

高等学校教学用书

微分几何

WEIFEN JIHE

北京測繪學院數學教研組編

人民教育出版社

本书原为北京测绘学院天文大地、航测、制图三个专业的数学讲义，因此在取材方面力求结合测绘专业的需要，从而将重点放在曲面论部分。特别是对测地线和曲面映射讲述得比较详细，并专写了一章旋转曲面。因为测绘学院各专业微分几何的教学时数不多，而牵涉的内容又相当广泛，因此本书在讲述方法上力求简明，对某些定理和公式未作严格的证明。

本书共分七章，主要内容有向量，曲线、曲面论的基本知识，曲面上重要的曲线族，测地线，曲面映射和旋转曲面。本书适合于高等工业学校测绘专业和中等测绘技术学校教学参考之用。

簡裝本說明

目前850×1168公厘規格紙張較少，本書暫以787×1092公厘規格紙張印刷，定價相應減少20%。希鑒諒。

微 分 几 何

北京测绘学院数学教研组编

人民教育出版社出版

高等学校数学用书编辑组
北京宣武门内承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业许可出字第2号)

国家统计局印刷厂印装 新华书店发行

统一书号 13010·859 开本 787×1092¹/₃₂ 印张 4²/₁₆

字数 94,000 印数 0001—25,000 定价 (6) 20.34

1960年9月第1版 1960年9月北京第1次印刷

序

本书原为北京測繪学院的数学讲义,由刘欽圣同志执笔编写。曾在該院天文大地、航測、制图三个专业試教过。此次出版前,又根据試教中教师和同学提出的意見进行了一次全面的整理。

本书在取材方面,力求結合測繪专业的需要,因而将重点放在曲面論部分,特别是对測地綫和曲面映射講述得比較詳細,并专写了一章旋轉曲面。

考虑到測繪学院各专业微分几何的教学时数不多,而所牽涉的內容又相当广泛,因此本书在講述方法上,力求簡明易懂,而对某些定理和公式,未作严密的推証。

由于我們的数学水平和測繪技术知識都很欠缺,加上人力有限,集体討論和审查工作做得不够,內容不妥或謬誤之处,恐属难免,希讀者予以批評与指正。

北京測繪学院数学教研組

1960年5月

目 录

序	1
第一章 向量	1
1.1. 数量、向量(1) 1.2. 向量的和与差(2) 1.3. 向量与数量的乘积(3) 1.4. 向量在直角坐标轴上的分量(5) 1.5. 向量的模、方向余弦(7) 1.6. 数量积(8) 1.7. 向量积(9) 1.8. 向量数量积(11) 1.9. 二重向量积(12) 1.10. 变向量(13) 1.11. 向量的微分法(15) 1.12. 定长向量(16) 1.13. 向量函数(17) 1.14. 直线与平面的向量方程(18) 习题(19)	
第二章 曲线论的基本知识	21
2.1. 正则曲线(21) 2.2. 弧长参数(22) 2.3. 曲线的切线(24) 2.4. 曲线的曲率(26) 2.5. 曲线的主法线与副法线(29) 2.6. 密切平面(30) 2.7. 伴随三角形(31) 2.8. 曲线的挠率(35) 2.9. 佛锐耐公式(38) 2.10. 曲线在一点近傍的结构(40) 2.11. 曲率与挠率的计算公式(42) 2.12. 密切圆渐屈线(45) 2.13. 曲线论的基本定理(47) 2.14. 螺旋线(48) 习题(51)	
第三章 曲面论的基本知识	53
3.1. 曲面的参数方程(53) 3.2. 曲面上的曲线(54) 3.3. 曲面上曲线的切线(55) 3.4. 曲面的法线向量和切平面(56) 3.5. 第一基本形式(57) 3.6. 曲线的交角(58) 3.7. 曲面的面积(61) 3.8. 第二基本形式(62) 3.9. 曲面上曲线的曲率(65) 3.10. 法截线(66) 3.11. 麦尼埃定理(68) 3.12. 曲面上点的分类(70) 3.13. 杜潘标形与欧拉公式(72) 3.14. 主曲率半径与主方向的确定(75) 3.15. 第三基本形式(77) 3.16. 高斯定理(77) 习题(78)	
第四章 曲面上重要的曲线族	80
4.1. 共轭曲线族(80) 4.2. 渐近曲线(81) 4.3. 曲率线(82) 4.4. 极小曲线(83) 4.5. 等温曲线(84) 习题(85)	
第五章 测地线	86
5.1. 高斯公式(86) 5.2. 高斯特性方程(88) 5.3. 曲面论的基本定理(89) 5.4. 测地线(89) 5.5. 测地曲率(91) 5.6. 测地平行	

线(94) 5.7. 测地极坐标(95) 5.8. 测地三角形(97) 习题(99)

第六章 曲面映射.....100

6.1. 贴合曲面(100) 6.2. 悬链面在正螺旋面上的贴合(101) 6.3. 可展曲面(102) 6.4. 曲面的内蕴几何学(104) 6.5. 保角映射(105) 6.6. 保积映射(108) 6.7. 等距映射(110) 习题(110)

第七章 旋转曲面.....112

7.1. 旋转曲面(112) 7.2. 旋转曲面的扭曲(113) 7.3. 旋转曲面在平面上的保角映射(115) 7.4. 正形投影的普遍公式(116) 7.5. 旋转曲面上的测地线(121) 7.6. 旋转曲面上测地线的流向(123) 习题(125)

第一章 向量

近代很多自然科学常用向量作为运算工具，因为这样可以使内涵简明而减少分析运算上的麻烦。本书将用向量运算来研究微分几何。因此在本章把向量代数和向量分析的基本内容作一简明的介绍。

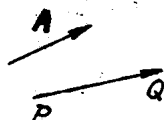
1.1. 数量、向量

我们经常遇到的量有两类——数量与向量。

当确定的选择好测量单位时，仅由数的大小就可以完全表现出来的量，叫做数量。例如体积、温度、密度、质量等。数量可为正，可为负，也可为零。

除了数的大小而外，还具有方向的量称为向量，简称矢，例如力、速度、加速度等。

在几何学上，我们用具有箭头的线段表示向量(图1)，箭头表示方向，线段的长度表示数的大小。



(图 1)

一般用黑体字 $A, B, \dots$ 或 $\overrightarrow{PQ}, \dots$ 来记向量。对应的用 $|A|, |B|, \dots, |\overrightarrow{PQ}|, \dots$ 来记它们的长度，而叫做向量的模 (大小)。数量则用普通字母来表示。

如果一个向量的始点不是固定的，我们把这向量叫做自由向量。如果它的始点是固定的，就叫做固定向量。这两种向量以后都要用到，在符号上不加区别。

若两个向量的大小相等而方向相同时，就称作它们相等。但如果两个向量 A, B 的大小相等而方向相反，则记作 $A = -B$ 。

1.2. 向量的和与差

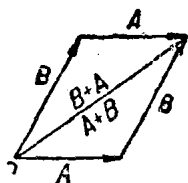
設有向量 A 与 B , 由向量 A 的終点作向量 B , 則把从向量 A 的始点到向量 B 的終点叫做 A 加 B 的和, 記作 $A+B$ (图 2)。容易証明

$$A+B=B+A.$$

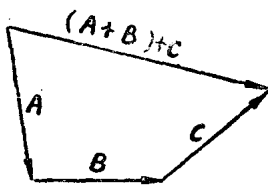
設有三个向量 A, B, C , 由向量 A 的終点作向量 B , 再从向量 B 的終点作向量 C , 則把从向量 A 的始点到向量 C 的終点的向量記作 $(A+B)+C$ (图 3)。容易証明

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

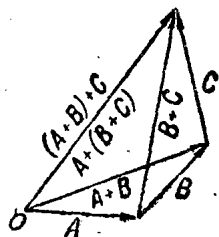
(图 4) 为此, 我們可以把三个向量 A, B, C 的和記作 $A+B+C$ 。



(图 2)



(图 3)

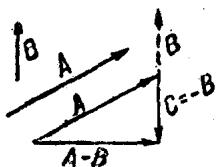


(图 4)

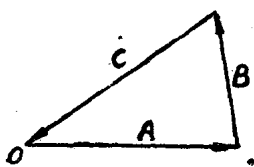
若向量 B 与 C 的方向相反而大小相等, 我們把 $A+C$ 叫做 A 与 B 的差 (图 5), 記作 $A-B$, 即

$$M=A+C=A-B.$$

若一个向量的大小等于零, 則这向量叫做零向量。零向量的方向是不定的, 通常把它記作 0 。



(图 5)



(图 6)

若諸向量相加时，最后一个向量的終点与第一个向量的起点重合，就是說若由上述法則作出的折綫是封閉的，則此諸向量的和等于零向量。例如图 6

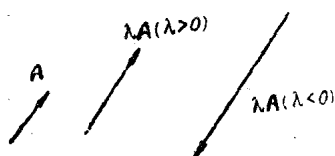
$$A + B + C = 0$$

特別明显的

$$A + (-A) = 0$$

1.3. 向量与数量的乘积

若有向量 A 与一数量 λ ，規定它們的乘积仍为一个向量，其大



(图 7)

小等于 $|\lambda| |A|$ ，其方向，当 $\lambda > 0$ 时与 A 相同， $\lambda < 0$ 时与 A 相反，在 $\lambda = 0$ 时，它为零向量，方向不定。我們把这乘积記作 λA 或 $A\lambda$ (图 7)。

特別地， $(-1)A$ 就是与 A 方向相反而大小相等的向量。即

$$(-1)A = -A.$$

关于这个乘法的分配律是成立的：

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B, \quad (1)$$

因为向量乘数量 λ 只是更改向量的大小和可能顛倒向量的方向，又向量 A, B 和 $A+B=C$ 是一个三角形的边，那末所有这三向量遍乘同一数量 λ 仅仅依同一比例更改大小或可能顛倒方向，結果 $\lambda A, \lambda B, \lambda C$ 仍組成一个三角形，它与原来的相似(图 8)这就是說：

$$\lambda A + \lambda B = \lambda C,$$

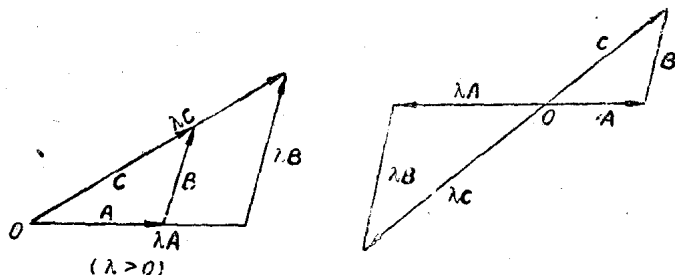
即

$$\lambda A + \lambda B = \lambda(A+B).$$

还要指出，由向量与数量的乘法定义，不难証明：

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A \quad (2)$$

$$\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2)A = \lambda_2(\lambda_1 A) \quad (3)$$



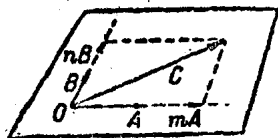
(图 8)

若用 A^0 表示与 A 同方向的单位向量, 那末有

$$A = |A| A^0. \quad (4)$$

由定义, 我们看到这样一事实: 若 $A = \lambda B$, 则 A 与 B 互相平行(方向相同或相反); 反之, 若 A 与 B 平行, 则必定可找到一个数量 λ 使 $A = \lambda B$, 因此两向量 A 与 B 平行的必要与充分条件是可以找到一个数量 λ , 使 $A = \lambda B$ 。我们常把互相平行的二向量叫做

共线向量。



(图 9)

设给定任何两个向量 A 与 B , 它们不是共线的。通过某一点 O 引两条平行于所给向量的直线(图 9), 这两条直线确定一个平面, 此平面不仅平行于 A 与

B , 且平行于所有的向量 mA 及 nB , 其中 m, n 是任意的数值, 并且由加法法则, 可知此平面也平行于它们的和

$$C = mA + nB. \quad (5)$$

如果若干个向量同时平行于某一个平面, 我们说这些向量是共(平)面的。这样, 如果 A, B, C 满足关系式(5), 它们就是共面的。

反之如果三个向量 A, B, C 是共面的, 则它们之间一定有象(5)的关系。事实上, 如果其中有两个向量相平行, 例如 B 与 C 相

平行, 則有 $C = nB$, 也即 $C = mA + nB$, 而其中 $m = 0$; 如果这三个向量两两不平行, 我們只要由点 O 作出向量 C , 以它为对角綫作平行四边形, 使这平行四边形的边各平行于 A 与 B , 于是可以写出关系式(5)。

总之, 三个向量共平面的必要与充分条件是这三个向量之間有象(5)的关系。

最后我們規定 $A/\mu \equiv \left(\frac{1}{\mu}\right)A$, 其中 μ 是一个异于零的常数。

1.4. 向量在直角坐标軸上的分量

設点 O 是直角坐标的原点, 点 M 的坐标为

$$OM_1 = x, \quad OM_2 = y, \quad OM_3 = z.$$

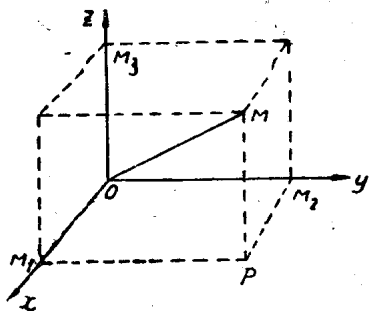
我們常把向量 $\overrightarrow{OM}$ 叫做点 M 的向徑, 記作 $r = \overrightarrow{OM}$ (图 10)。由向量的加法法則有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM} \\ &= \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} \end{aligned} \quad (6)$$

为了便于运算, 从 O 点沿坐标軸 Ox, Oy, Oz 取三个单位向量, 其方向与坐标軸的正方向相同, 并依次以 i, j, k 表示, 这三个向量我們叫做基本向量。于是, 根据公式(4)可把公式(6)写为:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} \\ &= OM_1 i + OM_2 j + OM_3 k \\ &= xi + yj + zk. \end{aligned} \quad (7)$$

公式(7)中的 x, y, z 既是点 M 的坐标, 也是向量 $\overrightarrow{OM}$ 在各坐标軸上的射影。



(图 10)

設向量 A 在坐标軸上的射影为 A_x, A_y, A_z , 我們有

$$A = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (8)$$

有时把向量 A 在坐标軸上的射影 A_x, A_y, A_z , 叫做 A 的坐标分量, 用

$$A\{A_x, A_y, A_z\}$$

記号来表示。

容易看出: 如果两向量相等(不一定共起点)則它們在各坐标軸的射影相等, 反之, 如果两个向量在坐标軸上的射影依次相等, 則这两向量相等。所以不論把一个向量的起点放在何处, 它在坐标軸上的分量是不变的。

利用向量的分量, 可得向量加减法及向量与数量乘法的运算。

設

$$A = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad B = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k},$$

由公式(2)得

$$A \pm B = (A_x \pm B_x) \mathbf{i} + (A_y \pm B_y) \mathbf{j} + (A_z \pm B_z) \mathbf{k}$$

由公式(1)及(3)得

$$\lambda A = \lambda A_x \mathbf{i} + \lambda A_y \mathbf{j} + \lambda A_z \mathbf{k}.$$

例: 設两定点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$: $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在坐标軸上的分量(图 11)。

解: 作向量 $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}$ 則

$$\overrightarrow{OM_2} = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}$$

于是

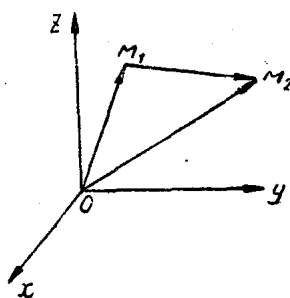
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$= (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j}$$

$$+ (z_2 - z_1) \mathbf{k} \quad (9)$$

(图 11)

所以向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在坐标軸上的分量为 $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ 。



1.5. 向量的模、方向余弦

設向量 $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$, 由于 A_x, A_y, A_z 是向量 $\mathbf{A}$ 在坐标軸上的射影, 則向量 $\mathbf{A}$ 的模由明显的几何概念得公式

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (10)$$

假定向量 $\mathbf{A}$ 与坐标軸間的角依次为 α, β, γ ; 我們叫这 α, β, γ 为 $\mathbf{A}$ 的方向角, 而把 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 叫做 $\mathbf{A}$ 的方向余弦。根据解析几何讲过的射影公式我們有:

$$A_x = |\mathbf{A}| \cos \alpha, \quad A_y = |\mathbf{A}| \cos \beta, \quad A_z = |\mathbf{A}| \cos \gamma, \quad (11)$$

于是

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{A_x}{|\mathbf{A}|} = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{A_y}{|\mathbf{A}|} = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{A_z}{|\mathbf{A}|} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

这就是用分量来表示方向余弦的公式。

又由公式(12)直接推出

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (13)$$

即: 任意向量的方向余弦的平方和等于1。

如果我們用 $\mathbf{A}^0$ 来表示向量 $\mathbf{A}$ 方向上的单位向量, 因 $|\mathbf{A}^0| = 1$, 則

$$\cos \alpha = A_x^0, \quad \cos \beta = A_y^0, \quad \cos \gamma = A_z^0.$$

因而得

$$\mathbf{A}^0 = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}. \quad (14)$$

1.6. 数量积

所謂两个向量 A 与 B 的数量积是一个数量,它的大小等于两个向量的模与它們夹角的余弦之乘积。

数量积用記号 $A \cdot B$ 来表示,所以

$$A \cdot B = |A| |B| \cos(A, B). \quad (15)$$

根据这个定义直接可以推出

$$A \cdot B = B \cdot A. \quad (16)$$

即交换律成立。

若 A, B 互相垂直,則因 $\cos(A, B) = 0$, 而有

$$A \cdot B = 0.$$

反之,若 $A \cdot B = 0$, 只要 A 与 B 都不是零向量,則必 $\cos(A, B) = 0$, 即 A 与 B 互相垂直。因此,两个向量互相垂直的必要与充分条件是它們的数量积等于零。

特别是对于基本向量,我們有

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0. \quad (17)$$

若 A, B 的方向相同,則

$$A \cdot B = |A| |B|,$$

如果方向相反,則

$$A \cdot B = -|A| |B|.$$

特别是

$$A \cdot A = |A|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2,$$

这就是說,向量 A 的模的平方等于 A 与自己作数量积。为了方便起見,我們还常把 $A \cdot A$ 記作 A^2 , 即

$$A^2 = A \cdot A = |A|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2, \quad (18)$$

因此我們还有

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1. \quad (19)$$

另外, 对于数量积, 分配律以及数量积与常数因子的结合律都成立:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}, \quad (20)$$

$$(\lambda \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{B}) = \lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (21)$$

它们的证明, 本书从略。

由(20)还可推出更普遍的公式

$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1) \cdot (\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2) = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2.$$

它表达了交叉相乘的展开括号的法则, 在向量运算中也成立。

利用(16)至(21)诸式, 还能把数量积通过向量的分量来表达。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i}) \\ &\quad + (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_y \mathbf{j}) \\ &\quad + (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \end{aligned}$$

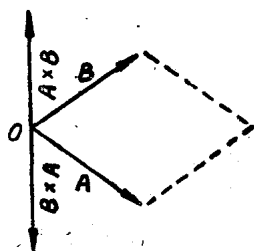
$$\text{即} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (22)$$

利用这公式来计算数量积常常是方便的。由公式(22)可知向量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 互相垂直的必要和充分条件是:

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0.$$

1.7. 向量积

由空间任一点 O 引向量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$, 并以它们为边作一平行四边形。这平行四边形所在平面通过 O 点的垂线有两个相反的方向(图 12), 在这两个方向中我们选定一个作为此平面的垂线, 这个垂线具有下述性质: 即从这个方向观察时, 由向量 $\mathbf{A}$ 的方向转一个小于 π 的角度达到 $\mathbf{B}$ 的方向是反时



(图 12)

針方向。

所謂 A 乘以 B 的向量積 是一個向量，它的模等於由這兩個向量所作平行四邊形的面積的大小，方向與上述這個平行四邊形所在的、平面的垂綫方向相同，即同時垂直於 A 與 B ，且它與 A, B 的方向順序合於右手系。我們常用記號 $A \times B$ 來表示。它的模：

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| \sin(A, B). \quad (23)$$

若向量 A 與 B 的方向互相平行，則它們的向量積等於 0，反之也成立。特別是

$$A \times A = 0,$$

因此，對於基本向量有

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0. \quad (24)$$

若 $A \perp B$ ，則因 $\sin(A, B) = 1$ ，故 $|A \times B| = |A| |B|$ ，由此可以推証：

$$j \times k = i, \quad k \times i = j, \quad i \times j = k. \quad (25)$$

現在考慮向量 B 乘以向量 A 的向量積 $B \times A$ ，顯然它的大小也象 $A \times B$ 的情形一樣，但方向則相反，因為對於 $B \times A$ 來說不是由向量 A 轉起，而是由 B 轉起。如此

$$B \times A = -A \times B \quad (26)$$

向量積的交換律不成立，但 $A \times B$ 與 $B \times A$ 之間卻存在這個簡單的關係。

另外，向量積滿足分配律和向量積與常數因子的結合律：

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C \quad (27)$$

$$(\lambda A) \times B = \lambda(A \times B) = A \times (\lambda B) \quad (28)$$

它們的証明，本書從略。

利用上述向量積的那些基本性質，我們可以推出向量積的分量表达式。設二向量

$$A = A_x i + A_y j + A_z k,$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k},$$

則根据向量积的分配律有

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + A_x B_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + A_x B_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + \\ &\quad + A_y B_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + A_y B_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + A_y B_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\ &\quad + A_z B_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + A_z B_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + A_z B_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + \\ &\quad + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

用行列式的符号来写有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (29)$$

我們还有

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ A_y & B_z \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}}^2}. \quad (30)$$

1.8. 向量数量积

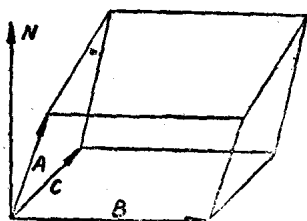
作出向量 $\mathbf{A}$ 与向量积 $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 的数量积: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, 有时为了运算方便起见对把它記作 $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})$, 即

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}),$$

$\mathbf{N}$ 的大小等于由 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{C}$ 作成的平行四边形的面积的大小, 但

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} = |\mathbf{A}| |\mathbf{N}| \cos(\mathbf{A}, \mathbf{N})$$

这个乘积可以考虑作上述平行四边形的面积 $|\mathbf{N}|$ 与 $\mathbf{A}$ 在方向 $\mathbf{N}$ 上的投影的乘积, 其中方向 $\mathbf{N}$ 垂直于这平行四边形所在的平面, 即向量数量积 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 的绝对值等于由 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{C}$ 作成的平行六面体的体积(图 13)。



(图 13)

$$\begin{aligned}
 & \text{又} \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \\
 &= A_x(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_x + A_y(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_y \\
 &+ A_z(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_z \\
 &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) \\
 &+ A_y(B_z C_x - B_x C_z) \\
 &+ A_z(B_x C_y - B_y C_x).
 \end{aligned}$$

用行列式来表示即有

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = (ABC) \quad (31)$$

由行列式的性质可以直接证明:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (32)$$

及

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \quad (33)$$

等等。

当三向量 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 共面时, 则此平行六面体的体积为 0, 于是

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0 \quad \text{或} \quad (ABC) = 0 \quad (34)$$

反之如果 $(ABC) = 0$ 可以证明向量 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 是共面的, 因此这等式 (34) 是三向量共面的必要与充分条件。

1.9. 二重向量积

现在考虑 $\mathbf{A}$ 乘以向量积 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 的向量积, 就是

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}),$$

因 $\mathbf{D}$ 垂直于向量 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$, 而 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{C}$ 也垂直于向量 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$, 则 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ 共面, 于是

$$\mathbf{D} = m\mathbf{B} + n\mathbf{C},$$

其中 m, n 为待定常数。又 $\mathbf{D}$ 垂直于 $\mathbf{A}$, 所以