



華夏英才基金學術文庫

史金麟 张剑峰 编著

微分方程分类原理

5
2



科学出版社

www.sciencep.com



華夏英才基金學術文庫

微分方程分类原理

史金麟 张剑峰 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书内容包括常微分方程(含非自治情形)等价关系的定义方法、线性方程分类、非线性方程的拓扑线性化、光滑线性化和结构稳定性等。这些内容可以看成动力系统理论中拓扑等价、拓扑共轭、线性化和结构稳定等概念在常微分方程(含非自治情形)中的延伸。但研究方法比较初等,只要具备数学分析、线性代数和常微分方程基础知识的读者就可以顺利阅读。

本书可供高等院校数学系、物理系及其他应用学科的研究生使用,也可供相关领域的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

微分方程分类原理/史金麟,张剑峰编著. —北京:科学出版社,2003
ISBN 7-03-011132-X

I. 微… II. ①史…②张… III. 微分方程-分类-理论 IV. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 007058 号

责任编辑:彭斌、姚晖 / 责任校对:包志虹

责任印制:白 羽 / 封面设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年4月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2003年4月第一次印刷 印张:15 1/2

印数:1—3 000 字数:300 000

定价:31.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前 言

动力系统理论中的拓扑等价、拓扑共轭、结构稳定和线性化等概念已为许多学者所熟悉。20 世纪 70 年代,国外一些学者将这些概念引申到一般的常微分方程,其中包括非自治微分方程。80 年代末,我们将此问题作为讨论班活动的一个内容。我们以国外一些学者的研究成果作为起点,经过研讨与分析,比较完善地定义了一般微分方程(含非自治系)全局与局部等价的观念,并以这些概念为基础对微分方程(含非自治系)的分类、线性化、结构稳定及其他一些问题进行了研究。所用的方法、工具和涉及的概念与动力系统理论中的方法、工具、概念不大相同。

由于国内外这类研究文章不多,且比较零散,因此,本书较完整地收集了国内外在这个方向上的一些研究成果。对于想了解这个领域或希望在这个领域开展研究工作的学者来说,这本书是适宜的,它既是一本入门书,又是较完整的资料。

在本书初稿写作中,曾得到林振声先生的支持与鼓励。我们编写该书的初衷只是想提供一本自用的研究生教材,但在华夏英才基金会的资助下,在福州大学施祖美书记及林榕华、沈斐敏等同志的关心支持下,本书得以出版,作者在此一并致谢。

本书的内容在福州大学部分研究生中讲授过。书中取材仅限于正式出版的书籍与正式发表的论文。限于作者水平,错漏之处一定不少,敬请读者指正。

· 作 者

2002. 8. 10

目 录

前言

第一章 预备知识	1
§ 1 解的存在惟一性、解对初值的连续性与可微性	1
§ 2 不动点定理、隐函数定理与微分积分不等式	4
§ 3 矩阵的指数、对数的定义与性质	5
§ 4 线性系统的二分性理论	7
4.1 二分性概念及性质	7
4.2 二分性与系统的对角分块	12
4.3 指数型二分性与李雅普诺夫函数	15
4.4 二分性在小扰动下的不变性	20
4.5 指数型二分性的准则	21
§ 5 概周期函数、拟周期函数和回复函数	24
第二章 微分方程等价关系的定义方法	26
§ 6 自治系之间的等价关系	26
§ 7 非自治系之间的全局等价关系	30
§ 8 非自治系在奇点邻域局部拓扑等价的定义方法	41
§ 9 微分等价与线性等价的充要条件	45
第三章 线性系统的拓扑分类、微分分类与线性分类	48
§ 10 自治线性系的线性分类与微分分类	48
§ 11 自治线性系的拓扑分类	49
§ 12 非自治线性系的线性分类	57
§ 13 非自治线性系的微分分类	66
§ 14 非自治线性系的拓扑分类	67
第四章 拓扑线性化	84
§ 15 Hartman 线性化定理和 Palmer 线性化定理	84
15.1 全局线性化定理	84
15.2 局部线性化定理	90
15.3 关于等价函数的惟一性	92
15.4 等价函数的周期性与概周期性	93
§ 16 Hartman-Grobman 线性化定理与 Palman 线性化定理的改进	95

16.1 非线性项有界情形	95
16.2 非线性项无界情形	110
§ 17 临界情形的线性化	125
17.1 非自治系统临界情形下的线性化	125
17.2 自治系统临界情形下的全局拓扑线性化(I)	137
17.3 自治系统临界情形下的全局拓扑线性化(II)	146
§ 18 积分流形附近的线性化	160
§ 19 齐次化	161
19.1 局部拓扑等价的一个条件	161
19.2 齐次化	166
第五章 光滑线性化	171
§ 20 Sternberg 的结果	171
§ 21 Sell 结果的简介	174
21.1 连续多重线性映射与连续多重线性映射空间	174
21.2 Sell 结果的叙述	175
21.3 C^1 线性化的大体步骤	176
§ 22 全局光滑线性化的两个结论	179
22.1 非自治系情形	179
22.2 自治系情形	185
第六章 结构稳定性	193
§ 23 自治线性系结构稳定的充要条件	193
§ 24 非自治线性系在半轴上结构稳定的充要条件	195
§ 25 非自治线性系强结构稳定的充要条件	203
§ 26 平衡点邻域局部结构稳定的若干结论	214
第七章 平面多项式微分系统分类的一个方法	220
§ 27 准备工作	220
§ 28 平面多项式定性系统的分类	226
§ 29 平面齐二次系统的全局结构	235
参考文献	238

第一章 预备知识

在本章中我们把本书要用的常微分方程的一些基本理论作一概述. 由于这些理论在一般常微分方程教材中均可查到, 所以本书不再证明, 但指出它们的出处, 便于读者查阅.

至于线性系统的二分性理论, 在一般常微分方程教材与专著中都很少述及, 而本书经常用到这些理论, 因此我们较详细地阐述它.

本章末尾一节介绍了拟周期函数、概周期函数与回复函数. 这几类函数在本书后几章中时有涉及.

本书对向量与矩阵的范数作如下定义. 设向量 $x = (x_1, \dots, x_n)$, 则 x 的模记为 $|x|$, 定义为 $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. 矩阵 A 的模也记为 $|A|$, 定义为

$$|A| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$$

对于函数矩阵 $A(t)$, $|A(t)|$ 的含义是一样的, 因此 $|A(t)|$ 是 t 的函数. 有时若有必要, 也使用上确界范数 $\sup_{t \in J} |A(t)|$, 记为 $\|A(t)\|$, 其中 J 是 R 中一个有限或无限的区间, 视具体问题而定.

§1 解的存在惟一性、解对初值的连续性与可微性

设 I 是 R 的一个开区间, D 是 R^n 中的一个开集, $f: I \times D \rightarrow R^n$. 我们所讨论的常微分方程是指关系式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.1)$$

若存在 $I_1 \subset I$ 及 $x \in C^1(I_1, D)$ 满足 (1.1), 即

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$$

则称 $x(t)$ 是 (1.1) 的解.

设 $(t_0, x_0) \in I \times D$. (1.1) 的初值问题是指: 求 (1.1) 的满足 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x(t)$. 初值问题也可以记为如下形式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解也称为 (1.1) 过 (t_0, x_0) 的解, 通常记为 $x(t, t_0, x_0)$. (1.1) 的解在几何上表示 $I \times D$ 中的一条曲线, 因此 (1.1) 的解也称为 (1.1) 的积分曲线.

常微分方程的所有理论都是以解的存在惟一性理论为基础的. 下面简述有关的结果.

设 $f: I \times D \rightarrow R^n$. 若对 D 中的任意有界闭集 U , 存在常数 $K_U > 0$, 使对任意 $t \in I$ 及任意 $x_1, x_2 \in U$, 恒有

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K_U |x_1 - x_2|$$

则称 f 在 $I \times D$ 中满足局部 Lipschitz 条件.

定理 1.1 (解的存在惟一性) 设 f 在 $I \times D$ 中连续且满足局部 Lipschitz 条件, 则对 $I \times D$ 中的任意点 (t_0, x_0) , (1.1) 存在惟一的解 $x(t)$ 满足 $x(t_0) = x_0$.

这个定理的证明在一般的常微分方程教材中均可查到, 例如可以参看文献 [1] 第二章 §1.

本书经常涉及解对初值的连续性与可微性. 以下将分别陈述其结果.

定理 1.2 (解对初值的连续性) 设 $f(t, x)$ 在 $I \times D$ 上连续, 且对任意 $(t_0, x_0) \in I \times D$. 满足 $x(t_0) = x_0$ 的解惟一, 则 (1.1) 过 (t_0, x_0) 的解 $x(t, t_0, x_0)$ 是关于 t, t_0, x_0 在 $I_1 \times I \times D$ 上连续. 这里 I_1 是过 (t_0, x_0) 解的最大存在区间.

定理 1.3 (解对初值的可微性) 设 $f(t, x)$ 在 $I \times D$ 上连续且关于 x 具有连续的偏导数, 则 (1.1) 过 (t_0, x_0) 的解 $x(t, t_0, x_0)$ 关于 t, t_0, x_0 在 $I_1 \times I \times D$ 上都具有连续的偏导数 (这里 I_1 含义同定理 1.2), 并且

$$\frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_{0_k}}, \frac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial t_0}$$

分别是变分方程的初值问题

$$\begin{cases} \xi' = D_2 f(t, x(t, t_0, x_0)) \xi \\ \xi(t_0) = e_k \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} \zeta' = D_2 f(t, x(t, t_0, x_0)) \zeta \\ \zeta(t_0) = -f(t_0, x_0) \end{cases}$$

的解. 这里 x_{0_k} 是 x_0 的第 k 个分量, e_k 是第 k 个分量为 1, 其余分量为零的 n 元向量.

这两个定理的证明可参考文献 [2] 第 68~73 页.

下面介绍一个关于解的存在区间的结论.

定理 1.4 (Wintner) 设 $f: R \times R^n \rightarrow R^n$ 连续, 又存在连续函数 $L: (0, +\infty) \rightarrow R$, 满足

$$(i) |f(t, x)| \leq L(|x|),$$

$$(ii) \int_{\gamma_0}^{+\infty} \frac{du}{L(u)} = +\infty \quad (\gamma_0 > 0),$$

则(1.1)的每一个解的存在区间皆为 $(-\infty, +\infty)$.

该定理的证明参见文献[3]. 定理1.4还可推广.

定理 1.5 设 $f: R \times R^n \rightarrow R^n$ 连续, 且满足

$$|f(t, x)| \leq \phi(t)L(|x|)$$

这里 $\phi(t)$ 连续, $L(u)$ 满足

$$\int_{\gamma_0}^{+\infty} \frac{du}{L(u)} = +\infty$$

则(1.1)的任一解的存在区间皆为 $(-\infty, +\infty)$.

定理1.5的证明可参看文献[4]第0章.

作为特例, 我们考虑两类方程.

先考虑线性系

$$x' = A(t)x + h(t) \quad (1.3)$$

这里 $x \in R^n$, $A(t)$ 是 n 阶方阵, $h(t)$ 是 n 元向量. $A(t), h(t)$ 都在 R 上连续. 我们不假设 $A(t), h(t)$ 有界. 但是有

$$\begin{aligned} |A(t)x + h(t)| &\leq |A(t)||x| + |h(t)| \\ &\leq \max\{|A(t)|, |h(t)|\}(|x| + 1) \\ &= \phi(t)\varphi(x) \end{aligned}$$

这里 $\phi(t) = \max\{|A(t)|, |h(t)|\}$, $\varphi(u) = u + 1$, 由于 $\phi(t)$ 连续, $\int_{\gamma_0}^{+\infty} \frac{du}{\varphi(u)} = \infty$, 所以(1.3)的每一个解都在 $(-\infty, +\infty)$ 中存在.

再考虑弱非线性系

$$x' = A(t)x + f(t, x) \quad (1.4)$$

$x \in R^n$, $A(t)$ 是 n 阶方阵, 定义在 R 上且有界, $f(t, x)$ 满足

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \lambda(t)|x_1 - x_2|$$

而 $\lambda(t)$ 与 $f(t, 0)$ 皆有界. 则

$$\begin{aligned} |A(t)x + f(t, x)| &\leq |A(t)||x| + |\lambda(t)||x| + |f(t, 0)| \\ &\leq M|x| + N \end{aligned}$$

其中 $M = \sup_{t \in R} (|A(t)| + |\lambda(t)|)$, $N = \sup_{t \in R} |f(t, 0)|$.

由于 $\int_{\gamma_0}^{+\infty} \frac{du}{Mu + 1} = \infty$, 所以(1.4)的每一个解的存在区间也是 $(-\infty, +\infty)$.

§ 2 不动点定理、隐函数定理与微分积分不等式

变换 $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 的不动点是指 $\mathcal{X}$ 中满足 $Tx = x$ 的点 x . 不动点的存在性定理在微分方程理论中是很有用的.

定义 2.1 设 $\mathcal{F}$ 是 Banach 空间的子集, T 是 $\mathcal{F}$ 到 Banach 空间 $\mathcal{B}$ 的映射. 若存在常数 $\lambda: 0 \leq \lambda < 1$, 使得对任意 $x, y \in \mathcal{F}$ 恒有

$$|Tx - Ty| \leq \lambda |x - y|$$

则称 T 是 $\mathcal{F}$ 上的一个压缩映射, λ 称为 T 的压缩常数.

定理 2.1 (Banach-Cacciopoli 压缩映射原理) 设 $\mathcal{F}$ 是 Banach 空间中一个闭集, $T: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ 是一个压缩映射, 则 T 在 $\mathcal{F}$ 中有惟一不动点 $\bar{x}$, 并且如果在 $\mathcal{F}$ 中任取 x_0 , 序列 $\{x_{n+1} = Tx_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时总收敛于 $\bar{x}$. 同时 $|\bar{x} - x_n| \leq \lambda^n |x_1 - x_0| / (1 - \lambda)$. 其中 λ 是 T 的压缩常数.

定理 2.2 (Schauder 不动点定理) 设 $\mathcal{F}$ 是 Banach 空间的凸紧子集, $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ 是连续的, 则 f 在 $\mathcal{F}$ 中有一个不动点.

这两个不动点定理引自文献[4]第 0 章.

在微分方程理论中还经常用到隐函数定理.

定理 2.3 (隐函数定理) 假设 $F: R^n \times R^n \rightarrow R^n$ 有连续的一阶偏导数, 又设 $F(x_0, y_0) = 0$, 如果

$$\det \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$$

则在 (x_0, y_0) 的某一邻域内, 方程 $F(x, y) = 0$ 确定 y 为 x 的单值函数 $y = f(x)$, 且 $y = f(x)$ 有连续的一阶偏导数.

隐函数定理在数学分析标准教程中均可查到.

定理 2.4 (Bellman 不等式) 设 $y(t), g(t)$ 是区间 $[a, b]$ 上的非负连续函数, 且满足

$$y(t) \leq M_0 + M_1 \int_a^t y(s) g(s) ds, \quad t \in [a, b]$$

这里 M_0, M_1 是两个正的常数. 则

$$y(t) \leq M_0 \exp(M_1 \int_a^t g(s) ds)$$

该定理在一般常数方程教材中均可查到.

定理 2.5 设 $x: R \rightarrow R^n$ 连续可微, 则 $|D_r |x(t)|| \leq |x'(t)|$, 这里 D_r 表示右导数.

考虑微分不等式

$$D_r v(t) \leq \omega(t, v(t)) \quad (2.1)$$

这里 D_r 表示右导数. $\omega(t, v)$ 是纯量 t, v 在某个开连通集 Ω 内的纯量连续函数.

若 $v(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且有满足 (2.1) 式的右导数, 则称 $v(t)$ 是微分不等式 (2.1) 的解.

定理 2.6 设 $\omega(t, u)$ 是纯量 t, u 在某个开连通集 Ω 内的纯量连续函数. 又设方程

$$u' = \omega(t, u) \quad (2.2)$$

在 Ω 内的初值问题有惟一解. 如果 $u(t)$ 是 (2.2) 在区间 (a, b) 上的解, $v(t)$ 是 (2.1) 在区间 $[a, b]$ 上的解, 且 $v(a) \leq u(a)$, 则当 $t \in [a, b]$ 时, $v(t) \leq u(t)$.

以上两个定理的证明可参看文献 [4] 第 0 章.

最后再介绍一个比较定理, 它在微分方程理论中也是很有用的.

定理 2.7 (比较定理) 设 $f(t, x), F(t, x)$ 在平面区域 G 上连续, 且满足不等式 $f(t, x) \leq F(t, x)$.

设 $\phi(t)$ 与 $\psi(t)$ 分别为方程

$$x' = f(t, x) \quad (2.3)$$

$$x' = F(t, x) \quad (2.4)$$

过同一点 (t_0, x_0) 的惟一解, 则当 $t_0 \leq t < b$ 时有 $\phi(t) \leq \psi(t)$. 当 $a < t \leq t_0$ 时有 $\phi(t) \geq \psi(t)$.

该定理引自文献 [2] 第 45 页. 由于我们假设过点 (t_0, x_0) 的解惟一, 因此不必考虑过 (t_0, x_0) 的最大解与最小解, 请读者参阅时注意.

§ 3 矩阵的指数、对数的定义与性质

设 A 是一个 n 阶方阵, 我们定义矩阵指数 $\exp A$ (或为 e^A) 为下面矩阵级数的和

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots \quad (3.1)$$

其中 I 是单位矩阵, A^m 是 A 的 m 次幂. 这里我们规定 $0! = 1$, $A^0 = I$. 这个级数对所有的 A 都是收敛的, 因此 $\exp A$ 是一个确定的矩阵.

矩阵指数有如下性质:

性质 1 如果 $AB = BA$ 则

$$\exp(A + B) = \exp A \exp B$$

性质 2 $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.

性质 3 设 T 是非退化方阵, 则

$$\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}(\exp A)T$$

性质 4 $\exp At$ 是自治线性系 $x' = Ax$ 的标准解方阵.

性质 5 $\exp \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp A_1 & \\ & \exp A_2 \end{pmatrix}$; 一般地

$$\exp \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \exp A_s \end{pmatrix}$$

性质 6 对任意 A , $\exp A$ 必为非退化方阵.

下面考虑矩阵的对数.

设 B 是一个非退化矩阵, 可以证明存在方阵 A 使 $\exp A = B$. 我们称 A 是 B 的对数, 记为 $A = \ln B$.

设 B 为若当标准形

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}_{n \times n}$$

其中

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & \\ 1 & \lambda_k & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}_{n_k \times n_k}$$

用 I_{n_k} 表示 n_k 阶单位方阵. 记 $Z_{n_k} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n_k \times n_k}$, 那么 $J_k = \lambda_k I_{n_k} + Z_{n_k}$. 不难验证

$$\begin{aligned} \ln J_k &= (\ln \lambda_k) \cdot I_{n_k} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{Z_{n_k}}{\lambda_k} \right)^m \\ &= (\ln \lambda_k) \cdot I_{n_k} + \sum_{m=1}^{n_k-1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{Z_{n_k}}{\lambda_k} \right)^m \end{aligned}$$

于是

$$\ln B = \begin{pmatrix} \ln J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ln J_s \end{pmatrix}_{n \times n}$$

在一般情况下, 设 B 的若当标准形为 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$, 其中 $J_1, J_2, \dots, J_s$ 为若当

块,于是存在非退化方阵 T 使 $B = T^{-1}JT$. 设 $\ln B = A$, 则 $B = e^A$. 由 e^A 的性质 3 可得 $J = \exp(TAT^{-1})$, 于是

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \ln J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ln J_s \end{pmatrix}$$

从而

$$A = T^{-1} \begin{pmatrix} \ln J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ln J_s \end{pmatrix} T$$

以上结论引自文献[1]的第一章.

§ 4 线性系统的二分性理论

线性系统的二分性理论在微分方程的分类问题中起了重要作用. 本节将较详细地叙述这一理论. 本节材料主要取自文献[5,6].

4.1 二分性概念及性质

考虑线性微分方程系

$$x' = A(t)x \quad (4.1)$$

$x \in R^n$, $A(t)$ 是 $n \times n$ 矩阵, 定义在 R^+ 或 R 上, 分段连续且有界. 用 $X(t)$ 表示 (4.1) 的基本解方阵.

定义 4.1 (二分性) 若存在投影方阵 P 及常数 $k > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$, 使

$$\left. \begin{aligned} |X(t)PX^{-1}(s)| &\leq ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geq s) \\ |X(t)(I-P)X^{-1}(s)| &\leq ke^{-\beta(s-t)} \quad (t \leq s) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

则称系统 (4.1) 在 R 上具有二分性 (dichotomy). 若 α, β 中至少有一个为零, 则称 (4.1) 在 R 上具有普通二分性 (ordinary dichotomy). 若 α, β 皆为正数, 则称 (4.1) 在 R 上具有指数型二分性 (exponential dichotomy).

如果 (4.2) 式的第一个式子成立范围改为 $t \geq s \geq 0$, 第二个式子成立范围改为 $0 \leq t \leq s$, 则称 (4.1) 在 R^+ 上具有二分性. 类似地可以定义 R^+ 上的普通二分性与指数二分性. 如果 (4.2) 的第一个式子成立范围改为 $0 \geq t \geq s$, 在第二式中改为 $t \leq s \leq 0$, 则称 (4.1) 在 R^- 上具有二分性. 类似地可以定义 R^- 上的普通二分性与指数型二分性.

我们指出只要适当地选取解方阵, (4.2) 中的投影方阵 P 总可以取 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$ 的

形式, I_γ 表示 γ 阶单位阵, γ 是 P 的秩数. 事实上, 对任意投影方阵 P , 必存在非退化方阵 T , 使 $P = T \begin{pmatrix} I_\gamma & \\ & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$, 将它代入 (4.2) 即得

$$\left| X(t) T \begin{pmatrix} I_\gamma & \\ & 0 \end{pmatrix} T^{-1} X^{-1}(s) \right| \leq k e^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geq s)$$

$$\left| X(t) T \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{n-\gamma} \end{pmatrix} T^{-1} X^{-1}(s) \right| \leq k e^{-\beta(s-t)} \quad (t \leq s)$$

令 $X_1(t) = X(t)T$, 则 $X_1(t)$ 仍是 (4.1) 的基本解方阵. 由此可得

$$\left| X_1(t) \begin{pmatrix} I_\gamma & \\ & 0 \end{pmatrix} X_1^{-1}(s) \right| \leq k e^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geq s)$$

$$\left| X_1(t) \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{n-\gamma} \end{pmatrix} X_1^{-1}(s) \right| \leq k e^{-\beta(s-t)} \quad (t \leq s)$$

为了知道二分性究竟意味着什么, 我们可以将 (4.2) 改写成如下等价形式

$$\left. \begin{aligned} |X(t)P\xi| &\leq k |X(s)P\xi| e^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geq s) \\ |X(t)(I-P)\xi| &\leq k |X(s)(I-P)\xi| e^{-\beta(s-t)} \quad (s \geq t) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)'$$

这里 $\xi \in R^n$ 是任意的. 而常数 k 在数值上可能与 (4.2) 中的 k 不一样, 但都是正常数.

用 V_1 表示 P 的值域, 用 V_2 表示 P 的核, 则 $R^n = V_1 \dot{+} V_2$. 于是当 $x_0 \in V_1$ 时, 有

$$|X(t)x_0| \leq k |X(s)x_0| e^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geq s)$$

当 $x_0 \in V_2$ 时, 有

$$|X(t)x_0| \leq k |X(s)x_0| e^{-\beta(s-t)} \quad (t \leq s)$$

因此, 指数型二分性意味着当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有 γ 维指数型趋于零的解; 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, 有 $n - \gamma$ 维指数型趋于零的解.

下面我们来证明 (4.2) 与 (4.2)' 的等价性. 先证

引理 4.1 设 (4.2)' 成立, 则对任意 t 有

$$|X(t)PX^{-1}(t)| \leq M, \quad |X(t)(I-P)X^{-1}(t)| \leq M$$

其中 M 是正常数, 与 t 无关.

证明 设 $|A(t)| \leq \mu$, 则有

$$|X(t)X^{-1}(s)| \leq e^{\mu|t-s|} \quad (4.3)$$

由 (4.2)', 对任意 $h > 0$, 有

$$|X(t+h)PX^{-1}(t)| \leq k e^{-\alpha h} |X(t)PX^{-1}(t)|$$

$$|X(t+h)(I-P)X^{-1}(t)| \geq k^{-1} e^{\beta h} |X(t)(I-P)X^{-1}(t)|$$

记

$$\rho = |X(t)(I-P)X^{-1}(t)|, \sigma = |X(t)PX^{-1}(t)|$$

$$\gamma = k^{-1}e^{\beta h} - ke^{-\alpha h}$$

则有

$$|\rho^{-1}X(t+h)(I-P)X^{-1}(t) + \sigma^{-1}X(t+h)PX^{-1}(t)| \geq \gamma \quad (4.4)$$

取 $h > 0$ 充分大, 使 $\gamma > 0$, (4.4) 可写为

$$\begin{aligned} & |\rho^{-1}X(t+h)X^{-1}(t)X(t)(I-P)X^{-1}(t) \\ & + \sigma^{-1}X(t+h)X^{-1}(t)X(t)PX^{-1}(t)| \geq \gamma \end{aligned} \quad (4.5)$$

由 (4.3) 得 $|X(t+h)X^{-1}(t)| \leq e^{\mu h}$, 于是由 (4.5) 可得

$$|\rho^{-1}X(t)(I-P)X^{-1}(t) + \sigma^{-1}X(t)PX^{-1}(t)| \geq \gamma e^{-\mu h} \quad (4.6)$$

这一不等式左边还可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} |\sigma^{-1}I + (\rho^{-1} - \sigma^{-1})X(t)(I-P)X^{-1}(t)| & \leq \sigma^{-1} + |\rho^{-1} - \sigma^{-1}|\rho \\ & = \sigma^{-1}(1 + |\sigma - \rho|) \end{aligned} \quad (4.7)$$

另一方面, 由于

$$|\sigma - \rho| \leq |X(t)PX^{-1}(t) + X(t)(I-P)X^{-1}(t)| = |X(t)X^{-1}(t)| = 1 \quad (4.8)$$

现在, 由 (4.6) ~ (4.8) 式得 $2\sigma^{-1} \geq \gamma e^{-\mu h}$, 从而 $\sigma \leq 2e^{\mu h}\gamma^{-1}$. 另一式的证明是类似的. 证毕.

命题 4.1 条件 (4.2) 与条件 (4.2)' 是等价的.

证明 先证 (4.2) $\Rightarrow$ (4.2)', 由 (4.2) 的第一个式子

$$|X(t)PX^{-1}(s)| \leq ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geq s)$$

即

$$\sup_{\eta \neq 0} \frac{|X(t)PX^{-1}(s)\eta|}{|\eta|} \leq ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geq s)$$

取 $\eta = X(s)P\xi$, 则得

$$\sup_{P\xi \neq 0} \frac{|X(t)P\xi|}{|X(s)P\xi|} \leq ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geq s)$$

故当 $P\xi \neq 0$ 时, $|X(t)P\xi| \leq k|X(s)P\xi|e^{-\alpha(t-s)} (t \geq s)$. 当 $P\xi = 0$ 时上式仍然成立. 这就得到了 (4.2)' 的第一个式子. (4.2)' 的第二个式子的证明是类似的.

再证 (4.2)' $\Rightarrow$ (4.2), 设 (4.2)' 成立, 由引理 4.1, 对一切 t 有 $|X(t)PX^{-1}(t)| \leq M$, 即

$$\sup_{\eta \neq 0} \frac{|X(t)PX^{-1}(t)\eta|}{|\eta|} \leq M$$

取 $\eta = X(t)\xi$, 得 $\sup_{\xi \neq 0} \frac{|X(t)P\xi|}{|X(t)\xi|} \leq M$, 故对一切 t 有

$$|X(t)P\xi| \leq M|X(t)\xi| \quad (4.9)$$

由(4.2)'的第一个式子有

$$|X(t)P\xi| \leq k |X(s)P\xi| e^{-a(t-s)} \quad (t \geq s)$$

由(4.9)有

$$|X(t)P\xi| \leq kM |X(s)\xi| e^{-a(t-s)} \quad (t \geq s)$$

故当 $\xi \neq 0$ 时有

$$\begin{aligned} \frac{|X(t)P\xi|}{|X(s)\xi|} &\leq kMe^{-a(t-s)} \quad (t \geq s) \\ \sup_{\eta \neq 0} \frac{|X(t)P\xi|}{|X(s)\xi|} &\leq kMe^{-a(t-s)} \quad (t \geq s) \end{aligned}$$

取 $X(s)\xi = \eta$, 得

$$\sup_{\eta \neq 0} \frac{|X(t)PX^{-1}(s)\eta|}{|\eta|} \leq kMe^{-a(t-s)} \quad (t \geq s)$$

即

$$|X(t)PX^{-1}(s)| \leq kMe^{-a(t-s)} \quad (t \geq s)$$

所以(4.2)的第一个式子成立.(4.2)的第二个式子的证明是类似的. 证毕.

下面的命题揭示了指数型二分性的一个重要特性.

命题 4.2 若系统(4.1)在 R 上具有指数型二分性, 则(4.1)除了零解外没有其他有界解.

证明 设 $x(t)$ 是(4.1)的任一非零解, 记 $x(0) = x_0$. 则 $x(t) = X(t)X^{-1}(0)x_0 = X(t)PX^{-1}(0)x_0 + X(t)(I-P)X^{-1}(0)x_0$. 由于 $x_0 \neq 0$, 所以 $PX^{-1}(0)x_0$ 与 $(I-P)X^{-1}(0)x_0$ 中至少有一个不为零. 下面分两种情况考虑.

1. 若 $PX^{-1}(0)x_0 \neq 0$, 则令 $t \rightarrow -\infty$, 由(4.2)'的第一个式子得

$$|X(t)PX^{-1}(0)x_0| \geq k^{-1} |X(0)PX^{-1}(0)x_0| e^{-at} \rightarrow +\infty$$

由(4.2)'的第二个式子得

$$|X(t)(I-P)X^{-1}(0)x_0| \leq k |X(0)(I-P)X^{-1}(0)x_0| e^{+\beta t} \rightarrow 0$$

所以, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $|x(t)| \rightarrow +\infty$.

2. 若 $(I-P)X^{-1}(0)x_0 \neq 0$, 则令 $t \rightarrow +\infty$.

由(4.2)'的第一个式子得

$$|X(t)PX^{-1}(0)x_0| \leq k |X(0)PX^{-1}(0)x_0| e^{-at} \rightarrow 0$$

由(4.2)'的第二个式子得

$$|X(t)(I-P)X^{-1}(0)x_0| \geq k^{-1} |X(0)(I-P)X^{-1}(0)x_0| e^{+\beta t} \rightarrow +\infty$$

可见当 $t \rightarrow +\infty$, $|x(t)| \rightarrow +\infty$. 命题证毕.

注 若(4.1)仅在 R^+ (或 R^{-1}) 上具有指数型二分性, 则命题 4.2 不成立. 事实上若(4.1)在 R^+ 上有指数型二分性, 则(4.1)有 γ 维有界解, 这里 γ 是投影的秩数.

下面我们来说明二分性对于自治线性系究竟意味着什么, 这也有助于我们认

识二分性的实质.

命题 4.3 自治线性系 $x' = Ax$ 在 R 上具有指数型二分性当且仅当 A 的特征根实部异于零.

证明 设 A 的特征根实部异于零, 则存在非退化常数方阵 T 使

$$A = T \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix} T^{-1}$$

其中 A_1 的特征根实部为负, A_2 的特征根实部为正. 于是由命题 3.3, 命题 3.5 得

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & \\ & e^{A_2 t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

取投影方阵 $P = T \begin{pmatrix} I_\gamma & \\ & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$, 其中 I_γ 表示 γ 阶单位阵, 而 γ 是 A_1 的阶数. 于是

$$|e^{At} P e^{-As}| = \left| T \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & \\ & 0 \end{pmatrix} T^{-1} \right| \leq k e^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geq s)$$

$$|e^{At} (I - P) e^{-As}| = \left| T \begin{pmatrix} 0 & \\ & e^{A_2(t-s)} \end{pmatrix} T^{-1} \right| \leq k e^{-\beta(s-t)} \quad (t \leq s)$$

这里 k, α, β 皆为正数. 因此 $x' = Ax$ 具有指数型二分性.

反之, 设 A 有零实部的特征根, 则 $x' = Ax$ 必有非零有界解, 由命题 4.2, $x' = Ax$ 不具有指数型二分性. 证毕.

命题 4.4 自治线性系 $x' = Ax$ 在 R 上具有普通二分性, 当且仅当 A 的特征根实部为零者所对应的初等因子次数皆为 1.

证明 设 A 的特征根实部为零者所对应的初等因子次数皆为 1, 于是存在非退化常数方阵 T , 使

$$A = T \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

其中 A_1 的特征根实部为负, A_2 的特征根实部为正, A_0 的特征根实部为零. 由命题 3.3, 命题 3.5 得 $e^{At} = T \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & & \\ & e^{A_2 t} & \\ & & e^{A_0 t} \end{pmatrix} T^{-1}$, 其中 A_0 的初等因子的次数皆为 1.

取投影方阵 $P = T \begin{pmatrix} I_\gamma & & \\ & 0 & \end{pmatrix} T^{-1}$, 其中 I_γ 为 γ 阶单位阵, γ 是 A_1 的阶数, 于是

$$|e^{At} P e^{-As}| = \left| T \begin{pmatrix} e^{A_1(t-s)} & & \\ & 0 & \end{pmatrix} T^{-1} \right| \leq k e^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geq s) \quad (4.10)$$