



面向 21 世纪 课程 教材  
Textbook Series for 21st Century

# 工科数学基础

## 下 册

董加礼 孙丽华 主编



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪 课程教材  
Textbook Series for 21st Century

# 工科数学基础

下 册

董加礼 孙丽华 主编



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

## 图书在版编目(CIP)数据

工科数学基础.下册/董加礼,孙丽华主编.一北京:  
高等教育出版社,2002

高等工科院校教材

ISBN 7-04-010190-4

I.工… II.①董…②孙… III.高等数学-高等  
学校-教材 IV.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 064838 号

责任编辑 徐刚 封面设计 张楠 版式设计 马静如  
责任校对 康晓燕 责任印制 杨明

工科数学基础 下册  
董加礼 孙丽华 主编

---

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号  
邮政编码 100009  
传 真 010-64014048

购书热线 010-64054588  
免费咨询 800-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所  
印 刷 国防工业出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16  
印 张 29.75  
字 数 550 000

版 次 2002 年 1 月第 1 版  
印 次 2002 年 8 月第 3 次印刷  
定 价 24.90 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

## 内 容 提 要

本书是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材。

本书面向重点院校,兼顾一般院校。与其他同类教材相比,本书具有以下明显的特点:1. 本书是模块式的分流培养教材,全书分为三个层次,第一层次适用于一般院校的多数专业及重点院校中对数学要求相对较少的少数专业;第二层次适用于重点院校的多数专业及一般院校中对数学要求较多的少数专业;第三层次适用于重点院校中对数学要求更高的少数专业及各专业中的数学爱好者。其关系是在第一层次的基础上讲第二层次,在第一、二层次的基础上讲第三层次,这样做符合 21 世纪初的教育发展规律,它适用于各种不同的教学要求,使用起来非常方便。2. 强调发散思维教学。本书对最重要的概念和定理,尽可能地从几何或物理的实际背景提出问题,然后经过分析和论证上升到一般的概念和结论,最后归纳出定义和定理,这种富于启发式的写法有利于培养学生的创新意识和创新能力。3. 对微积分的体系和内容作了一定的调整和改革。

本书为下册,主要内容为多元函数微积分,函数项级数及常微分方程,现代分析初步。上册主要内容为分析引论和一元函数微积分。

本书可供高等学校理工科非数学专业作为教材使用。

# 目 录

## 第三篇 多元函数微积分

第十章 多元函数的微分法 .....	1
第一节 $n$ 维空间中的点集拓扑简介 .....	1
1.1 $n$ 维空间概念 .....	1
1.2 $n$ 维空间中点列的极限 .....	2
1.3 $n$ 维空间中点集的邻域、开集与区域 .....	4
*1.4 $n$ 维空间中点集的聚点与闭集 .....	6
**1.5 $n$ 维空间中开集的构造 .....	7
习题 10.1 .....	9
第二节 多元函数的极限与连续性 .....	10
2.1 多元函数概念 .....	11
2.2 多元函数的极限 .....	13
2.3 多元函数的连续性 .....	19
习题 10.2 .....	21
第三节 偏导数与全微分 .....	24
3.1 偏导数概念 .....	24
3.2 微分中值定理与增量公式 .....	28
3.3 全微分 .....	30
3.4 微分法则 .....	33
3.5 高阶偏导数 .....	33
*3.6 高阶全微分 .....	35
习题 10.3 .....	36
第四节 复合函数的微分法 .....	38
4.1 链式法则 .....	39
*4.2 一阶全微分形式不变性 .....	43
习题 10.4 .....	44
第五节 隐函数的微分法 .....	46
5.1 由一个方程确定的隐函数的微分法 .....	46
*5.2 由方程组所确定的隐函数的微分法 .....	49
*5.3 关于隐函数的存在性 .....	53
*5.4 Jacobi 行列式的性质 .....	55
习题 10.5 .....	56
第六节 方向导数与梯度 .....	59

6.1 方向导数概念 .....	59
6.2 数量场的梯度 .....	61
习题 10.6 .....	65
* 第七节 向量值函数及其微分法 .....	66
7.1 向量值函数概念 .....	67
7.2 向量值函数的极限与连续 .....	67
7.3 向量值函数的微分法 .....	68
* 习题 10.7 .....	70
第八节 多元函数的 Taylor 公式与极值问题 .....	71
* 8.1 $n$ 元函数的二阶 Taylor 公式 .....	71
8.2 无约束极值问题 .....	75
8.3 约束极值问题 .....	81
* 8.4 Lagrange 乘法 .....	83
** 8.5 最小二乘法 .....	86
习题 10.8 .....	88
第九节 多元函数微分法在几何上的简单应用 .....	90
9.1 空间曲线的切线与法平面 .....	90
9.2 曲面的切平面与法线 .....	93
习题 10.9 .....	95
<b>第十一章 重积分与第一型曲线、曲面积分</b> .....	97
第一节 重积分与第一型线、面积分的概念和性质 .....	97
1.1 几何形体及其度量 .....	97
1.2 几何形体上的质量问题 .....	98
1.3 几何形体上的积分概念 .....	99
1.4 几何形体上的积分的性质 .....	100
习题 11.1 .....	101
第二节 二重积分的计算 .....	103
2.1 二重积分的几何意义 .....	103
2.2 直角坐标系下二重积分的计算 .....	104
** 2.3 直角坐标系下二重积分计算公式的证明 .....	109
2.4 极坐标系下二重积分的计算 .....	111
* 2.5 二重积分的换元法 .....	115
习题 11.2 .....	121
第三节 三重积分的计算 .....	123
3.1 直角坐标系下三重积分的计算 .....	123
* 3.2 三重积分的换元法 .....	128
* 3.3 利用柱面坐标计算三重积分 .....	130
* 3.4 利用球面坐标计算三重积分 .....	132
习题 11.3 .....	134
第四节 第一型曲线与曲面积分的计算 .....	136
4.1 第一型曲线积分的计算 .....	136

4.2 曲面面积的计算 .....	139
4.3 第一型曲面积分的计算 .....	141
习题 11.4 .....	144
<b>第五节 重积分与第一型线、面积分的应用举例</b> .....	145
5.1 几何问题 .....	146
5.2 质心问题 .....	148
5.3 转动惯量问题 .....	151
习题 11.5 .....	152
<b>第六节 含参变量的积分与反常重积分</b> .....	153
* 6.1 积分限为常数的含参变量的积分 .....	154
* 6.2 积分限也含参变量的积分 .....	157
** 6.3 含参变量的反常积分 .....	159
** 6.4 反常重积分 .....	162
习题 11.6 .....	165
<b>第十二章 第二型曲线、曲面积分与场论初步</b> .....	168
<b>第一节 第二型曲线积分</b> .....	168
1.1 第二型曲线积分的概念及性质 .....	168
1.2 两类曲线积分之间的关系 .....	172
1.3 第二型曲线积分的计算 .....	173
习题 12.1 .....	178
<b>第二节 第二型曲面积分</b> .....	180
2.1 曲面的侧向问题 .....	181
2.2 第二型曲面积分的概念及性质 .....	181
2.3 第二型曲面积分的计算 .....	185
习题 12.2 .....	190
<b>* 第三节 各种积分之间的关系</b> .....	192
3.1 Green 公式 .....	192
3.2 Gauss 公式 .....	198
3.3 Stokes 公式 .....	202
* 习题 12.3 .....	204
<b>* 第四节 平面曲线积分与路径无关的条件</b> .....	207
4.1 引例 .....	207
4.2 第二型曲线积分与路径无关的条件 .....	209
4.3 势函数概念及其求法 .....	214
4.4 一阶全微分方程及其解法 .....	216
* 习题 12.4 .....	220
<b>** 第五节 场论简介</b> .....	222
5.1 等值面与向量线 .....	222
5.2 向量场的散度 .....	223
5.3 向量场的旋度 .....	229
5.4 几类特殊的场 .....	234

**习题 12.5 .....	235
<b>第四篇 函数项级数及常微分方程</b>	
<b>第十三章 函数项级数 .....</b>	<b>237</b>
<b>第一节 函数项级数的处处收敛与一致收敛 .....</b>	<b>237</b>
1.1 函数项级数的处处收敛性 .....	238
**1.2 函数项级数的一致收敛概念 .....	239
**1.3 函数项级数的一致收敛判别法 .....	241
**1.4 一致收敛级数的和函数的性质 .....	243
习题 13.1 .....	245
<b>第二节 幂级数 .....</b>	<b>247</b>
2.1 幂级数的收敛半径与收敛区间 .....	247
2.2 幂级数的运算 .....	251
2.3 函数展开成幂级数 .....	255
2.4 初等函数的幂级数展开 .....	256
2.5 幂级数的应用举例 .....	259
习题 13.2 .....	262
<b>第三节 Fourier 级数 .....</b>	<b>263</b>
3.1 三角函数系的正交性 .....	264
3.2 以 $2\pi$ 为周期的函数的 Fourier 级数 .....	265
3.3 以 $2l$ 为周期的函数的 Fourier 级数 .....	271
**3.4 Fourier 级数的复数形式 .....	275
习题 13.3 .....	276
<b>第十四章 常微分方程 .....</b>	<b>279</b>
* <b>第一节 微分方程的几个基本问题 .....</b>	<b>279</b>
1.1 引入微分方程的几个典型问题 .....	279
1.2 关于微分方程组的一些概念 .....	282
1.3 高阶方程与一阶方程组的关系 .....	284
*习题 14.1 .....	286
* <b>第二节 线性微分方程与线性微分方程组通解的结构 .....</b>	<b>287</b>
2.1 线性微分方程通解的结构 .....	287
2.2 线性微分方程组通解的结构 .....	291
*习题 14.2 .....	295
* <b>第三节 高阶常系数线性微分方程的解法 .....</b>	<b>297</b>
3.1 高阶常系数齐次线性微分方程的解法 .....	298
3.2 高阶常系数非齐次线性微分方程的解法 .....	302
*习题 14.3 .....	309
* <b>第四节 常系数线性微分方程组的解法 .....</b>	<b>312</b>
4.1 常系数齐次线性微分方程组的解法 .....	312
4.2 常系数非齐次线性方程组的解法 .....	320
*习题 14.4 .....	324



第五节 变系数线性微分方程的解法 .....	326
* 5.1 Euler 方程 .....	327
* 5.2 降阶法 .....	329
** 5.3 幂级数解法 .....	331
习题 14.5 .....	334
* 第六节 微分方程应用举例 .....	336
6.1 传染病传播的数学模型 .....	336
6.2 Lanchester 作战模型与硫黄岛战役 .....	340
* 习题 14.6 .....	343
** 第七节 稳定性理论简介 .....	344
7.1 引例 .....	345
7.2 稳定性理论简介 .....	346
** 习题 14.7 .....	355
<b>** 第五篇 现代分析初步</b>	
** 第十五章 Lebesgue 积分大意 .....	359
第一节 $n$ 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中点集的测度 .....	360
1.1 有界开集、闭集的测度 .....	360
1.2 一般有界集的测度 .....	362
1.3 无界集的测度 .....	367
1.4 可测集类 .....	367
习题 15.1 .....	368
第二节 可测函数 .....	368
2.1 可测函数概念 .....	368
2.2 可测函数的性质 .....	370
习题 15.2 .....	372
第三节 Lebesgue 积分及其性质 .....	372
3.1 测度有限的集上有界函数的积分 .....	373
3.2 测度有限的集上一般函数的积分 .....	377
3.3 测度无限的集上的积分 .....	383
3.4 Lebesgue 控制收敛定理及 Fubini 定理 .....	383
习题 15.3 .....	386
** 第十六章 无穷维空间简介 .....	387
第一节 距离空间 .....	388
1.1 距离空间概念及其极限 .....	388
1.2 距离空间的完备性 .....	393
1.3 距离空间的紧致性 .....	394
习题 16.1 .....	396
第二节 线性赋范空间及线性有界算子 .....	397
2.1 线性赋范空间概念 .....	397

---

2.2 线性有界算子 .....	400
习题 16.2 .....	402
<b>第三节 内积空间与 Fourier 分析 .....</b>	<b>403</b>
3.1 内积与内积空间 .....	403
3.2 正交与投影定理 .....	407
3.3 标准正交系与 Fourier 级数 .....	408
3.4 关于 Fourier 级数的收敛性问题 .....	409
习题 16.3 .....	412
<b>第四节 不动点定理及其应用 .....</b>	<b>413</b>
4.1 不动点概念与不动点定理 .....	413
4.2 Banach 压缩映射不动点定理 .....	414
4.3 应用举例 .....	415
习题 16.4 .....	417
<b>习题答案与提示 .....</b>	<b>418</b>
<b>主要参考书 .....</b>	<b>464</b>

## 第三篇 多元函数微积分

在第二篇中,我们讨论了一元函数微积分,其研究对象是仅依赖于一个自变量的一元函数.然而,在实际问题中经常会遇到两个甚至更多个自变量的所谓多元函数.因此,多元函数微积分应运而生.多元函数微积分的基本概念、理论和方法是一元函数微积分中相应概念、理论和方法的推广与发展,它们既有很多相似之处,又有许多不同之点.从一元函数微积分到二元函数微积分有不少本质上的飞跃,而从二元函数到三元以上的函数,则只有形式和技巧性的差别,并无本质上的不同.因此,读者在学习多元函数微积分时,要善于将它们与一元函数微积分进行比较,既要注意它们之间的共同点和相似之处,更要看到它们之间的区别.这样,才能深刻理解,融会贯通,收到事半功倍的效果.

### 第十章 多元函数的微分法

多元函数微分法是一元函数微分法的推广和发展.本章首先简要介绍  $n$  维空间中点集拓扑的初步知识,在此基础上将极限和连续的概念推广到多元函数;然后重点讨论多元函数的偏导数、全微分和微分法,多元函数的方向导数与梯度,向量值函数的微分法,多元函数的 Taylor 公式;最后讨论多元函数微分法的简单应用.

#### 第一节 $n$ 维空间中的点集拓扑简介

多元函数是本篇讨论的主要对象.由于  $n$  元函数的定义域是  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$  中的子集,因此,本节简单介绍  $\mathbf{R}^n$  中的点集拓扑的一些基本知识.它们也是进一步学习现代分析的基础.

##### 1.1 $n$ 维空间概念

在线性代数中,我们曾学习过  $n$  维向量空间的概念,现将其中的主要内容概述如下.

我们将一个  $n$  ( $n \geq 2$ ) 元有序实数组

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n)$$

叫做一个  $n$  维实的行向量, 简称为  $n$  维实向量, 并将全体  $n$  维实向量所构成的集合记为

$$\mathbf{R}^n = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

在  $\mathbf{R}^n$  中任取两个向量

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{和} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

则两个向量的加法定义为

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

数  $\lambda \in \mathbf{R}$  与向量  $\mathbf{x}$  的乘法为

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

$\mathbf{R}^n$  在上述向量的线性运算下构成一个  $n$  维实向量空间(或  $n$  维实线性空间), 简称为  $n$  维空间.

与直线  $\mathbf{R}$ (一维空间)、平面  $\mathbf{R}^2$ (二维空间)和三维空间  $\mathbf{R}^3$  类似,  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$  中的向量也称为点, 向量  $\mathbf{x}$  的第  $i$  个分量又称为点  $\mathbf{x}$  的第  $i$  个坐标, 一般表为  $x_i$ .

在  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$  中, 两点  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  之间的距离定义为

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

可以验证,  $\mathbf{R}^n$  中的距离  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  有下列性质:

- 1) 非负性  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ,  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  当且仅当  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ;
- 2) 对称性  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ;
- 3) 三角不等式  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ .

$n$  维线性空间  $\mathbf{R}^n$  中引进上述距离以后, 称为  $n$  维线性距离空间, 仍简称为  $n$  维空间, 并仍记作  $\mathbf{R}^n$ .

在  $\mathbf{R}^n$  中, 任意一点  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  与原点  $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0)$  的距离

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{O}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{O}\| = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

叫做  $\mathbf{x}$  的长或范数.

## 1.2 $n$ 维空间中点列的极限

利用  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$  中两点间的距离概念, 便可将数列(即  $\mathbf{R}$  中的点列)的极

限概念和相关性质等推广到  $\mathbf{R}^n$  中的点列.

**定义 1** 设  $\{x^m\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的一点列, 其中  $x^m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$  ( $m=1, 2, \dots$ ),  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  是  $\mathbf{R}^n$  中的一点. 如果当  $m \rightarrow \infty$  时,  $\rho(x^m, a)$  为无穷小量, 即对任给的  $\varepsilon > 0$  (无论它多么小), 当  $m$  充分大以后, 便有

$$\rho(x^m, a) = \|x^m - a\| < \varepsilon,$$

则说点列  $\{x^m\}$  当  $m \rightarrow \infty$  时有极限, 且极限为  $a$ , 简称  $\{x^m\}$  有极限  $a$ , 或当  $m \rightarrow \infty$  时,  $\{x^m\}$  收敛于  $a$ , 记作

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a \quad \text{或} \quad x^m \rightarrow a \quad (m \rightarrow \infty).$$

否则, 说该点列  $\{x^m\}$  当  $m \rightarrow \infty$  时没有极限, 或点列  $\{x^m\}$  发散.

根据  $\mathbf{R}^n$  中两点间的距离定义, 对任何  $i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 恒有

$$|x_i^{(m)} - a_i| \leq \|x^m - a\|.$$

假设  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a$ , 则对任给的  $\varepsilon > 0$ , 当  $m$  充分大以后, 便有

$$\|x^m - a\| < \varepsilon;$$

进而, 当  $m$  充分大以后, 对任何  $i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 均有

$$|x_i^{(m)} - a_i| < \varepsilon,$$

故  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

反之, 若假设  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 则对于任给的  $\varepsilon > 0$  和取定的  $i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 只要  $m$  充分大以后, 便有

$$|x_i^{(m)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}};$$

从而, 当  $m$  充分大以后, 对一切  $i=1, 2, \dots, n$ , 总有

$$|x_i^{(m)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

于是

$$\|x^m - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(m)} - a_i)^2} < \varepsilon,$$

故  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a$ .

综上所述, 可得如下定理:

**定理 1** 设  $\{x^m\}$  为  $\mathbf{R}^n$  中一点列,  $a$  为  $\mathbf{R}^n$  中一点, 则  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a$  的充要条件是, 对任何  $i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 都有  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = a_i$ .

定理 1 表明,  $\mathbf{R}^n$  中点列  $\{x^m\}$  收敛于  $a \in \mathbf{R}^n$ , 与该点列的各个坐标所构成的数列  $\{x_i^{(m)}\}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 分别收敛于点  $a$  的相应坐标  $a_i$  是等价的. 因此,  $\mathbf{R}^n$  中点列的收敛问题可以转化为实数列的收敛问题. 于是, 第二章中所讨论过的收敛数列的一些性质就可以推广到  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$  中的收敛点列.

(1) 若  $\{x^m\}$  是收敛点列, 则  $\{x^m\}$  的极限是唯一的.

(2) 若  $\{x^m\}$  是收敛点列, 则  $\{x^m\}$  是有界点列, 即存在正数  $M$ , 使得对一切正整数  $m$ , 总有  $\|x^m\| \leq M$ .

(3) 若  $\{x^m\}$  和  $\{y^m\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的两个收敛点列, 且极限分别为点  $a$  和  $b$ ,  $\lambda$  为一实数, 则

$$1^\circ \lim_{m \rightarrow \infty} (x^m \pm y^m) = a \pm b;$$

$$2^\circ \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda x^m = \lambda a;$$

$$3^\circ \lim_{m \rightarrow \infty} x^m (y^m)^T = ab^T, \text{ 其中 } (y^m)^T, b^T \text{ 分别表示向量 } y^m, b \text{ 的转置.}$$

注意,  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$  中的两点(向量)不能比较大小, 也不能相除. 因此, 数列极限中与单调性、保号性、确界以及商的运算有关的概念与结论不能推广到  $\mathbf{R}^n$  中的点列.

习惯上,  $\mathbf{R}^2$  和  $\mathbf{R}^3$  中的点通常用  $P(x, y)$  和  $M(x, y, z)$  或  $P$  和  $M$  来表示.

### 1.3 $n$ 维空间中点集的邻域、开集与区域

**定义 2** 设  $a \in \mathbf{R}^n$ ,  $\delta$  为正实数, 称点集

$$U(a, \delta) = \{x \mid \|x - a\| < \delta, x \in \mathbf{R}^n\}$$

为点  $a$  的  $\delta$  邻域, 称差集

$$U(a, \delta) \setminus \{a\}$$

为点  $a$  的去心  $\delta$  邻域. 在不需要明确邻域的半径( $\delta$ )时, 它们又分别简记为  $U(a)$  和  $U(a) \setminus \{a\}$ .

在直线  $\mathbf{R}$  上, 邻域  $U(x_0, \delta)$  就是开区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ; 在平面  $\mathbf{R}^2$  上, 邻域  $U(P_0, \delta)$  就是以  $P_0(x_0, y_0)$  为中心,  $\delta$  为半径的圆周  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \delta^2$  内的所有点构成的集合, 称为开圆; 在空间  $\mathbf{R}^3$  中, 点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  的  $\delta$  邻域  $U(M_0, \delta)$  就是以  $M_0$  为中心,  $\delta$  为半径的球面  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \delta^2$  内的所有点构成的集合, 称为开球. 在  $\mathbf{R}^n$  中, 邻域

$U(a, \delta)$  亦称为  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$  中的开球.

在  $\mathbf{R}^n$  中任取两点  $a$  与  $b$ , 称集合

$$\{x \mid x = a + t(b - a), 0 \leq t \leq 1\}$$

为  $\mathbf{R}^n$  中联结两点  $a$  与  $b$  的直线段.

下面给出开集和区域的概念.

**定义 3** 设  $E \subseteq \mathbf{R}^n, a \in E$ .

(1) 若存在  $\delta > 0$ , 使  $U(a, \delta) \subseteq E$ , 则称  $a$  为点集  $E$  的内点. 若  $E$  中的每一点都是它的内点, 则称  $E$  为  $\mathbf{R}^n$  中的开集;

(2) 若  $a$  的任一邻域内, 既有  $E$  的点, 也有不是  $E$  的点 ( $a$  本身可以属于  $E$ , 也可以不属于  $E$ ), 则称  $a$  为  $E$  的边界点.  $E$  的边界点的全体叫做  $E$  的边界, 记作  $\partial E$ .

(3) 若对  $E$  中任意两点  $a$  与  $b$  都能用完全属于  $E$  的折线段联结起来, 则称  $E$  为  $\mathbf{R}^n$  中的连通集. 连通的开集称为开区域, 简称为区域; 若  $E$  是区域, 则称  $E \cup \partial E$  为闭区域.

**例 1** 设  $A = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ ,  $B = \{(x, y) \mid |x| \neq |y|\}$ . 由定义 3 易知,  $A$  和  $B$  中的每一点均为它们的内点, 因此  $A$  与  $B$  都是  $\mathbf{R}^2$  中的开集. 又  $A$  中的任意两点均可用完全属于  $A$  的折线联结起来, 所以  $A$  是区域. 显然  $A$  的边界为圆周  $x^2 + y^2 = 1$  和  $x^2 + y^2 = 4$  上的点, 故  $A \cup \partial A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$  (如图 10.1(a)) 为闭区域. 点集  $B$  不具有连通性, 如取  $B$  中的两个点  $(1, 0)$  和  $(0, -1)$ , 则无法用完全属于  $B$  的折线将它们联结, 故  $B$  不构成区域 (如图 10.1(b)).

在本段的最后, 我们给出有界集的概念.

设  $E$  是  $\mathbf{R}^n$  中一点集, 如果存在一个正数  $M$ , 使得对于任何  $x \in E$ , 均有

$$\|x\| \leq M,$$

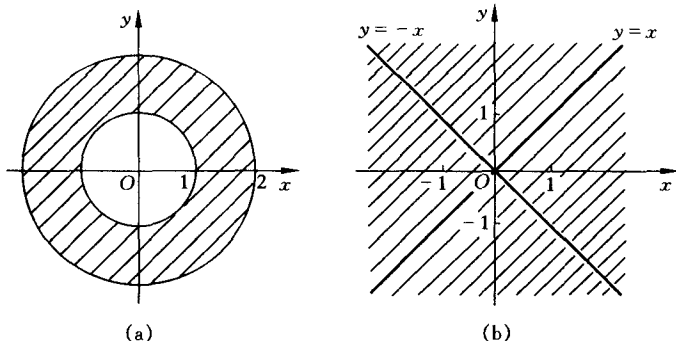


图 10.1

则称  $E$  为  $\mathbf{R}^n$  中的有界点集, 简称为有界集, 否则, 称  $E$  为无界点集或无界集. 显然例 1 中的  $A$  是有界集,  $B$  是无界集.

### \* 1.4 $n$ 维空间中点集的聚点与闭集

**定义 4** 设  $E \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $a \in \mathbf{R}^n$ . 若点  $a$  的任何邻域内, 除  $a$  外至少还包含  $E$  的一个点, 则说  $a$  是点集  $E$  的聚点,  $E$  中除聚点以外的点称为  $E$  的孤立点.

由点集  $E$  的全部聚点构成的集合称为  $E$  的导集, 记作  $E'$ . 若  $E \supseteq E'$ , 则称  $E$  为闭集.  $E$  与  $E'$  之并集称为  $E$  的闭包, 记作  $\bar{E}$ , 即  $\bar{E} = E \cup E'$ .

显然,  $E$  的内点都属于  $E$ , 但聚点不一定属于  $E$ ;  $E$  的内点都是聚点, 但聚点不一定是内点, 因为聚点可能是边界点. 例如,  $\mathbf{R}$  中的开区间  $(a, b)$  内的点显然都是内点, 也都是聚点, 而端点  $a$  和  $b$  都是聚点, 但不是内点. 闭区间  $[a, b]$  也如此. 此外, 由定义可知, 内点(从而开集)与空间的维数有关, 而聚点(从而闭集)则与空间的维数无关. 例如, 开区间  $(a, b)$  内的点, 在  $\mathbf{R}^2$  中都不是内点, 但仍是聚点.

按定义,  $E$  的孤立点都是  $E$  的边界点, 但反之不一定. 例如,  $E = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$  的边界点集合为  $E \cup \{0\}$ , 但  $0$  不是孤立点, 这里  $0$  是  $E$  的唯一聚点; 又开区间  $(a, b)$  的端点显然是边界点, 但不是孤立点.

因为区域具有连通性, 其边界点不可能是孤立点, 所以闭区域一定是闭集.

用反证法可以证明, 若  $a$  是  $E$  的聚点, 则  $a$  的任何邻域都包含  $E$  的无穷多个点. 由此可得到聚点的存在准则.

**定理 2(聚点准则)** 点  $a$  是点集  $E$  的聚点的充要条件是,  $E$  中存在一系列互异的点列  $\{x^m\}$ , 使

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a.$$

**证** 充分性是显然的, 下证必要性.

记  $r_m = \frac{1}{m}$ , 则  $a$  的每个邻域  $U(a, r_m)$  中都包含  $E$  的无穷多个点. 设已取出  $m$  个互异的点  $x^1, x^2, \dots, x^m$ , 使  $x^i \in E \cap U(a, r_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). 因为  $E \cap U(a, r_{m+1}) \setminus \{x^1, x^2, \dots, x^m\} \neq \emptyset$ , 故可取

$$x^{m+1} \in E \cap U(a, r_{m+1}) \setminus \{x^1, x^2, \dots, x^m\},$$

显然  $x^1, x^2, \dots, x^m, x^{m+1}$  互不相同, 且都属于  $E$ .

依此继续下去, 由数学归纳法, 可在  $E$  中选取一系列互异的点列  $\{x^m\}$ , 使



$x^m \in E \cap U(a, r_m)$  ( $m=1, 2, \dots$ ). 由于  $r_m = \frac{1}{m} \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow \infty$ ), 所以

$$\rho(x^m, a) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty),$$

即

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a.$$

由定理 2 可知, 点集  $E$  的聚点  $a$  等价于  $a$  是  $E$  中一系列互异的点列的极限, 因此聚点也叫极限点.

整个空间  $\mathbf{R}^n$  显然既是开集又是闭集. 我们规定空集  $\emptyset$  既是开集也是闭集 (请读者解释这样的规定是合理的). 此外, 开集和闭集还具有如下简单性质, 其证明留作习题.

**性质 1** 任意多个开集的并仍为开集.

**性质 2** 有限多个开集的交仍为开集.

**性质 3** 任意多个闭集的交仍为闭集.

**性质 4** 有限多个闭集的并仍为闭集.

**性质 5** 开集的余集为闭集, 闭集的余集为开集, 即若  $E \subseteq \mathbf{R}^n$  是开集, 则  $\mathcal{C}E$  为闭集; 若  $E \subseteq \mathbf{R}^n$  是闭集, 则  $\mathcal{C}E$  为开集.

### \*\* 1.5 $n$ 维空间中开集的构造

为了展现开集的构成, 特别是在学习第五篇现代分析初步时, 界定开集测度的需要, 本段讨论开集的构造问题.

设  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ , 且  $a_i \leq b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则称点集

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为  $\mathbf{R}^n$  中的  $n$  维闭区间, 记作  $[a, b]$ . 显然,

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

当  $n=1$  时, 它就是  $\mathbf{R}^1$  上的闭区间  $[a_1, b_1]$ ; 当  $n=2$  时, 它是平面  $\mathbf{R}^2$  上的闭矩形域  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ; 当  $n=3$  时, 它是空间  $\mathbf{R}^3$  中的闭长方体  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ , 它的长、宽、高分别为  $b_1 - a_1$ ,  $b_2 - a_2$  和  $b_3 - a_3$ . 一般地,  $[a, b]$  也称为  $\mathbf{R}^n$  中的“闭长方体”. 特别当

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n < b_1 = b_2 = \dots = b_n$$

时,  $\mathbf{R}^n$  中的闭区间  $[a, b]$  称为  $\mathbf{R}^n$  中的“闭正方体”, 而点集