误差和经验公式

孙鸿燮編著

煤炭工业出版社

內容提要

本書由微分常識講起，順序地講到算术运算、誤差理論和經驗公式；目的在于帮助沒有上过大学或沒有學过高等数学的工程技术人員能够初步运用微分和最小二乘法、掌握誤差理論和經驗公式。書內实例很多，对于每一理論或公式几乎都举有具体实例，对于不同的理論或公式有时还用同一实例来說明；不但便于理解，也便于比較。

1101

誤差和經驗公式

孙鸿燮編著

*

煤炭工业出版社出版(社址：北京东長安街煤炭工業部)

北京市書刊出版業營業許可証出字第084号

煤炭工业出版社印刷厂排印　　新华書店发行

*

开本787×1092公厘$\frac{1}{32}$　印張4$\frac{3}{4}$　字數78,000

1959年3月北京第1版　　1959年3月北京第1次印刷

統一書号：15035·802　印數：0,001—5,000册　定价：0.62元

目　录

第一章 緒　言

第1节 应用数学并不难懂

从前有很多人对应用数学是陌生的，把其中比較簡单的誤差理論和最小二乘法也看成是很神秘的东西，認为那是搞天文工作或精密測量工作的专用品。写这本書的目的，首先就是要打破这种迷信的看法。

作技术工作，就要掌握数字；如果要对数字作到心中有数，就須有一定的誤差理論知識。目前，对于每一个技术工作人員来說，都要求他作研究工作，也就是要求他把日常积累的实际数据上升为理論，进而找出科学数据的函数关系和經驗公式来。所以，每一个技术人員也都需要有一点最小二乘法和图解法的知識。

誤差理論和最小二乘法并不是什么高深莫測的东西，了解它們也不需要很高的数学基础。学过微分的不必講，即使沒有上过大学的，照样可以得到一些必要的知識，并且可以作到正确地解决一般的实际問題。对于数学基础較差的同志，这里准备了微分常識一章，介紹一些基本常識；讀者从这一章里可以得到閱讀本書所必需的东西。

这本書是常識書，很多地方不能談得很深入很清楚，如果要求进一步学通、学透，每一細微情况都要知其所以然，当然仍須去閱讀专書。不过，对于未曾学过誤差理論和未曾接触过經驗公式方法的同志来說，在得到了一些这

样的初步知識以后，不但可以立刻与工作联系起来和在一般实际問题上加以运用；而且在有了基础知識和概念之后，再去看专門書籍也会感到便利易懂。

誤差理論和最小二乘法在应用数学中是比較浅显的。这些理論也不外是从实际工作中总結出来的。如果有了一些基础知識并且經常地运用和提高，每个人都能够把它們掌握住。所以說，应用数学并不神秘，也不难懂。

第2节 誤差問題不容忽視

凡是工程技术工作都有一定的工作程序和步驟，而每一步驟与最后的結果都有密切关系，对每一步驟也就应有一定的質量要求。如果这一步驟能够用度量或观測的数字表现出来，那么，对于它的質量就要求具有一定的精密程度或具有一定限度的誤差。如果質量低了，則将来的結果即会受到影响，因而不能滿足預定的要求。如果質量高了，則将作很多沒有必要的工作，因而造成浪費。由于心中无数而造成浪費的严重性有时是不很容易被認識到的；对于有保守思想的人来說，更难以查覺到自己有这样的缺点。

譬如，某一勘探队在作抽水試驗时，曾用裘布依公式来計算滲透系数，公式的形式如下：

$$K=0.73Q\frac{A}{B}.$$

上式中，A、B都是函数关系式，为了簡便，才写作上式。那个勘探队用的是7位对数表，原始数据采取很

多位；搖計算机計算时，也尽量多算几位数据，以求“准确”。計算結果一律取到小数第四位。有三个K值的計算結果是：23.1385、0.7612、0.0002。但是我們認为这样作并不妥当；因为，公式中的常数是0.73，只有两位有效数字；只要利用这个公式，所得的K值至多也就只能有两位有效数字。所以，前两个K值的結果就只能是23和0.76；其余的小数虽然也有数字写在那里，却是毫无意义的虛构的精密；因此，很多时間都因追求这种虛构的精密而白白浪費掉。最后的一个K值却只有一位有效数字，恰好与以上两个K值情况相反；这是为了迁就同样的小数位数，把公式所能达到的精密度也牺牲掉了，正确的作法是再多計算出一位来。类似上述情况在工作中并不是很少見的，这也就是对数值的精密度心中无数的結果。沒有誤差的正确知識，发生这样的事情，是不足为奇的。

在煤矿生产、地質計算工作中，最常遇到的是計算埋藏量。譬如，在預計将要投入生产的一个掌子的埋藏量时，有人作得这样仔細：用鋼尺量了掌子沿走向长度，又在各上山尽可能多的地方量得将来掌子面长度及煤层厚度。尤其是对于煤层厚度，采取了很多度量值的平均值；甚至把整个掌子分成很多小块，分别計算，然后再加起来。經过这样的仔細計算，得到的总容积是：132578.3立方公尺。由化驗部門取得容重数字是1.4。将二者相乘得出的埋藏量为185609.62吨。但在这个很平常的計算中，就存在着严重的問題。問題就在于容重数字的精密度不够，只有两位有效数字。因此，縱令其它因素曾經作了极

精确的测量，也因容重一个数字不够准确而白費了力气。在算出来的185609.62吨中，只有两位数字是有把握的，即180000吨或四捨五入为190000吨，其余不可靠的虚伪数字竟达几千吨之巨。这还不很成問題嗎？为了提高容重数字的精密度，就有必要作专門的标定，就是：把大片已知容积的煤采出来再称实际重量。这样作起来，是很麻烦的。有很多同志对这一項工作因嫌麻煩而沒有給予足够的重視。这正好說明了誤差問題或精密度問題是容易被忽略的。

由以上的例子可以看到下列两种情况：

1.某一个环节的精密度不足，即足以影响到計算結果的質量，并使其它环节的工作在一定程度上变为无用。

2.追求虚构的精度，是白白浪費时間。

一項計算工作是如此，在生产上或試驗室各工作环节的配合中也莫不如此。地質勘探有普查、詳查、精查，生产中則有准备、开采、运輸、提升、篩选等工作环节；試驗室中，由被处理的对象的备制，經过一系列試驗步驟，直到作出預期結果，也有一系列工作环节。在这些作业中，是不是已經正規化了，有沒有操作規程，对每一工作环节有沒有一定的質量要求以及是否合理，这些問題都是与誤差問題或精密度問題有关的問題。至于有哪个环节存在着关鍵性的問題，如何发掘，如何解决，对这一关鍵环节的質量要求应該如何等問題，也都与誤差問題有关。

苏联在过去也曾有过在誤差問題上造成浪費的情况。譬如，克娄洛夫院士曾經指出：“在过去工厂向莫斯科建

筑委員会提出的計划中，有$\frac{9}{10}$、有时甚至$\frac{34}{35}$的計算工作，白白化費在計算过多的数字位数上”。别席考維奇教授也曾举出一个气象台的例子：在那里对于高空测风的計算工作，曾經需要两个多小时；后来同样的工作十分鐘就完成了，所要求的精确度并沒有受到影响。可見我們有許多同志对于自己的工作心中无数，原也不必大惊小怪；問題在于我們是否甘于停留在心中无数的状态下。多快好省并不允許我們甘居中、下游；所以說，搞技术工作的人必須懂以至精通誤差。目前，将这个口号提出来，已經是很适时的了。

第3节 人人都能掌握理論

在技术革命的大跃进中，要求人人都作研究工作。工农群众大量发明家的涌出，給科学技术人員以莫大的鼓舞。在新的形势下，每个人都不应满足于按步就班地、慢騰騰地前进。研究工作必須由权威专家来作的迷信已被粉碎，学院式的研究也早已被否定了。有人就問：每一个技术工作人員都能掌握理論嗎？这个問題的答案应該是十分肯定的。

科学技术研究工作的結論，常是用經驗公式表現出来的。譬如，珈利略掌握了大量物体降落时間与降落行程的数据，經过分析研究，就得出下列著名的自由落体的公式：

$$S=\frac{1}{2}gt^2。$$

象这样，将行程S与降落时間t用函数关系表現出来，就是使經驗上升到理論。掌握了这个作为理論的規律，一般的自由落体的运动情况就跳不出这个理論的圈子；对以后的这一类的情况，就可以有把握地加以預測、估計。这又是用理論来指导实践。

有一些科学技术工作者，尤其是有些搞生产的同志們（包括按一定工作程序来进行工作的室内工作同志），他們常常在手边积累了大量科学数据。他們也知道：如果能够对这些数据加一番整理研究的功夫，就可以使自己的經驗上升为理論；这些理論并且能及时地对今后工作的改进起促进作用。有些人甚至把数据中几个因素的函数曲綫关系都能画出来，就是不相信自己也能把它們的函数关系的經驗公式找出来，以为自己水平太低，不能勝任那样的工作。这种妄自菲薄的心理，必須彻底消除，思想才能得到解放。旣然敢想了，为什么不敢干呢？唯一的办法是实践，就是非鑽进去試試不可。只要敢想、敢干，沒上过大学不要紧，仅学过小代数，也完全能够鑽进去。只要鑽进去，就会发現誤差理論旣不是什么天書，最小二乘法也不是什么了不起的东西。每一个科学技术工作者都应有信心：不仅能作一个优秀的实际工作者，并且在技术革命的旗帜下对科学理論也能有所建树。重要的問題在于思想上的政治挂帅，去掉自卑心理，鼓足干劲，下上一番功夫，就能成为一个名符其实的又紅又专的科学专家。

本書以浅近的道理介紹一些有关誤差理論及求得經驗公式的簡单方法，包括图解法和最小二乘法。希望能給数

学基础較差的同志以具体帮助，帮助他們鑽进去，試試看。書中所举的一些例子，有的只是为了說明方法，因而有些内容并非实际数字有的公式也与实际用的有出入，但作为介紹方法是无妨的。在运算中，也有时为了表明前后具体联系，有意地采用了过多的有效数字位数。

第二章　微分常識

这里介紹一点微分常識，其范围以能看懂本書为限，所以是很簡单的。讀者最好原来有一点最簡单的解析几何基础，如果只具有小代数基础，看起来有点吃力，但也能看懂。主要是首先在思想里要認为这东西并不神秘，相信只要辛勤努力，一定可以掌握它。

第1节　函数曲綫

从自由落体公式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 談起。

每給一个降落时間 t 的数值，就能得到一个相应的降落行程 S 的数值。二者的关系可以用上述数学公式表示出来。这种关系叫作函数关系，这种公式叫作函数公式。上式中，左边是单独一个 S，右面是包含 t 的較复杂的数值；这种形式的公式通常都是先給出 t 数值，然后得到相应的 S 数值。t 称作变数，S 称作函数。变数有时有好几个，上式是最簡单的情况，只有一个变数。式中，$\frac{1}{2}g$ 是

常数，假定它是永久不变的一定数值（严格說起来，重力加速度 g 也是一个变数，因为物体越降落离地心越近，g 值也越变大。不过因其在短距离降落中变化并不过大，所以当它是一个常数）。

函数公式可以用函数曲綫图来表示。通常以横座标表示变数，以縱座标表示函数。然后，把曲綫画出来。兹将自由落体公式一些 t 数值及相应的 S 数值列于表 1。

表 1

$t=$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
$S=$	$\frac{9}{2}g$	$2g$	$\frac{1}{2}g$	0	$\frac{1}{2}g$	$2g$	$\frac{9}{2}g$

按上表，将每一对数值在坐标图紙上的位置找出，并連成曲綫如图 1 所示。函数曲綫是連續的，曲綫上任何一点都必須滿足給定的函数公式上的关系。譬如 $t=2\frac{1}{2}$、$S=\frac{25}{4}g$，这个点的位置就在曲綫上，并且这一对数值又能滿足 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的函数关系。如果手持一物在空中松手使其由不动而墜落，它的行程 S 与时間 t 的关系就只能用图 1 的曲綫右边一半来表示。图 1 的整个曲綫是說明：向上抛擲一物，以該物到达最高点返回向下瞬时的不动之点为 0 点，在这以前的时間为負号的，在这以后的时間为正号的。S 数值則以由上述 0 点起向下方向的距离为正号数值；因事实上不存在超过 0 点再往上的情况，所以 S 数

值无負号数值。

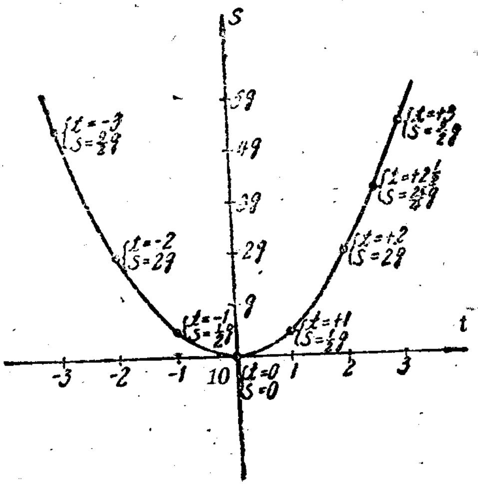

图1　$S=\frac{1}{2}gt^2$ 函数曲綫图

第2节　曲綫坡度

在微分学中，有些地方要研究曲綫坡度。譬如，在图1中，曲綫由左往右先是坡度极大的下坡，然后漸趋和緩；到 $t=0$ 时，曲綫变平；然后再往右，又逐漸緩升，变为上坡并且越来越陡。在 $t=0$、$S=0$ 处的一点，其位置比两旁都低，曲綫在这里的坡度等于0，也就是平的。我們可以說：当 $t=0$ 时，S 是一个最小值。所謂“最小”是指比两旁都小而言，最小二乘法的“最小”的含意和我們在这里所說的“最小”的意思是一样的。

关于曲綫坡度的概念，用公路剖面(图2)来說明最为方便。曲綫坡度都是从左往右来說，也就是按横坐标（如图1 t 的坐标）由小到大来說。所以在图2中的假想公路剖面也是由左往右来說。

譬如，图2中A到B一段是平面坡路，即AB是一条带坡度的直綫，如A至B的水平距离是100公尺，高差是5公尺，坡度就是$\frac{5}{100}$。由左到右是上坡，給以正号，即$+\frac{5}{100}$。有时，也用水平方向每单位距离的高差来代表坡度，这时把分数变为小数就可以，按上例来說，就是$+0.05$。如果坡度很陡，譬如，由左往右每水平一公尺抬高二公尺，单位距离的坡度就是$+2$。图2中H点的坡度，因所在路面是弯曲的、路面剖面是一条曲綫，就不能用路面上两个点的連綫来量坡度。H点的坡度即应用在H点的曲綫的切綫来表示（如图2）。如果在H点的切綫的坡度是由左往右每100公尺降低8公尺，H点的坡度就是$-\frac{8}{100}$或-0.08。

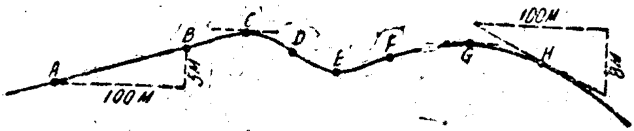

图2　假想公路剖面图

由图2还可看到两个最大点（即最高点C和G）和一个最小点(即最低点E)；在这三个点上的曲綫的切綫都是水平的，也就是坡度等于零。另外，有两个点D和F叫作轉折点；由C到E在最高最低之間，D点坡度最大，也就是由C往右坡度逐渐增加，过了D点坡度又逐渐减小；F則是E与G之間坡度最大的地方，F与D的区別不过是一个处于上坡、一个处于下坡而已。

第3节　微分方法及导函数

图3表示$S=\frac{1}{2}gt^2$曲綫上几个点的坡度，因該曲綫是对称的，所以只画出右面一半。当$t=0$时，曲綫有一个最小点或最低点，坡度是0；在該点，曲綫的切綫与横坐标綫重合，是水平的。当$t=1$时，在該点曲綫切綫的坡度，每向右增长一个t的单位距离，抬高的高差是g，因此坡度就是$\frac{g}{1}=g$。同样情况，当$t=2$时，坡度是$2g$；当$t=3$时，坡度是$3g$。以S'代表坡度，可列成表2。

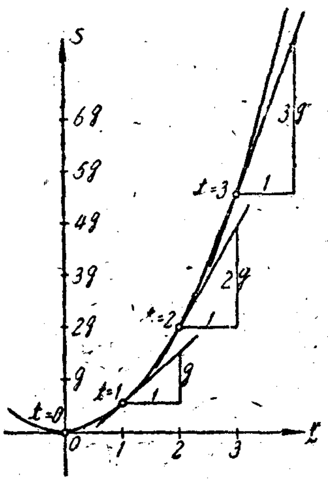

图3　“$S=\frac{1}{2}gt^2$”各点坡度图

表 2

$t=$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
$S=$	$\frac{9}{2}g$	$2g$	$\frac{1}{2}g$	0	$\frac{1}{2}g$	$2g$	$\frac{9}{2}g$
$S'=$	$-3g$	$-2g$	$-g$	0	g	$2g$	$3g$

当 t 为負号时，S' 也是負号；这是因为曲綫左面一半都是下坡并且和右面一半相对称；但其絕对数值则与 t 为正号时互相对应。

由表 2 很容易看出 S' 与 t 的关系，即：

$$S' = gt.$$

表示曲綫坡度的S'，在微分学中就叫作原函数 S 的导函数。二者关系密切，S'可以从 S 中直接求得。由 S 求 S' 的方法就是微分的方法。

用代数的方法求导函数时，一般分四个步驟(图 4)。

第一步：在 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 曲綫上任选一点，其坐标为 (t, S)，这一对数值能滿足 $S=\frac{1}{2}gt^2$的函数关系。

第二步：在 (t,S) 点近旁曲綫上另选一点，其坐标为 $(t+\Delta t, S+\Delta S)$，Δt 及 ΔS 为两点之間对于横縱坐标增量的符号。因它也在曲綫上，所以也应滿足同样的函数关系，即：

$$S+\Delta S=\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2.$$

第三步：按下列方法求出上述两个点連綫的坡度$\frac{\Delta S}{\Delta t}$。

列出原式：

$$S+\Delta S=\frac{1}{2}gt^2+\frac{1}{2}g\times 2t\Delta t+\frac{1}{2}g\Delta t^2;$$

$$S=\frac{1}{2}gt^2。$$

二式相减，得：$\Delta S=\frac{1}{2}g\times 2t\Delta t+\frac{1}{2}g\Delta t^2$。

以 Δt 除上式，得：$\frac{\Delta S}{\Delta t}=gt+\frac{1}{2}g\Delta t$。

第四步：設想 $(t+\Delta t,\ S+\Delta S)$ 点沿曲綫向 $(t,\ S)$ 点移动并逐渐趋近于 (t, S) 点，这时，两点連綫也就趋向于与 $(t,\ S)$ 点曲綫坡度直綫重合。同时 Δt 及 ΔS 也逐渐縮小。当 Δt 縮小到几乎等于零时，就可以認为当时的两点連綫的坡度能够代表 (t, S) 点的坡度。但 (t, S) 点是曲綫上的任意点，因此也就能代表一般性的曲綫坡度。两点連綫的坡度是 $gt+\frac{1}{2}g\Delta t$。当 Δt 縮小到几乎等于零时，$\frac{1}{2}g\Delta t$ 也就微乎其微，完全可以忽略掉，所以当时的曲綫坡度就是 gt。其結果与上述的完全一致。

这种趋近于极限的情况，在数学中是常常遇到的，它的代数表示方法如下：

$$S'=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt;$$