面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

工科数学基础

下册

董加礼　孙丽华　主编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

工科数学基础

下册

董加礼 孙丽华 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

工科数学基础.下册/董加礼,孙丽华主编.—北京:
高等教育出版社,2002

高等工科院校教材
ISBN 7-04-010190-4

Ⅰ.工… Ⅱ.①董…②孙… Ⅲ.高等数学-高等
学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 064838 号

责任编辑 徐 刚 **封面设计** 张 楠 **版式设计** 马静如
责任校对 康晓燕 **责任印制** 杨 明

工科数学基础 下册
董加礼 孙丽华 主编

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
传 真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	国防工业出版社印刷厂		
开 本	787×960 1/16	**版 次**	2002 年 1 月第 1 版
印 张	29.75	**印 次**	2002 年 8 月第 3 次印刷
字 数	550 000	**定 价**	24.90 元

内容提要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材。

本书面向重点院校，兼顾一般院校。与其他同类教材相比，本书具有以下明显的特点：1.本书是模块式的分流培养教材，全书分为三个层次，第一层次适用于一般院校的多数专业及重点院校中对数学要求相对较少的少数专业；第二层次适用于重点院校的多数专业及一般院校中对数学要求较多的少数专业；第三层次适用于重点院校中对数学要求更高的少数专业及各专业中的数学爱好者。其关系是在第一层次的基础上讲第二层次，在第一、二层次的基础上讲第三层次，这样做符合21世纪初的教育发展规律，它适用于各种不同的教学要求，使用起来非常方便。2.强调发散思维教学。本书对最重要的概念和定理，尽可能地从几何或物理的实际背景提出问题，然后经过分析和论证上升到一般的概念和结论，最后归纳出定义和定理，这种富于启发式的写法有利于培养学生的创新意识和创新能力。3.对微积分的体系和内容作了一定的调整和改革。

本书为下册，主要内容为多元函数微积分，函数项级数及常微分方程，现代分析初步。上册主要内容为分析引论和一元函数微积分。

本书可供高等学校理工科非数学专业作为教材使用。

目　录

第三篇　多元函数微积分

第四篇 函数项级数及常微分方程

**第五篇　现代分析初步

第三篇　多元函数微积分

在第二篇中，我们讨论了一元函数微积分，其研究对象是仅依赖于一个自变量的一元函数．然而，在实际问题中经常会遇到两个甚至更多个自变量的所谓多元函数．因此，多元函数微积分应运而生．多元函数微积分的基本概念、理论和方法是一元函数微积分中相应概念、理论和方法的推广与发展，它们既有很多相似之处，又有许多不同之点．从一元函数微积分到二元函数微积分有不少本质上的飞跃，而从二元函数到三元以上的函数，则只有形式和技巧性的差别，并无本质上的不同．因此，读者在学习多元函数微积分时，要善于将它们与一元函数微积分进行比较，既要注意它们之间的共同点和相似之处，更要看到它们之间的区别．这样，才能深刻理解，融会贯通，收到事半功倍的效果．

第十章　多元函数的微分法

多元函数微分法是一元函数微分法的推广和发展．本章首先简要介绍 n 维空间中点集拓扑的初步知识，在此基础上将极限和连续的概念推广到多元函数；然后重点讨论多元函数的偏导数、全微分和微分法，多元函数的方向导数与梯度，向量值函数的微分法，多元函数的 Taylor 公式；最后讨论多元函数微分法的简单应用．

第一节　n 维空间中的点集拓扑简介

多元函数是本篇讨论的主要对象．由于 n 元函数的定义域是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的子集，因此，本节简单介绍 $\mathbf{R}^n$ 中的点集拓扑的一些基本知识．它们也是进一步学习现代分析的基础．

1.1　n 维空间概念

在线性代数中，我们曾学习过 n 维向量空间的概念，现将其中的主要内容概述如下．

我们将一个 n $(n\geqslant 2)$元有序实数组

$$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (x_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n)$$

叫做一个 n **维实的行向量**，简称为 n **维实向量**，并将全体 n 维实向量所构成的集合记为

$$\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\}.$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中任取两个向量

$$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad 和 \quad \boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

则两个向量的加法定义为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n),$$

数 $\lambda\in\mathbf{R}$ 与向量 $\boldsymbol{x}$ 的乘法为

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

$\mathbf{R}^n$ 在上述向量的线性运算下构成一个 n **维实向量空间**(或 n **维实线性空间**)，简称为 n **维空间**.

与直线 $\mathbf{R}$(一维空间)、平面 $\mathbf{R}^2$(二维空间)和三维空间 $\mathbf{R}^3$ 类似，n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的向量也称为**点**，向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量又称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个**坐标**，一般表为 x_i.

在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中，两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的距离定义为

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

可以验证，$\mathbf{R}^n$ 中的距离 $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$有下列性质：

1) **非负性** $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\geqslant 0$, $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$;

2) **对称性** $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;

3) **三角不等式** $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})+\rho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$.

n 维线性空间 $\mathbf{R}^n$ 中引进上述距离以后，称为 n **维线性距离空间**，仍简称为 n **维空间**，并仍记作 $\mathbf{R}^n$.

在 $\mathbf{R}^n$ 中，任意一点 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$与原点 $\boldsymbol{O}=(0, 0, \cdots, 0)$的距离

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{O})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{O}\|=\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

叫做 $\boldsymbol{x}$ 的**长**或**范数**.

1.2 n 维空间中点列的极限

利用 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中两点间的距离概念，便可将数列(即 $\mathbf{R}$ 中的点列)的极

限概念和相关性质等推广到 $\mathbf{R}^n$ 中的点列.

定义 1 设 $\{\boldsymbol{x}^m\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一点列，其中 $\boldsymbol{x}^m=(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})$ $(m=1,2,\cdots)$，$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一点. 如果当 $m\to\infty$ 时，$\rho(\boldsymbol{x}^m, \boldsymbol{a})$ 为无穷小量，即对任给的 $\varepsilon>0$(无论它多么小)，当 m 充分大以后，便有

$$\rho(\boldsymbol{x}^m, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{x}^m-\boldsymbol{a}\| < \varepsilon,$$

则说点列 $\{\boldsymbol{x}^m\}$ 当 $m\to\infty$ 时**有极限**，且**极限为** $\boldsymbol{a}$，简称 $\{\boldsymbol{x}^m\}$ **有极限** $\boldsymbol{a}$，或当 $m\to\infty$ 时，$\{\boldsymbol{x}^m\}$ **收敛于** $\boldsymbol{a}$，记作

$$\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{x}^m=\boldsymbol{a} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{x}^m\to\boldsymbol{a} \quad (m\to\infty).$$

否则，说该点列 $\{\boldsymbol{x}^m\}$ 当 $m\to\infty$ 时**没有极限**，或点列 $\{\boldsymbol{x}^m\}$ **发散**.

根据 $\mathbf{R}^n$ 中两点间的距离定义，对任何 i $(i=1,2,\cdots,n)$，恒有

$$|x_i^{(m)}-a_i|\leqslant\|\boldsymbol{x}^m-\boldsymbol{a}\|.$$

假设 $\lim\limits_{m\to\infty}\boldsymbol{x}^m=\boldsymbol{a}$，则对任给的 $\varepsilon>0$，当 m 充分大以后，便有

$$\|\boldsymbol{x}^m-\boldsymbol{a}\|<\varepsilon;$$

进而，当 m 充分大以后，对任何 i $(i=1,2,\cdots,n)$，均有

$$|x_i^{(m)}-a_i|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{m\to\infty}x_i^{(m)}=a_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

反之，若假设 $\lim\limits_{m\to\infty}x_i^{(m)}=a_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则对于任给的 $\varepsilon>0$ 和取定的 i $(i=1,2,\cdots,n)$，只要 m 充分大以后，便有

$$|x_i^{(m)}-a_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}};$$

从而，当 m 充分大以后，对一切 $i=1,2,\cdots,n$，总有

$$|x_i^{(m)}-a_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

于是

$$\|\boldsymbol{x}^m-\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(m)}-a_i)^2}<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{m\to\infty}\boldsymbol{x}^m=\boldsymbol{a}$.

综上所述，可得如下定理：

定理 1 设$\{\boldsymbol{x}^m\}$为$\mathbf{R}^n$中一点列，$\boldsymbol{a}$为$\mathbf{R}^n$中一点，则$\lim\limits_{m\to\infty}\boldsymbol{x}^m=\boldsymbol{a}$的充要条件是，对任何$i$ $(i=1,2,\cdots,n)$都有$\lim\limits_{m\to\infty}x_i^{(m)}=a_i$.

定理 1 表明，$\mathbf{R}^n$中点列$\{\boldsymbol{x}^m\}$收敛于$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$，与该点列的各个坐标所构成的数列$\{x_i^{(m)}\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$分别收敛于点$\boldsymbol{a}$的相应坐标a_i是等价的. 因此，$\mathbf{R}^n$中点列的收敛问题可以转化为实数列的收敛问题. 于是，第二章中所讨论过的收敛数列的一些性质就可以推广到n维空间$\mathbf{R}^n$中的收敛点列.

(1) 若$\{\boldsymbol{x}^m\}$是收敛点列，则$\{\boldsymbol{x}^m\}$的极限是唯一的.

(2) 若$\{\boldsymbol{x}^m\}$是收敛点列，则$\{\boldsymbol{x}^m\}$是有界点列，即存在正数M，使得对一切正整数m，总有$\|\boldsymbol{x}^m\|\leqslant M$.

(3) 若$\{\boldsymbol{x}^m\}$和$\{\boldsymbol{y}^m\}$是$\mathbf{R}^n$中的两个收敛点列，且极限分别为点$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，λ为一实数，则

1° $\lim\limits_{m\to\infty}(\boldsymbol{x}^m\pm\boldsymbol{y}^m)=\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$;

2° $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda\boldsymbol{x}^m=\lambda\boldsymbol{a}$;

3° $\lim\limits_{m\to\infty}\boldsymbol{x}^m(\boldsymbol{y}^m)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$，其中$(\boldsymbol{y}^m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$分别表示向量$\boldsymbol{y}^m$，$\boldsymbol{b}$的转置.

注意，n维空间$\mathbf{R}^n$中的两点(向量)不能比较大小，也不能相除. 因此，数列极限中与单调性、保号性、确界以及商的运算有关的概念与结论不能推广到$\mathbf{R}^n$中的点列.

习惯上，$\mathbf{R}^2$和$\mathbf{R}^3$中的点通常用$P(x,y)$和$M(x,y,z)$或P和M来表示.

1.3 n 维空间中点集的邻域、开集与区域

定义 2 设$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$，$\delta$为正实数，称点集

$$U(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta,\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\}$$

为点$\boldsymbol{a}$的δ**邻域**，称差集

$$U(\boldsymbol{a},\delta)\setminus\{\boldsymbol{a}\}$$

为点$\boldsymbol{a}$的**去心δ邻域**. 在不需要明确邻域的半径(δ)时，它们又分别简记为$U(\boldsymbol{a})$和$U(\boldsymbol{a})\setminus\{\boldsymbol{a}\}$.

在直线$\mathbf{R}$上，邻域$U(x_0,\delta)$就是开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$；在平面$\mathbf{R}^2$上，邻域$U(P_0,\delta)$就是以$P_0(x_0,y_0)$为中心，δ为半径的圆周$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\delta^2$内的所有点构成的集合，称为**开圆**；在空间$\mathbf{R}^3$中，点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的$\delta$邻域$U(M_0,\delta)$就是以$M_0$为中心，$\delta$为半径的球面$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\delta^2$内的所有点构成的集合，称为**开球**. 在$\mathbf{R}^n$中，邻域

$U(\boldsymbol{a},\delta)$亦称为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的**开球**.

在 $\mathbf{R}^n$ 中任取两点 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，称集合

$$\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中联结两点 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**直线段**.

下面给出开集和区域的概念.

定义 3　设 $E\subseteq\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{a}\in E$.

(1) 若存在 $\delta>0$，使 $U(\boldsymbol{a},\delta)\subseteq E$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为点集 E 的**内点**. 若 E 中的每一点都是它的内点，则称 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的**开集**；

(2) 若 $\boldsymbol{a}$ 的任一邻域内，既有 E 的点，也有不是 E 的点($\boldsymbol{a}$ 本身可以属于 E，也可以不属于 E)，则称 $\boldsymbol{a}$ 为 E 的**边界点**. E 的边界点的全体叫做 E 的**边界**，记作∂E.

(3) 若对 E 中任意两点 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都能用完全属于 E 的折线段联结起来，则称 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的**连通集**. 连通的开集称为**开区域**，简称为**区域**；若 E 是区域，则称 $E\cup\partial E$ 为**闭区域**.

例 1　设 $A=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$，$B=\{(x,y)\mid |x|\neq|y|\}$. 由定义 3 易知，$A$ 和 B 中的每一点均为它们的内点，因此 A 与 B 都是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集. 又 A 中的任意两点均可用完全属于 A 的折线联结起来，所以 A 是区域. 显然 A 的边界为圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 上的点，故 $A\cup\partial A=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$(如图 10.1(a))为闭区域. 点集 B 不具有连通性，如取 B 中的两个点$(1,0)$和$(0,-1)$，则无法用完全属于 B 的折线将它们联结，故 B 不构成区域(如图 10.1(b)).

在本段的最后，我们给出有界集的概念.

设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中一点集，如果存在一个正数 M，使得对于任何 $\boldsymbol{x}\in E$，均有

$$\|\boldsymbol{x}\|\leqslant M,$$

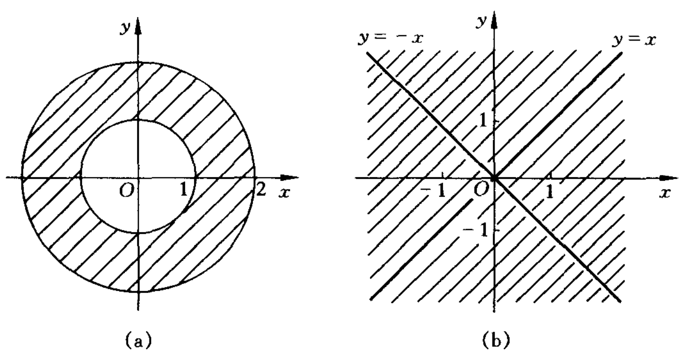

图 10.1

则称 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的**有界点集**，简称为**有界集**，否则，称 E 为**无界点集**或**无界集**. 显然例 1 中的 A 是有界集，B 是无界集.

*1.4 n 维空间中点集的聚点与闭集

定义 4 设 $E\subseteq\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$. 若点 $\boldsymbol{a}$ 的任何邻域内，除 $\boldsymbol{a}$ 外至少还包含 E 的一个点，则说 $\boldsymbol{a}$ 是点集 E 的**聚点**，E 中除聚点以外的点称为 E 的**孤立点**.

由点集 E 的全部聚点构成的集合称为 E 的**导集**，记作 E'. 若 $E\supseteq E'$，则称 E 为**闭集**. E 与 E' 之并集称为 E 的**闭包**，记作 $\bar{E}$，即 $\bar{E}=E\cup E'$.

显然，E 的内点都属于 E，但聚点不一定属于 E；E 的内点都是聚点，但聚点不一定是内点，因为聚点可能是边界点. 例如，$\mathbf{R}$ 中的开区间 (a, b) 内的点显然都是内点，也都是聚点，而端点 a 和 b 都是聚点，但不是内点. 闭区间 $[a, b]$ 也如此. 此外，由定义可知，内点(从而开集)与空间的维数有关，而聚点(从而闭集)则与空间的维数无关. 例如，开区间 (a, b) 内的点，在 $\mathbf{R}^2$ 中都不是内点，但仍是聚点.

按定义，E 的孤立点都是 E 的边界点，但反之不一定. 例如，$E=\left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ 的边界点集合为 $E\cup\{0\}$，但 0 不是孤立点，这里 0 是 E 的唯一聚点；又开区间 (a, b) 的端点显然是边界点，但不是孤立点.

因为区域具有连通性，其边界点不可能是孤立点，所以闭区域一定是闭集.

用反证法可以证明，若 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点，则 $\boldsymbol{a}$ 的任何邻域都包含 E 的无穷多个点. 由此可得到聚点的存在准则.

定理 2(聚点准则) 点 $\boldsymbol{a}$ 是点集 E 的聚点的充要条件是，E 中存在一列互异的点列 $\{\boldsymbol{x}^m\}$，使

$$\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{x}^m=\boldsymbol{a}.$$

证 充分性是显然的，下证必要性.

记 $r_m=\frac{1}{m}$，则 $\boldsymbol{a}$ 的每个邻域 $U(\boldsymbol{a}, r_m)$ 中都包含 E 的无穷多个点. 设已取出 m 个互异的点 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^m$，使 $\boldsymbol{x}^i\in E\cap U(\boldsymbol{a}, r_i)$ $(i=1,2,\cdots,m)$. 因为 $E\cap U(\boldsymbol{a}, r_{m+1})\setminus\{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^m\}\neq\varnothing$，故可取

$$\boldsymbol{x}^{m+1}\in E\cap U(\boldsymbol{a}, r_{m+1})\setminus\{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^m\},$$

显然 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^m, \boldsymbol{x}^{m+1}$ 互不相同，且都属于 E.

依此继续下去，由数学归纳法，可在 E 中选取一列互异的点列 $\{\boldsymbol{x}^m\}$，使

$x^m \in E \cap U(a, r_m)$ $(m=1,2,\cdots)$. 由于 $r_m=\frac{1}{m}\to 0$ $(m\to\infty)$，所以

$$\rho(x^m, a)\to 0 \qquad (m\to\infty),$$

即

$$\lim_{m\to\infty} x^m = a.$$

由定理 2 可知，点集 E 的聚点 a 等价于 a 是 E 中一列互异的点列的极限，因此聚点也叫**极限点**.

整个空间 $\mathbf{R}^n$ 显然既是开集又是闭集. 我们规定空集 $\varnothing$ 既是开集也是闭集（请读者解释这样的规定是合理的）. 此外，开集和闭集还具有如下简单性质，其证明留作习题.

性质 1　任意多个开集的并仍为开集.

性质 2　有限多个开集的交仍为开集.

性质 3　任意多个闭集的交仍为闭集.

性质 4　有限多个闭集的并仍为闭集.

性质 5　开集的余集为闭集，闭集的余集为开集，即若 $E\subseteq\mathbf{R}^n$ 是开集，则 $\mathscr{C}E$ 为闭集；若 $E\subseteq\mathbf{R}^n$ 是闭集，则 $\mathscr{C}E$ 为开集.

**1.5　n 维空间中开集的构造

为了展现开集的构成，特别是在学习第五篇现代分析初步时，界定开集测度的需要，本段讨论开集的构造问题.

设 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\in\mathbf{R}^n$，$b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)\in\mathbf{R}^n$，且 $a_i\leqslant b_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则称点集

$$\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中的 n **维闭区间**，记作 $[a, b]$. 显然，

$$[a, b]=[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\cdots\times[a_n, b_n].$$

当 $n=1$ 时，它就是 $\mathbf{R}^1$ 上的闭区间 $[a_1, b_1]$；当 $n=2$ 时，它是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的闭矩形域 $[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]$；当 $n=3$ 时，它是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的闭长方体 $[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times[a_3, b_3]$，它的长、宽、高分别为 b_1-a_1，b_2-a_2 和 b_3-a_3. 一般地，$[a, b]$ 也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的“**闭长方体**”. 特别当

$$a_1=a_2=\cdots=a_n<b_1=b_2=\cdots=b_n$$

时，$\mathbf{R}^n$ 中的闭区间 $[a, b]$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的“**闭正方体**”，而点集