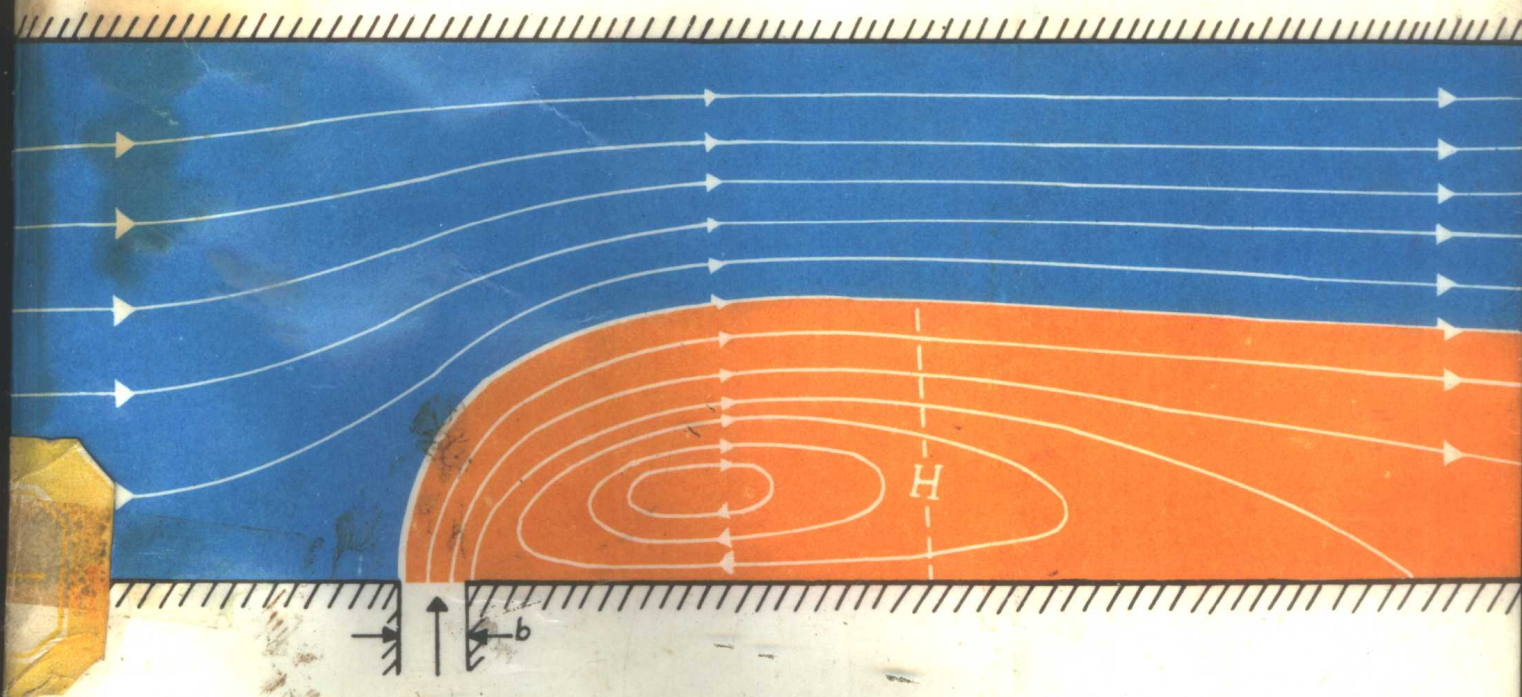


环境水力学

Environmental Hydromechanics

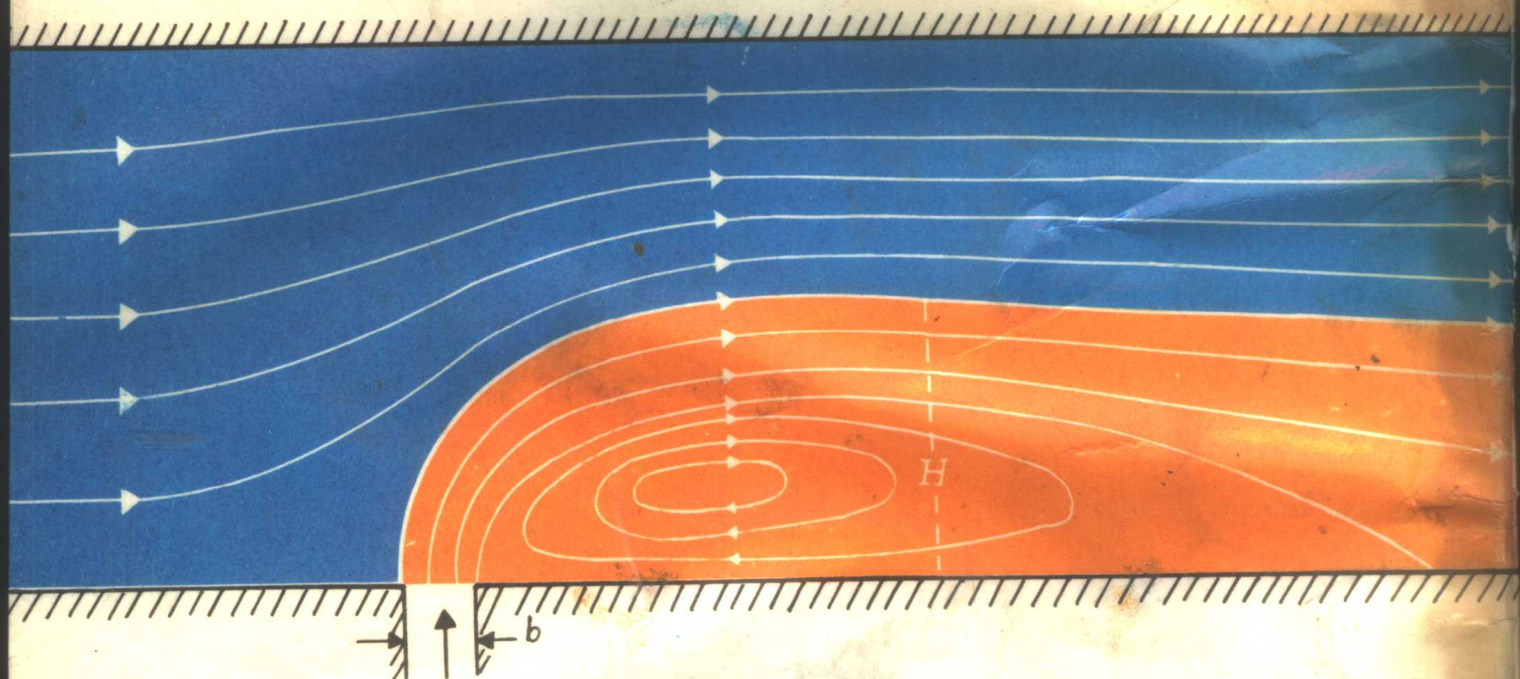
张书农 著

Zhang Shunong



河海大学出版社

Hohai University Press



Environmental Hydromechanics

Zhang Shunong

张书农 著

环境水力学

531

1165

511
1165

环境水力学

张书农 著

河海大学出版社

内 容 提 要

环境水力学研究污染物质（包括热）在水体中的紊输送，其中包括紊动扩散，异重流及分层流等三部分。环境水力学在本世纪初已开始研究，随着环境科学的进展，又继续深入探索并发展为专门科学。

本书着重介绍紊动输送的理论及其在实践中的应用，为结合国内外情况的最新的专业书籍，全书共分八章：1.紊流现象及其定义；2.紊流基础；3.水流中的扩散；4.河流的紊动与混合；5.水质模型；6.异重流及分层流；7.人工复氧；8.湖泊与水库中的混合。

十余年来，本书作者一直从事于这方面的结合生产的专题研究，现在有系统地将有关问题归纳成为这本专著，它可作为科研设计人员的参考书，也可作为高等院校高年级学生及研究生的教科书。

责任编辑：徐 华 吴家虎
顾问编辑：何定达
责任校对：陈吉平 周思平
编 务：张 静
封面设计：郭宝林

环 境 水 力 学

张 书 农 著

*

河海大学出版社出版

（南京西康路1号）

河海大学出版社 发行

河海大学印刷厂 印刷

*

787×1092 16开本 印张 19 字数 48.64万字

1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷

印数1—3000册

ISBN 7—5630—0065—8/TV·6 定价 6.00 元

前 言

环境水力学是水力学的分支学科，又属于环境流体力学的范畴。一般水力学只研究洁净水流的运动，而环境水力学则研究污染物质在水流中的紊动输送，所以又称为水流紊动输送。本世纪的后半期，由于工农业的迅速发展，污染物质未经足够的处理而直接排入水体，如不加以控制，就会使水资源受到污染，会危害人民的健康。环境保护或水资源保护的任
务，就是要控制这种污染。污染物质在水流中紊动扩散与输送，不仅可以稀释污染物质的浓度，由于生物化学作用，又可形成污染物质的沿程降解，因此水流具有自净能力。利用水流的自净，可以节省污水处理的费用。排出污水的浓度必须适应水流的自净能力。两方面相辅相成，就能更好地完成保护环境及保护水资源的主要任务。因此，水流紊动输送这门学科，在物理概念和计算方面（称为紊流输送模型或紊流模型），都在不断发展，后者又是计算水力学的一个发展方向。

泰勒 (G.I. Taylor) 早在 1921 年，就开始研究水流的紊动扩散规律，为污染物质扩散与输送的研究奠定了基础。另一方面由于某些污染物质的密度与水体密度有差异（例如热和盐），因此，受到污染的水体中还会形成异重流或分层流（异重流是两层密度不同的流体的相对运动）。1868 年海姆何兹 (H. B. Helmholtz)、1880 年开尔文 (Lord Kelvin)，及 1926 年杰弗莱 (Jeffrey, H)、1949 年柯来根 (G. H. Keulegan)，曾先后提出异重流交界面掺混与阻力问题。由于在垂向上密度分布不均匀的情况下也伴随着流速的不均分布，又提出了分层流的扩散与输送问题。1920 年里查生 (L. F. Richardson) 提出了里查生判数。1959 年艾立生 (T. H. Ellison) 与屠尔娄 (J. S. Turner) 又提出了分层流中的通量里查生数。上述各项贡献，都是环境水力学或紊动输送研究的基础。

与环境水力学有关的其它学科（包括环境化学、环境生物学与环境生态学），也研究各有关学科对于水质在水流中的变化与影响，并用水质参数的形式纳入水质模型之中，以表达污染物质在水流紊动输送过程中的变化，它们可作为水污染管理规划及预报将来情况的依据。

由于本教材的内容基本上是水流紊动输送，所以前两章安排紊流现象与紊流基础。第二章着重于基本方程的推导，从而引进了 $k \sim \epsilon$ 方程（ k 是紊动动能， ϵ 是紊动耗散）。这一方面表达添加了物质以后水流的紊动结构也改变了；另一方面为紊流模型（或紊动输送模型）打好了基础。虽然这不是本书的主要内容，但这个基本思路应该建立起来，以便分析物理现象。例如在第一章插进了 1986 年发表的垂线流速分布的论文，已经考虑到拟序结构对于垂向扩散的影响，带有污染物质的水流也应该受到影响（例如热、盐、泥沙等）。

第三章基本上是扩散数学的应用，罗列了各种扩散情况，以便于实际应用。第四章是针对我国巨大河川的污水排放问题，其垂向扩散未能在短距离内达到垂向上的均匀分布，又着重于横向扩散的分析，校正了过去认为受到宽深比影响的概念，而采用阻力系数“ λ ”与横向扩散的联系。本章还介绍了污染带的合理计算方法。对当前习用的方法（累积流量坐标法与假想源法），作了补充、修正与发展。

第五章介绍了用于水资源保护的水质模型问题。其中水质参数是重要环节，为了避免用

数学方法的插补，介绍了与环境化学有关的水质参数的进展情况。德意志联邦共和国的赖曼博士与我们进行过学术交流，累积了丰富的资料，可以推进这方面的发展。

第六章异重流是我们1972年以来与华东电力设计院共同研究的课题。从实验、分析、理论推导、比尺换算，直到工程设计与原型验证，获得了一系列的成果，这些成果在与德意志联邦共和国专家进行学术交流时，他们也很感兴趣。我们很早就注意分层流问题，现只提出某潮汐河流垂向分层的热扩散问题，它是值得发展的一个方面。

第七章人工复氧，介绍在德意志联邦共和国访问时带回的资料。它与水资源保护工作有关，也是水工水力学发展的一个方向。

第八章湖泊及水库中的混合，国内还没有开展这方面的工作，但它非常重要，将来必然会引起重视，因此介绍了美国史蒂芬教授提供的交流资料，供读者参考。

我国自己的经验还很少，介绍一些国外的资料，为今后的工作提供一些参考是很必要的。

本书承两位博士研究生俞利仁与周思平同志仔细校核。在编辑出版方面又承水利电力出版社徐华副编审、《水资源保护》杂志吴家虎副主编以及河海大学出版社何定达副教授的支持与鼓励，谨对各位同志表示深切的感谢。

张书农

1987年10月

目 录

前 言

第一章 紊流现象及其基本定义	(1)
第一节 紊流现象.....	(1)
第二节 紊流的统计概念.....	(8)
第三节 明渠垂向流速分布.....	(11)
第四节 天然河流的紊动观测	(18)
第五节 环境水力学中应用的基本定义.....	(20)
第二章 紊流基础	(31)
第一节 概论.....	(31)
第二节 描述紊流的数学方法.....	(31)
第三节 水流运动方程.....	(35)
第四节 紊动剪切流.....	(37)
第五节 紊流模型.....	(43)
第三章 水流中的扩散	(52)
第一节 扩散现象.....	(52)
第二节 扩散数学.....	(54)
第三节 剪切流的分散.....	(73)
第四节 相对扩散及其在湖海中的应用.....	(81)
第五节 紊动扩散与污染物质的降解.....	(86)
附录.....	(87)
第四章 河流的紊动混合	(102)
第一节 河流污染带.....	(102)
第二节 河流的扩散系数.....	(104)
第三节 河流污染带的计算方法.....	(120)
第四节 弯道的横向扩散.....	(134)
第五节 中小河流横向浓度分布的计算实例.....	(139)
第六节 河流中的纵向分散.....	(144)
第七节 河流的潜没喷射流.....	(152)
第八节 可降解污染物质的纵向混合距离.....	(163)

第五章 水质模型	(167)
第一节 概述.....	(167)
第二节 简化的水质模型.....	(168)
第三节 多参数水质模型 (奈卡模型)	(171)
第四节 化学耗氧追踪水质模型.....	(176)
第六章 异重流与分层流	(190)
第一节 异重流交界面的稳定问题.....	(190)
第二节 异重流交界面的掺混.....	(196)
第三节 基本方程与交界面的阻力及掺混.....	(200)
第四节 温差异重流 (温水楔)	(207)
第五节 盐水异重流 (盐水楔)	(226)
第六节 选择取排水.....	(229)
第七节 分层流.....	(239)
第七章 人工复氧	(251)
第一节 压气复氧.....	(251)
第二节 过水坝及梯级复氧.....	(257)
第三节 热电厂冷却水排放的复氧措施.....	(260)
第四节 水轮机复氧.....	(264)
第五节 水库的深水复氧.....	(265)
第八章 湖泊及水库中的混合	(267)
第一节 湖泊、水库水温的垂向分布.....	(268)
第二节 湖泊进、出水流与水库内的质量平衡.....	(276)
第三节 进入水库的密度流.....	(281)
第四节 深水水库的出流.....	(289)

第一章 紊流现象及其基本定义

紊动水流的机理比较复杂,其重要特征是紊流具有扩散能力。除了理论研究以外,多年来,在实验方面做了不少工作。从实验资料的分析,可以得到很多的感性认识。本章首先介绍紊流现象、紊流统计概念、明渠垂向流速分布、天然河流的紊动观测,然后介绍环境水力学中经常应用的一些基本定义。

第一节 紊流现象

一、流速的脉动

在明渠水流中的某一点观测瞬时流速(图1-1),在 x 方向(平行于总体水流运动)可以看出,点流速 u 是随时间变化的,图上的平均线代表该点时间平均纵向流速,又称为时间平均流速,图1-1表示水面与河底附近两点的流速变化。河底附近瞬时流速的振幅比水面附近的大一些。在较长的时段 T ,时均流速为

$$\bar{u} = \frac{\int_0^T u dt}{T} \quad (1-1)$$

式中 u —— 某一点的瞬时流速,
 $\bar{u}$ —— 该点在时段 T 的时均流速。

脉动流速与瞬时流速的关系为

$$u = \bar{u} \pm u' \quad \text{或} \quad u = \bar{u} + u' \quad (1-2)$$

瞬时流速与平均流速之差就是脉动流速(又称为脉动增量),习惯上常用式(1-2)的第二种表达形式,其中 u' 可正、可负。

同样,在 y 与 z 方向上,可写成

$$v = \bar{v} + v' \quad w = \bar{w} + w' \quad (1-3)$$

对于密度、温度及压力也可写成

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad T = \bar{T} + T' \quad p = \bar{p} + p' \quad (1-4)$$

从图1-1可以看出

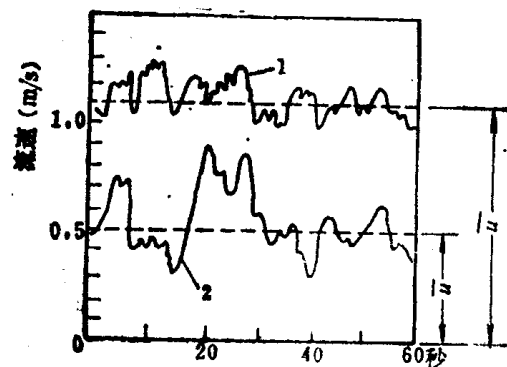


图 1-1

1—水面附近; 2—河底附近

$$\overline{u'} = 0 \quad \overline{v'} = 0 \quad \overline{w'} = 0 \quad \overline{\rho'} = 0 \quad \overline{T'} = 0 \quad \overline{p'} = 0 \quad (1-5)$$

对顺直的均匀明渠水流

$$\overline{v} = 0 \quad \overline{w} = 0 \quad (1-6)$$

从图 1-1 可以看出, 水面附近与河底附近的脉动流速的振幅不同, 脉动频率也不同, 似乎很紊乱, 没有明显的规律。但可以作为随机过程进行分析, 从而得到许多紊流特征值。

二、紊 动 强 度

脉动增量或大或小、有正有负, 但其平均值应为零, 因而不能用时间平均值来描述其特征。可以采用: $\sqrt{\overline{u'^2}}$ 、 $\sqrt{\overline{v'^2}}$ 、 $\sqrt{\overline{w'^2}}$ 。上述各量是将瞬时脉动增量平方起来, 再取平均值, 然后开方。其单位仍与流速相同。再写成: $\sqrt{\overline{u'^2}}/u_*$ 、 $\sqrt{\overline{v'^2}}/u_*$ 、 $\sqrt{\overline{w'^2}}/u_*$ 或 $\sqrt{\overline{u'^2}}/\bar{u}$ 、 $\sqrt{\overline{v'^2}}/\bar{u}$ 、 $\sqrt{\overline{w'^2}}/\bar{u}$ 。称为相对脉动强度或紊动强度 (无量纲)。 $u_* = \sqrt{ghI}$, 它是垂线上的渠底摩阻流速 (其中 h 为明渠水深, I 为均匀流的水面比降), u_* 的单位也与流速相同。

脉动强度可写成

$$\sqrt{\overline{u'^2}} = \sqrt{(|u - \bar{u}|)^2} \quad \text{或} \quad \sqrt{\overline{u'^2}} = \sqrt{\frac{\sum (u - \bar{u})^2}{n}} \quad (1-7)$$

式中 n ——统计的次数。

在水流中某一点应用热线仪, 近代又用激光仪, 可以同时观测 x 、 y 两个方向或 x 、 y 、 z 三个方向的瞬时流速 u 、 v 、 w 。在宽深比很大的明渠均匀流或扁矩形管的中心线上, 水流可以看作二元的, 只考虑纵向及垂向的脉动流速 u' 、 v' 及相应的脉动强度 $\sqrt{\overline{u'^2}}$ 及 $\sqrt{\overline{v'^2}}$ 。图 1-2 的 (a)、(b) 是在明渠水流中观测的; (c) 是在扁矩形管气流中观测的。在中心线上都可看作是二元的, 即不考虑 z 方向的脉动流速 w' 。靠近渠底的流速较小, 在垂线上的流速分布是不均匀的。在图 1-2 上, h 是明渠水深; 在扁管中 $2h$ 是扁管的高度; y/h 是相对水深。(a)、(c) 两图中底是平整光滑的渠底, (b) 图有光底与糙底两种情况。 $\overline{u'v'}$ 是在同一点同时观测的 u' 与 v' 乘积的时间平均值。该点的水流紊动切力为

$$\tau_{y/h} = \rho \overline{u'v'} \quad (y/h) \quad (1-8)$$

水流与气流的情况基本相同, 可归纳为以下几项特征:

1) 从水面至河底 $\sqrt{\overline{u'^2}}/u_*$ 逐渐增大, 到河底附近达最大值, 这是比较宏观的, 还应注意河底附近的细部情况。紧靠河底其值为零, 在很小的高度上, 脉动强度急剧地增长而达到最大值, 然后向上逐渐减小, 在水面上为零。

2) 沿水深垂向脉动的相对强度 $\sqrt{\overline{v'^2}}/u_*$ 的分布略有差别。渠底附近的情况与 $\sqrt{\overline{u'^2}}/u_*$ 相似, 也是先从零开始, 然后急剧地变化到最大值。但在垂线上的分布接近于均

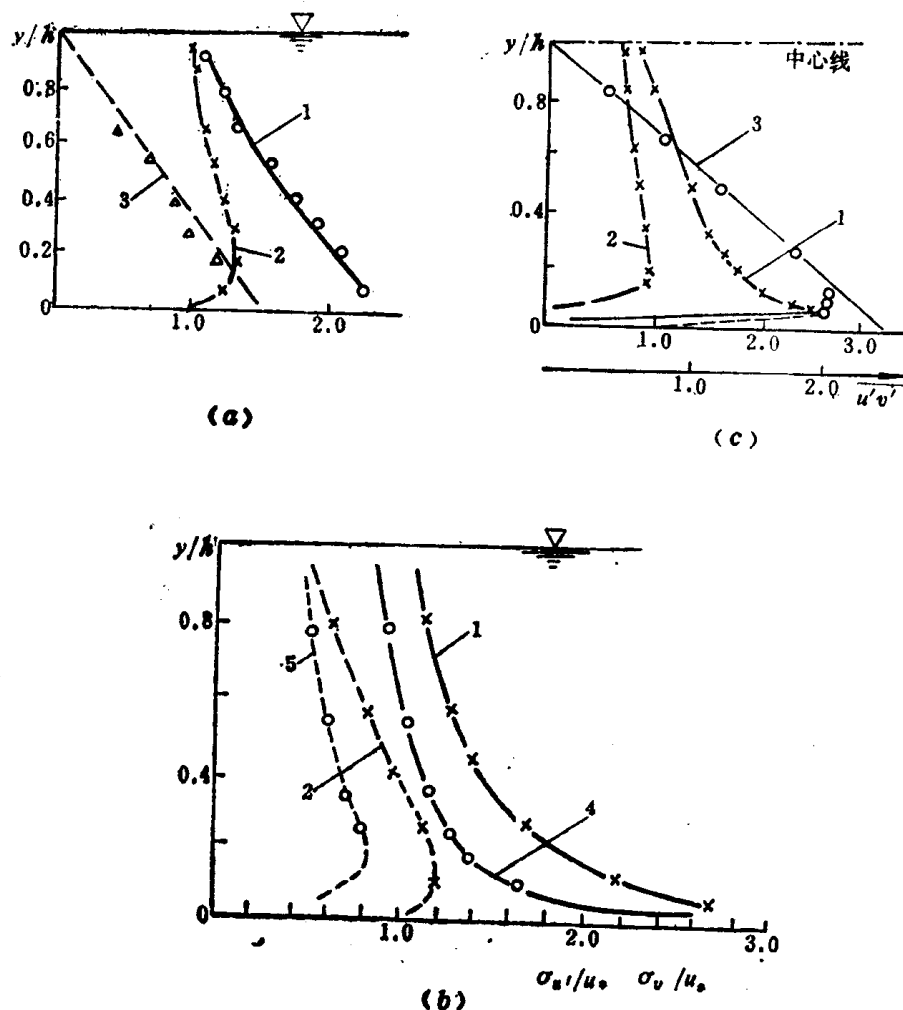


图 1-2

(a) 明渠、水光壁, Re 为 20×10^3 ; (b) 明渠、水光壁的 Re 为 6800, 糙壁的 Re 为 11900;

(c) 矩形管、光壁、空气, Re 为 6000

1— σ_u'/u_* (光壁); 2— σ_v'/u_* (光壁); 3— $\tau/\rho = \overline{u'v'}$ (光壁); 4— σ_u'/u_* (糙壁); 5— σ_v'/u_* (糙壁)

匀, 因而常用垂向平均值代表垂向脉动强度。

3) 从水面到河底 $\overline{u'v'}$ 的分布呈直线变化, 它反映了流层之间的内部切力。在渠底的切力为最大, 表达为: $\tau = \gamma h I$, 其中 γ 为水体的单位重量, h 为水深, I 为均匀流的水面比降。

4) 图1-2的 (a)、(b)、(c) 图的 $\sqrt{u'^2}/u_*$ 、 $\sqrt{v'^2}/u_*$ 及 $\overline{u'v'}$ 的垂向分布, 虽然受到雷诺数及糙度的影响, 但趋势相同。在图 (b) 上可以看到糙度的影响, 糙底的比光底的略小一些。

三、脉动流速的随机性

严格地说, u' 、 v' 应称为脉动增量, 而习惯上称为脉动流速。 u' 及 v' 随时间而变, 似乎没有什么规律, 但是用 u' 与其出现的机率画成相关曲线, 也符合于高斯分布规律(如图1-3)。

可写成

$$f(u') = \frac{1}{\sigma_{u'} \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-u'^2}{2\sigma_{u'}^2}\right) \quad (1-9)$$

式中 $f(u')$ ——脉动增量的频率;
 $\sigma_{u'}$ ——脉动增量的均方差。

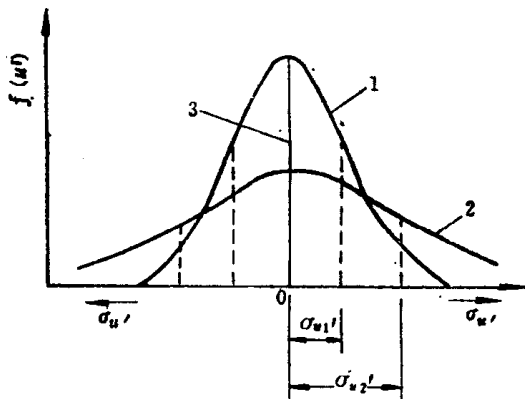


图 1-3

1—水面; 2—河底; 3— $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$

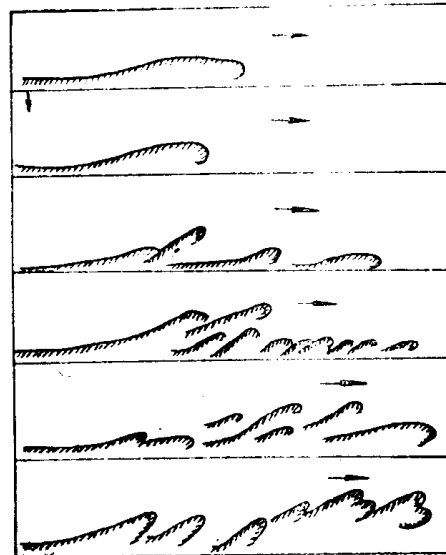


图1-4 紊动的猝发现象

四、明渠或边界层紊动涡旋的产生

紊动涡旋产生的情况是各式各样的, 现着重于明渠或边界层的情况。设水流在一块静止的平板上流动, 紧靠边界部分的流体受到平板的摩擦作用, 以致流动迟缓。而其上层的流速则较大, 在垂向上形成了流速梯度。由于粘滞作用, 近壁的一层属于层流运动, 称为近壁层流层, 根据很多的实验, 其厚度 δ 表达为

$$\delta = \frac{11.6u_*}{\nu} \quad (1-10)$$

式中 u_* ——摩擦流速;
 ν ——液体的运动粘滞数。

由于在紊流与层流的分界面上流速差很大(即梯度很大), 形成许多涡旋, 在明渠底部也是同样的情况。渠底处产生的涡旋有时很大。如图 1-4 所示。这是 1933 年普朗特的试验^(1,1)。当初认为它是由于边界层流层而产生的。近代的研究认为, 猝发的大涡旋也有一定的频率及一定的尺度。它与一般的涡旋出现的概率(即正态分布)有所区别, 称为拟序结构。该项研究工作正在发展之中, 在下一节流速分布规律中还要提到。

五、涡旋的尺度

流体中的紊动很难捉摸, 根据流速脉动的观测, 可以认为存在着大小不同的涡旋。尼古拉兹^(1,2)在试验水槽上面拍摄水面涡旋的情况如图 1-5 所示。用不同的速度移动照相机, 可

以看出大小不同的涡旋，墙边为小涡旋，中心部分为大涡旋。

图 1-6 是戴维斯^(1,3)介绍的管流图形。观察者的移动速度与平均流速相同。靠近管壁有许多小涡旋，可以认为这里的流速梯度很大，即墙壁的切力较大，把水流撕裂为若干小涡旋。小涡旋向管中心运动，就合并为大的涡旋。

根据许多学者的探索，认为在紊流中有大小不等的涡旋，它们具有传递能量的作用，而涡旋尺度的大小则根据脉动流速的大小来判断。脉动增量大的代表大涡旋；脉动增量小的代表小涡旋。大涡旋出现的频率较小；而小涡旋出现的频率较大。涡旋的尺度又与雷诺数的大小有关。

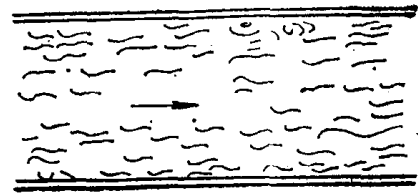
可以把涡旋分为三级，如图 1-6 所示。在管壁附近出现许多小涡旋，可合并成为中级的或大的涡旋。小涡旋把能量传给中级涡旋再传给大的涡旋。大、中级涡旋携带能量，然后又再分裂为许多小涡旋。紊动能可表达为（详见第二章）

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (1-11)$$

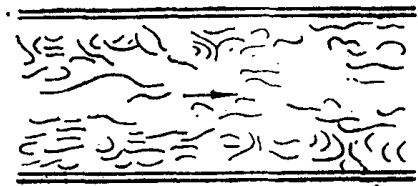
式中 u' 、 v' 、 w' —— x 、 y 、 z 坐标的脉动增量。

相应的能量耗散率为

$$\epsilon_m = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}] \quad (1-12)$$



(a)



(b)



(c)

图 1-5

(a) 照相机移动速度为 12.5 cm/s;

(b) 照相机移动速度为 20 cm/s;

(c) 照相机移动速度为 25 cm/s

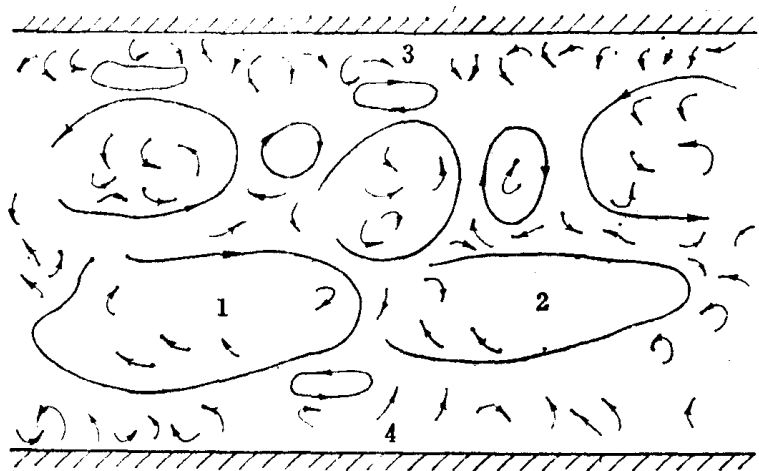


图 1-6

1—拉长了的大涡旋，包括较小的涡旋； 2—拉长了的大涡旋和较小的涡旋；
3—小涡旋的产生； 4—高度密集的小涡旋的产生

由于克服粘滞阻力，小涡旋的能量就变为热能，最后消失，称为耗散。大涡旋能够储存能量，而把能量传递给中级的及小的涡旋。设 L_d 为消耗能量的小涡旋的最大尺度（即后面将提到的泰勒定义的最小尺度 λ ），与它相应的就是开始消耗能量的小涡旋尺度。相应的涡旋雷诺数为 $\sqrt{u'^2} L_d / \nu = 8 \sim 10$ 。此外还有更小的涡旋，即柯尔莫哥若夫^(1.4)的小涡旋尺度 L_k ， L_k 比 L_d 更小，其雷诺数 $Re_k = \frac{\sqrt{u_k'^2} L_k}{\nu} = 1.0$ 。在这种涡旋中，粘滞力大于惯性力。另外，贝却姿^(1.5)认为，如果细颗粒泥沙的粒径小于 L_k ，在紊动水流中就不会沉降。本书虽然不讨论泥沙运动问题，但由于环境水力学中的另一课题是“泥沙运动与污染的关系”，必然会牵连到这个问题。

图 1-7 是涡旋尺度与其能量的关系，涡旋尺度用其倒数表示，横坐标的左边相当于大涡旋；右边是小涡旋。分述如下：

1) 大涡旋含有的能量约占总能量的20%，它与产生紊动的容器的几何条件有关，所以图上有两条线。

2) 中级涡旋携带的能量最多，其尺度为 L_e ，一般的普朗特混合长度比 L_e 大而比水体容器（如管径）小。

3) 小涡旋耗散的能量最大。能量不断地从大涡旋传递给小涡旋，它们基本上是各向同性的。

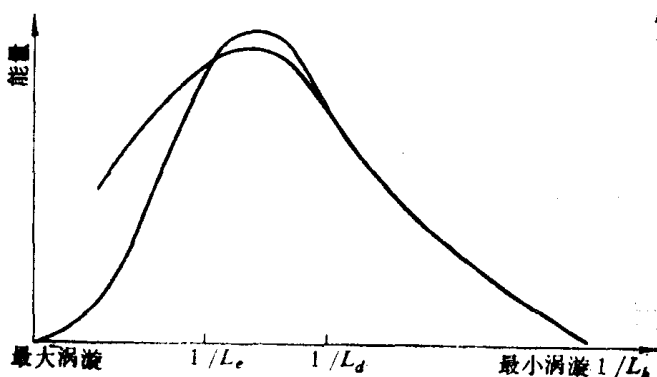


图1-7 涡旋尺度与能量的关系

（横坐标为涡旋尺度的倒数）

L_d —小涡旋的最大尺度； L_k —小涡旋尺度； L_e —中级涡旋尺度

从图 1-7 可以看出， L_k 与 L_d 有所区别。一般认为小于 L_d 的涡旋是各向同性的，即 $u' = v' = w'$ 。它所耗散的能量与取得的能量相等，柯尔莫哥若夫建立了下列关系

$$\sqrt{u_k'^2} = (\nu \epsilon_m)^{1/4} \quad (1-13)$$

$$L_k = (\nu^3 / \epsilon_m)^{1/4} \quad (1-14)$$

消去 ν ，得

$$\epsilon_m = (\sqrt{u_k'^2})^3 / L_k \quad (1-15)$$

上三式中 ϵ_m ——能量耗散率， m^2/s^3 ；

ν ——动粘滞数， m^2/s 。

当 $Re_k = \frac{\sqrt{u_k'^2} L_k}{\nu} = 1.0$ 时相应于柯氏的微小涡旋。

戴维斯^(1.3)应用上述概念，对管流做了分析。因为单位时间的功等于断面平均流速 u_m 与力的乘积。则

$$\epsilon = u_m (\pi a^2 \Delta p) \quad (1-16)$$

式中 a 、 Δp ——管半径及压力差。

压力差可用阻力系数规律来表达, 应用阻力公式, 则

$$\Delta p = 4\phi(L\rho/d)u_m^2 \quad (1-17)$$

$$\varepsilon = u_m^3(4\phi L\rho) (\pi a^2/d) = 2\phi u_m^3(L\rho\pi a) \quad (1-18)$$

上两式中 L 、 d ——管的长度及直径;

ϕ ——阻力系数;

ρ ——水的密度。

单位质量的功为

$$\varepsilon_m = \varepsilon / \pi a^2 L \rho = 2\phi u_m^3 / a \quad (1-19)$$

在光壁情况, 用勃拉西斯 (Blasius) 阻力公式 $\phi = 0.04(Re)^{-1/4}$, $Re = \frac{u_m d}{\nu}$, 得

$$\varepsilon_m = 0.08(Re)^{-1/4} u_m^3 / a \quad (1-20)$$

因而 ε_m 与 u_m 有关, 可写成

$$u_m \propto \varepsilon_m^{0.36} \quad (1-21)$$

戴维斯认为可以用 L_e 代换 L_k , 从式 (1-15) 得出 ε_m , 再令 $\sqrt{u'^2} = u_k$, 而 u_k 为 Re 的函数, 得

$$\varepsilon_m = u_k^3 / L_e = 8 \times 10^{-3} (Re)^{21/8} \nu^3 / (d^3 L_e) \quad (1-22)$$

又因在管流中, $\phi = u_k^2 / u_m^2$, $u_k = 0.2u_m (Re)^{-1/8} = 0.2(Re)^{7/8}(\nu/d)$, 得

$$\varepsilon_m = 8 \times 10^{-3} (Re)^{21/8} \nu^3 / (d^3 L_e) \quad (1-23)$$

再从式 (1-20) 得

$$8 \times 10^{-3} (u_m d)^{21/8} \nu^3 / \nu^{21/8} d^3 L_e = 8 \times 10^{-3} (u_m d)^{-1/4} u_m^3 / \nu^{-1/4} \left(\frac{d}{2}\right) \\ L_e = 0.05 d (Re)^{-1/8} \quad (1-24)$$

设 $Re = 10^4$, $L_e = 0.016d$ 。普朗特长度 $L = 0.08d$ 。

对于小的涡旋, 从上述的 $\varepsilon_m = (\sqrt{u_k'^2})^3 / L_k$ 及 $\varepsilon_m = (\sqrt{u'^2})^3 / L_e$ 两式消去 ε_m , 得

$$\sqrt{u_k'^2} = \sqrt{u'^2} (L_k / L_e)^{1/3} \quad (1-25)$$

因为 $Re_k = 1$, 可以消去 L_k , 得

$$\sqrt{u_k'^2} = \sqrt{u'^2} (\nu / \sqrt{u'^2} L_e)^{1/4} \quad (1-26)$$

式 (1-26) 的推导补充如下:

因为 $Re_k = \frac{\sqrt{u_k'^2} L_k}{\nu} = 1.0$

所以 $L_k = \frac{\nu}{\sqrt{u_k'^2}}$

$$\sqrt{u_k'^2} = \sqrt{u'^2} \left[\frac{\nu}{\sqrt{u_k'^2} L_e} \right]^{1/3} \quad \left(\sqrt{u_k'^2} \right)^{4/3} = \frac{\sqrt{u'^2} \nu^{1/3}}{L_e^{1/3}}$$

则

$$\sqrt{u_k'^2} = \left[\frac{\sqrt{u'^2} \nu^{1/3}}{L_e^{1/3}} \right]^{3/4} = \frac{\sqrt{u'^2} \nu^{1/4}}{L_e^{3/4} (\sqrt{u'^2})^{1/4}} = \sqrt{u'^2} \left(\frac{\nu}{\sqrt{u'^2} L_e} \right)^{1/4}$$

各向同性紊动出现于管中心部分，由此可得 $\sqrt{u_k'^2}$ 与 Re 的关系，采用 $\sqrt{u'^2} = 0.05 \bar{u}_*$ (中心流速)。又因 $\bar{u}_* = 1.23 u_m$ ，即 $\sqrt{u'^2} = 0.06 u_m$ ， L_e 用式 (1-25)，得

$$\sqrt{u_k'^2} = 4.27 \sqrt{u'^2} (Re)^{-0.22} = 0.26 u_m (Re)^{-0.22} \quad (1-27)$$

因为 $Re_k = 1$ ，所以 $L_k = \nu / \sqrt{u_k'^2}$ ，得

$$L_k = 4d (Re)^{-0.78} \quad (1-28)$$

设 $d = 10\text{mm}$ ，当 $Re = 10^4$ 时， $L_k = 30\mu\text{m}$ ；当 $Re = 10^5$ 时， $L_k = 5\mu\text{m}$ 。

至于耗散大部分能量的涡旋，大约为 $L_d = 5L_k$ (经验关系)，所以

$$L_d = 20d (Re)^{-0.78} \quad (1-29)$$

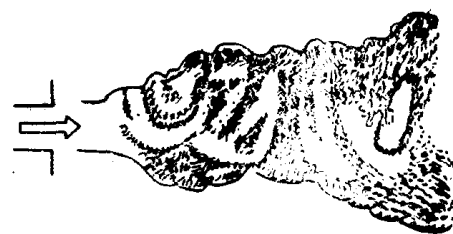
相应地，得

$$\sqrt{u_d'^2} = 1.7 \sqrt{u_k'^2} \quad (1-30)$$

由此可见， Re 越大，则小涡旋越小，而 Re 越小，则小涡旋越大 (图1-8)。



(a)



(b)

图 1-8

(a) 较小的 Re ;

(b) 较大的 Re

第二节 紊流的统计概念

早期的紊流理论，认为紊流的涡旋尺度只限于一定的范围，结合气体动力学的概念，勃朗德与泰勒分别提出混和长度 L 的概念，它与气体动力学中的“平均自由路径”相近。这种概念是把一个气团模拟为气体分子，在与周围的流体混合以后，其速度与特性就与周围流体相同。这是不够严格的。紊流中具有大大小小的涡旋，在混合过程中还有不同的转换系数，而它们又受到其它因素的影响 (例如热能传导系数)。混合长度只受到动力作用，而与某些物理常数无关。还有，混合长度的理论只假定紊动与平均运动的相互影响，因而用混合长度来表达紊动涡旋尺度也是比较概括的。

前节已谈到涡旋的尺度问题。泰勒首先开辟了根据实测的脉动流速分析涡旋尺度的研究途径，他考虑了两种情况：①在紊流中相隔一定距离的两点同时观测脉动流速；②在不同时间观测同一点的脉动流速。从而可得两种相关系数。

a. 第一种情况

如果在均匀圆管水流的横断面上取两点，其间距为 r ，在两点同时观测的脉动流速为 u'_1 及 u'_2 。可以得到三种数据： $\overline{u'_1 u'_2}$ 、 $\sqrt{\overline{u'^2_1}}$ 、 $\sqrt{\overline{u'^2_2}}$ 。它们的含意已如前述，因而可以写成相关系数

$$R_r = \frac{\overline{u'_1 u'_2}}{\sqrt{\overline{u'^2_1}} \sqrt{\overline{u'^2_2}}} \quad (1-31)$$

这是无量纲值。可用水管的圆心作为起点，测点离中心的距离为 r ，因而对应于 $2r/d$ ，得到许多 R_r 。其中 d 为管径， $d/2$ 为半径， r/d 为相对距离（图1-9,a）。

从图1-9(a) 可以看出，当相对距离很小时 R_r 接近于 1.0。离开管中心越远，则 R_r 越小，以致趋近于零。这条曲线与纵横坐标之间的面积可表达为

$$L_2 = \int_0^{d/2} R_r dr \quad (1-32)$$

L_2 应该是一个长度，可作为紊动涡旋的特征长度。因为是同时观测的，习惯上叫做平均欧拉长度。当 r 较小时，两点脉动流速的关系很密切；而 r 较大时，其关系就逐渐疏远，以致趋近于零。既然两点相关密切，则可认为它们是在一个涡旋之内；在较远的距离， $R_r \rightarrow 0$ ，就不属于这个涡旋，而属于另一个涡旋。因此可以在不同紊动情况的水流中，探索涡旋尺度的差异。

b. 第二种情况

在同一点，相隔不同的时间 τ ，也可得相关系数 R_τ ，写成

$$R_\tau = \frac{\overline{u'_{t=0} u'_{t=\tau}}}{\sqrt{\overline{u'^2_{t=0}}} \sqrt{\overline{u'^2_{t=\tau}}}} \quad (1-33)$$

用时间间隔 τ 为横坐标， R_τ 为纵坐标，可以画成与图1-9(a) 相似的曲线。因为是在固定点观测的， R_τ 称为自相关系数。

泰勒^(1.6)（图1-9,b）假定流体质点运动的相对距离为 $(x-a)$ ，当 $t=0$ 时， $x=a$ ，它以速度 u 运行 $(x-a)$ 的距离，因而所需的时间为 t ，写成

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} \quad x - a = \int_0^t u dt \quad (1-34)$$

令 $x - a = X$ ，则

$$[u(x-a)] = \left[X \frac{dX}{dt} \right] \left[\frac{dX^2}{dt} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\overline{X^2}] \quad (1-35)$$

可以理解，在时间 t 颗粒扩散距离为 X ，其平方的平均值为 $\overline{X^2}$ ，式（1-35）就是它的增长速率。

如果扩散时间很短，则 R_τ 值与起始的 $R_\tau = 1.0$ 相差不大，式（1-36）可改为

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\overline{X^2}) = \overline{u'^2} t \quad (1-36)$$

又得

$$\sqrt{\overline{X^2}} = u' t \quad (1-37)$$