\ddot{\mathbf{r}}_m=e_1\vec{\mathscr{E}}+e_2\vec{\mathscr{E}}$$

的左右两端投影到两个坐标轴上，则得

$$\ddot{x}_m=\frac{e_1+e_2}{m_1+m_2}\mathscr{E}, \ddot{y}_m=0,$$

由此得到质心的运动规律:

$$x_m=\frac{e_1+e_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{\mathscr{E}}{2}t^2+\dot{x}_{m0}t+x_{m0}, y_m=\dot{y}_{m0}t+y_{m0}.$$

分子取向的改变取决于转动动量矩$\vec{\mathscr{M}}$的变化规律，$\vec{\mathscr{M}}$等于

$$\vec{\mathscr{M}}=\mu(x\dot{y}-y\dot{x})\mathbf{n}_z,$$

式中 μ 是折合质量。考虑到 $x=l\cos\varphi$，$y=l\sin\varphi$（φ 是 $O'x$ 轴与 $O'x'$ 轴的夹角），可以把 $\mathscr{U}$的表达式改写成

$$\vec{\mathscr{M}}=\mu l^2\dot{\varphi}\mathbf{n}_z.$$

注意

$$\vec{\mathscr{L}}^e=\mathbf{r}'_1\times e_1\vec{\mathscr{E}}+\mathbf{r}'_2\times e_2\vec{\mathscr{E}}=-\frac{l\mathscr{E}}{m_1+m_2}(m_1e_2-m_2e_1)\sin\varphi\cdot\mathbf{n}_z,$$

把$\vec{\mathscr{M}}$和$\vec{\mathscr{L}}^e$的表达式代入力矩方程$\vec{\mathscr{L}}^e=\dot{\vec{\mathscr{M}}}$[见(8.11)]就得到

$$\ddot{\varphi}+\frac{\mathscr{E}}{m_1m_2l}(m_1e_2-m_2e_1)\sin\varphi=0. \tag{1}$$

由此可见，如果初始转动动能足够小，而$m_1e_2>m_2e_1$，那么分子将围绕$\varphi_{eq}=0$的位置（分子的平衡位置，在此位置，向量$\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$与$\vec{\mathscr{E}}$同向）作微小的振动，而若 $m_1e_2<m_2e_1$，那么分子将围绕 $\varphi_{eq}=\pi$ 的位置（在平衡位置，$\mathbf{r}$ 与 $\vec{\mathscr{E}}$ 反向）而振动；最后，若 $m_1e_2=m_2e_1$，那么分子将以初始角速度 $\dot{\varphi}_0$ 作匀速转动。

细杆对点 1 的反作用力 $\mathbf{R}_1$ 则由点 1 的运动方程

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1=e_1\vec{\mathscr{E}}+\mathbf{R}_1$$

决定。利用点 1 对 S 系和对 S_m系的加速度之间的关系式[见(4.46)式]以及质心的运动方程，可得

$$\ddot{\mathbf{r}}_1=\frac{e_1+e_2}{m_1+m_2}\vec{\mathscr{E}}+\ddot{\mathbf{r}}'_1,$$

从而得

$$\mathbf{R}_1=\frac{m_1e_2-m_2e_1}{m_1+m_2}\vec{\mathscr{E}}+m_1\ddot{\mathbf{r}}'_1. \tag{2}$$

把加速度 $\ddot{\mathbf{r}}'_1$（等于$-\frac{m_2}{m}\ddot{\mathbf{r}}$）按柱坐标的单位矢分解，于是得

$$\ddot{\mathbf{r}}'_1=\frac{m_2}{m}\dot{\varphi}^2\mathbf{r}-\frac{m_2}{m}l\ddot{\varphi}\mathbf{n}_\varphi \qquad (m=m_1+m_2). \tag{3}$$

最后将(3)代入(2),并利用(1)消去$\ddot{\varphi}$,即得

$$\mathbf{R}_1=\left[\frac{m_1e_2-m_2e_1}{(m_1+m_2)l}\mathscr{E}\cos\varphi+\mu\dot{\varphi}^2\right]\mathbf{r}. \tag{4}$$

所以,细杆的反作用力$\mathbf{R}_1$不仅与外场对电荷1、2的作用之差有关(当荷质比相等时,即$e_1/m_1=e_2/m_2$时,就如同外场不存在一样),而且还与体系相对于惯性参照系的转动有关.

例8.2 匀恒电场中的带电三原子线型分子.

质量均为m的三个点刚性地连结在一个长为l、质量可忽略的直杆上,第一、三点在杆的两端,第二个点在中点(见图8.3).三个点带的电量相等:第一、三个点带正电荷,第二个点带负电荷.这个"分子"在一个固定平面内运动,该平面平行于场的匀恒电场强为$\vec{\mathscr{E}}$.试求以独立坐标表示的"分子"运动方程和直杆的反作用力.

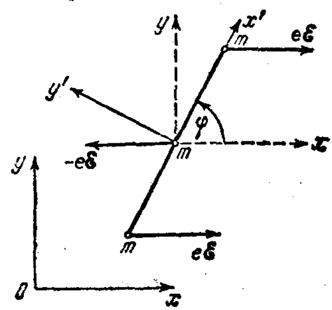

图 8.3

仿照上题(例8.1)选择坐标系S和S',于是质心的矢径和各点的矢径以及分子的角速度分别为

$$\mathbf{r}_m=\mathbf{r}_2;\mathbf{r}'_1=-\frac{\mathbf{r}}{2},\quad \mathbf{r}'_2=0,$$

$$\mathbf{r}'_3=\frac{\mathbf{r}}{2},\quad \boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\mathbf{n}_z,$$

式中$\mathbf{r}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$,而$\varphi$是分子轴与$Ox$轴的夹角.由于原点$O'$与分子的质心相重合,所以动能等于[见(8.18)]

$$T=\frac{3m}{2}v_m^2+\frac{m}{2}\dot{\varphi}^2\sum_{i=1}^{3}\left(\mathbf{n}_z\times\mathbf{r}'_i\right)^2.$$

如果取质心的笛卡儿坐标x_m、y_m和角φ为独立坐标,同时考虑到

所有的矢量 $\mathbf{r}'_i$ 都与 $\mathbf{n}_z$ 垂直，可得

$$T=\frac{3m}{2}\left(\dot{x}_m^2+\dot{y}_m^2\right)+\frac{ml^2}{4}\dot{\varphi}^2. \tag{1}$$

由于场是均匀的，所以分子的势能等于

$$U^e=-\vec{\mathscr{E}}\cdot(e_1\mathbf{r}_1+e_2\mathbf{r}_2+e_3\mathbf{r}_3),$$

式中 $e_1=e_3=e$，而 $e_2=-e$. 对每一个点利用关系式(4.46)同时注意 $\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_m$, $\mathbf{r}'_1+\mathbf{r}'_3=0$，即可得到以独立坐标表示的势能

$$U^e=-e\mathscr{E}x_m. \tag{2}$$

最后，考虑到(1)和(2)，由拉格朗日方程得到

$$\ddot{x}_m=\frac{e\mathscr{E}}{3m};\quad x_m=\frac{e\mathscr{E}}{6m}t^2+\dot{x}_{m0}t+x_{m0},$$

$$y_m=\dot{y}_{m0}t+y_{m0},\ \varphi=\dot{\varphi}_0t+\varphi_0. \tag{3}$$

由此看出，分子质心在矢量 $\vec{\mathscr{E}}$ 的方向上做匀加速运动，而整个分子做匀速转动。

直杆对点 1 的反作用力 $\mathbf{R}_1$ 由该点的运动方程决定：

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1=e\vec{\mathscr{E}}+\mathbf{R}_1,$$

实际上，利用关系式

$$\ddot{\mathbf{r}}_1=\ddot{\mathbf{r}}_m+\ddot{\mathbf{r}}'_1$$

并借助(3)把 $\ddot{\mathbf{r}}_m$ 消去，然后算出 $\ddot{\mathbf{r}}'_1$，即得

$$\mathbf{R}_1=-\frac{2e}{3}\vec{\mathscr{E}}+\frac{m}{2}\dot{\varphi}_0^2\mathbf{r} \tag{4}$$

(可见，在有外场时，反作用力 $\mathbf{R}_1$ 不平行于直杆). 经类似的计算，直杆作用在点 2、点 3 的反作用力分别为

$$\mathbf{R}_2=\frac{4}{3}e\vec{\mathscr{E}},\qquad \mathbf{R}_3=-\frac{2e}{3}\vec{\mathscr{E}}-\frac{m}{2}\dot{\varphi}_0^2\mathbf{r}. \tag{5}$$

(4)和(5)式表示的反作用力是整个直杆对点作用的合力，在垂直于直杆方向上的分力是由于刚性直杆发生了极为微小的弯曲产生的。不难验证，$\mathbf{R}_1$、$\mathbf{R}_2$、$\mathbf{R}_3$ 之和及其力矩之和都为零，因为杆的反

作用力是力学系统的内力。而各反作用力所作的实功和虚功之和也都为零，因为杆是绝对刚体（见本书上册 §5.2）.

例 8.3 非均匀细杆的平衡.

长为 l 重量为mg的非均匀细杆，其上某点的密度①线性地依赖于该点到细杆某个端点的距离。细杆较轻的一端靠在一个高为 h 的光滑尖顶上；而较重的一端放在一个光滑的水平支座上，并用细线把杆的下端拉住（见图 8.4）。试求支座和线的反作用力。

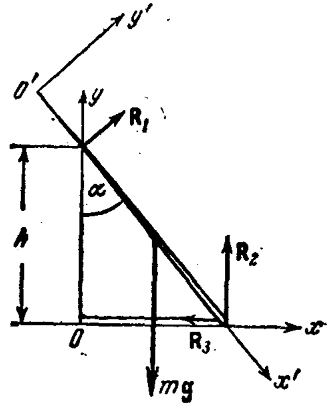

图 8.4

根据 (8.14)式，我们把运动方程(8.16)写为

$$\begin{aligned}&m\mathbf{g}+\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_3=0,\\&\mathbf{r}_m\times m\mathbf{g}+\mathbf{r}_1\times\mathbf{R}_1+\mathbf{r}_2\times\mathbf{R}_2+\mathbf{r}_3\times\mathbf{R}_3=0.\end{aligned}\qquad(1)$$

考虑到反作用力 $\mathbf{R}_1$ 垂直于细杆，$\mathbf{R}_2$ 垂直于水平支座，而 $\mathbf{R}_3$ 沿着水平方向，我们这样来选择坐标系 Oxy，使力的分量大部分为零，这时方程(1)可写成以下形式:

$$\begin{aligned}&R_1\cos\alpha-R_3=0,\quad -mgx_m-y_1R_1\cos\alpha+x_2R_2=0,\\&-mg+R_1\sin\alpha+R_3=0.\end{aligned}\qquad(2)$$

利用 $O'x'y'$ 系（见图 8.4），我们来确定细杆质心的位置。为此，我们把(2.89)对质点的求和换成对长度的积分，即得

$$y'_m=0,\quad x'_m=\frac{\int_0^l\rho(x')x'dx'}{\int_0^l\rho(x')dx'}=\frac{2}{3}l,$$

式中 $\rho(x')=ax'$，是细杆的质量密度（其中常数 a 可通过细杆质量

① 这里指的是线密度即单位长度的质量。——译者注

表示，等于 $2m/l^2$)。由此得细杆质心相对于 Oxy 系的坐标为

$$x_m = h\operatorname{tg}\alpha - \frac{l}{3}\sin\alpha. \tag{3}$$

利用(2)和(3)，最后得到

$$R_1 = \frac{mgl}{6h}\sin^2\alpha,\quad R_2 = mg - R_1\sin\alpha,\quad R_3 = R_1\cos\alpha.$$

§8.2 惯 量 张 量

刚体的动量矩和能量的表达式中，含有与刚体转动有关的 $\vec{\mathscr{M}}$ 和 $\mathscr{T}$[见(8.3)和(8.17)式]，$\vec{\mathscr{M}}$ 和 $\mathscr{T}$ 的表示式相当复杂，我们现在就来详细地研究一下这些量，$\vec{\mathscr{M}}$ 和 $\mathscr{T}$ 分别是角速度投影的线性式和二次式(线性式或二次式的系数取决于刚体的质量分布)。根据大家所熟悉的矢量公式：

$$\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = r'^2_i \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}'_i(\mathbf{r}'_i \cdot \boldsymbol{\omega}),$$

可以把转动动量矩写为

$$\mathscr{M} = \sum_i m_i\{r'^2_i \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}'_i(\mathbf{r}'_i \cdot \boldsymbol{\omega})\} \tag{8.21}$$

因为矢量 $\mathbf{r}'_i$ 只对于固连在刚体上的 S' 系才是常量，所以宜于利用 $\vec{\mathscr{M}}$ 在 S' 系坐标上的投影，例如把(8.21)投影到 $O'x'$ 轴上，得到

$$\mathscr{M}_{x'} = \sum_i m_i(y'^2_i + z'^2_i)\omega_{x'} - \sum_i m_i x'_i y'_i \omega_{y'} - \sum_i m_i x'_i z'_i \omega_{z'}$$

对 $\mathscr{M}_{y'}$、$\mathscr{M}_{z'}$ 进行类似的推导可知，$\vec{\mathscr{M}}$ 的所有投影都可以写成以下形式：

$$\mathscr{M}_\alpha = \sum_\beta J_{\alpha\beta}\omega_\beta; \tag{8.22}$$

式中的下标 α 和 β 是 S' 系坐标轴的符号，而 $J_{\alpha\beta}$ 量的总和可写成以下矩阵：

$\|J_{\alpha\beta}\| =$

$$
\left\|\begin{array}{ccc}
\sum_i m_i(y_i'^2+z_i'^2) & -\sum_i m_i x_i' y_i' & -\sum_i m_i x_i' z_i' \\
-\sum_i m_i y_i' x_i' & \sum_i m_i(x_i'^2+z_i'^2) & -\sum_i m_i y_i' z_i' \\
-\sum_i m_i z_i' x_i' & -\sum_i m_i z_i' y_i' & \sum_i m_i(x_i'^2+y_i'^2)
\end{array}\right\|. \tag{8.23}
$$

利用张量符号重新导出(8.22)是有益的，这时(8.21)为:

$$
\mathscr{M}_\alpha=\Sigma m\{(\sum_\beta x'_\beta x'_\beta)\omega_\alpha-x'_\alpha(\sum_\beta x'_\beta\omega_\beta)\}, \tag{8.24}
$$

这里为了简化书写，略去了质点的下标 i；式中 α 和 β 遍取 1,2,3，而 1,2,3 分别代表 $O'x'$、Oy'、$O'z'$ 轴的编号(例如矢径 $\mathbf{r}'_i$ 的投影 y'_i 用符号 x'_2 表示)。然后再利用克罗内克符号，把角速度的投影 ω_α 写成

$$
\omega_\alpha=\sum_\beta\omega_\beta\delta_{\alpha\beta},
$$

$\delta_{\alpha\beta}$ 根据定义为

$$
\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1 & \alpha=\beta \text{ 时},\\ 0 & \alpha\neq\beta \text{ 时},\end{cases} \tag{8.25}
$$

这样，利用(8.24)就可以导出(8.22)，式中的系数 $J_{\alpha\beta}$ 为

$$
J_{\alpha\beta}=\Sigma m\left\{\left(\sum_\gamma x'_\gamma x'_\gamma\right)\delta_{\alpha\beta}-x'_\alpha x'_\beta\right\}. \tag{8.26}
$$

只与刚体转动有关的那一部分动能 $\mathscr{T}$[见(8.17)]，也可以用 $J_{\alpha\beta}$ 表示。实际上，利用

$$
(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'_i)^2=r_i'^2\omega^2-(\mathbf{r}'_i\cdot\boldsymbol{\omega})^2,
$$

即可得到

$$
\mathscr{T}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}J_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta. \tag{8.27}
$$

量 $J_{\alpha\beta}$ 的总合称为惯量张量，惯量张量的分量称为转动惯量.转动动量矩 $\mathscr{M}$ 和转动能量 $\mathscr{T}$ 均可用转动惯量 $J_{\alpha\beta}$ 以及角速度 ω 的投影表示。注意，表征某一给定刚体的转动惯量 $J_{\alpha\beta}$ 是一个常量，它只与固连在该刚体上的 S' 系的选择以及刚体的质量分布和形状有关。惯量张量是对称张量，亦即它是六个转动惯量的总和：三个"对角"矩 $J_{x'x'}$、$J_{y'y'}$、$J_{z'z'}$（称为**轴转动惯量**）；三个"非对角"矩 $J_{x'y'}$、$J_{x'z'}$、$J_{y'z'}$（称为**离心转动惯量**①）。

例如，我们分别在 S_1' 和 S_2' 参照系中，计算双原子分子对沿分子轴的 $O'z'$ 轴和 $O''z''$ 轴的转动惯量(图 8.5)，S_1' 的原点在质点 1 上，S_2' 的原点在分子的质心上，见图 8.5. 在 S' 系中，质点 1、2 的坐标分别为

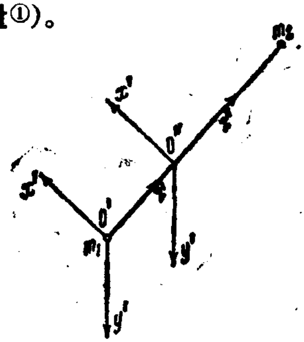

图 8.5

$$x_1'=y_1'=z_1'=0,\quad x_2'=y_2'=0,\quad z_2'=l,$$

式中 l 是两质点之间的距离。将上述点的坐标代入(8.23)，即可求出在 S_1' 系中分子的转动惯量

$$J_{x'y'}=J_{x'z'}=J_{y'z'}=J_{z'z'}=0,$$

$$J_{x'x'}=J_{y'y'}=m_1z_1'^2+m_2z_2'^2=m_2l^2.$$

在 S_2' 系中进行计算，同样可得到两个不为零的转动惯量：

$$J_{x'x'}=J_{y'y'}=m_1z_1''^2+m_2z_2''^2=\mu l^2,$$

式中

$$z_1''=-\frac{m_2}{m}l,\qquad z_2''=\frac{m_1}{m}l,\qquad m=m_1+m_2,$$

而 μ 为折合质量. 所以，分子的惯量张量在 S_1' 和 S_2' 系中分别为

① 也叫惯量积。——译者注