

忻孝康 朱士灿 蒋锦良 编著

叶轮机械三元流动与 准正交面法

复旦大学出版社



ISBN7-309-00072-2/O·015

定价：1.65元

叶轮机械三元流动与准正交面法

忻孝康 朱士灿 蒋锦良 

复旦大学出版社

内 容 简 介

本书主要论述了作者首创的计算叶轮机械三元流动的“准正交面”方法，多数材料取自作者近十年来在这一方面的研究成果，该项成果曾获1985年国家科技进步三等奖。本书主要内容为：叶轮内理想流体运动基本方程组，国内外三元流动的计算方法，准正交面法的计算步骤、发展及应用，叶轮内粘性流体运动基本方程组和数值计算方法。本书是力学专业大学生的选修课教材，可作为高校动力机械专业的研究生和教师的参考书，并可供从事叶轮机械设计和制造的工程技术人员阅读。

叶轮机械三元流动与准正交面法

忻孝康 朱士灿 蒋锦良编著

复旦大学出版社出版

(上海国权路579号)

新华书店上海发行所发行 复旦大学印刷厂印刷

开本850×1168 1/32 印张8.125 插页0 字数213,000

1988年6月第1版

1988年6月第1次印刷

印数1—2,000

ISBN7—309—00072—2/O·015

定价：1.65元

前 言

随着航空发动机和各种叶轮机械向大功率、高速、高效率等方向的发展,传统的一元、二元设计计算方法已逐渐被准三元和完全三元流动的设计计算方法所代替。采用三元流动的计算方法于设计和校核,已成为叶轮设计的一个必要步骤。为了提高叶轮的气动效率、增加负荷,提高设计的精确性和缩短设计周期,对叶轮流道内复杂的三元流场进行数值计算分析是一种经济和有效的办法。国内外许多优良发动机和叶轮的设计成功都证明了这一点。

从1975年开始,我们先后与上海船厂、上海柴油机厂等单位合作开展了叶轮机械三元流动的理论和数值计算方面的研究工作。1976年我们在国外二元准正交线方法的基础上,提出了“任定准正交面”方法^[8],它可以直接求解含有任意个 S_1 流面和 S_2 流面的三元流场,而且所需计算机存贮量较小、计算时间少,从而为叶轮的工程设计和校核提供了一个强有力的手段。1978年我们又完成了 S_1 流面为任意翘曲情况下的三元流计算^[12],进而给出了 S_1 流面翘曲的完全三元流场。从1979年到1982年间,我们曾先后在上海举办过一系列叶轮机械三元流动的理论 and 计算的短训班,着重向国内一些设计和使用单位介绍了“准正交面方法”。学员们希望能有一本简明扼要且较系统的书籍,以供工程技术人员和设计人员学习和使用。1981年底在上海召开了由国内有关专家参加的鉴定会,对此方法进行了鉴定。会上一致认为该方法具有物理意义清晰、计算快速、便于工程技术人员掌握等优点,希望在国内推广使用。从1976年以来,我们对此方法不断地改进和完善,目前已有适用于带有分流叶片、进出口修正以及前倾、后掠叶片离心压气机、向心涡轮叶轮等各种情况的程序,并推广至二维的粘性流动计算。现在我们将过

去一系列工作加以整理和系统化,写成此书,希望它能成为一本对设计和改进叶轮有用的参考书。

本书是力学专业大学生的选修课教材,也可作为高校动力机械专业的研究生和教师的参考书,还可作为从事叶轮机械方面工作的工程技术人员、设计人员、工程师和研究人员的参考书。

全书共分六章,其中,第一、二、三章由忻孝康同志编写,第四章由朱士灿同志编写,第五、六章由蒋锦良同志编写。本书主要介绍准正交面方法。为了使读者能对目前国内外三元流动计算的发展有一个较全面的了解,特在第二章内对国内外目前的各种计算方法作了一个比较全面而简略的介绍。

由于作者水平有限、知识面不广,编写时间仓促,故本书可能存在不少问题,敬请读者不吝赐教,多加批评,以便今后改正。

编著者

目 录

第一章 叶轮机械中理想流体运动的基本方程组	1
§1 绝对坐标系和相对坐标系	2
§2 理想流体运动的基本方程组	11
§3 边界条件	24
第二章 求解叶轮机械三元流动的各种数值方法	29
§1 两类相对流面的普遍理论	30
§2 求解 S_1 流面上流动的数值方法	35
§3 求解 S_2 流面上流动的数值方法	50
§4 准三元和完全三元流动的数值解法	55
第三章 任定准正交面方法	61
§1 速度梯度方程式	63
§2 S_1 流面是回转面假设下的情况	71
§3 S_1 流面是翘曲的情况	92
§4 理想不可压缩流体流动的计算	104
第四章 准正交面方法的应用与发展	108
§1 前倾叶片压气机叶轮的造型与流场计算	108
§2 具有分流叶片的离心式压气机叶轮的三元流场计算	124
§3 考虑上下游影响的离心式压气机叶轮的三元流场计算	151
§4 考虑上下游影响的有分流叶片的离心式压气机叶轮三元流场计算	166
§5 用微机计算叶轮的三元流场	178

第五章	叶轮机内粘性流动的基本方程组	184
§ 1	基本假设和连续性方程	185
§ 2	粘性应力	187
§ 3	粘性流体的运动方程	192
§ 4	粘性不可压缩流体的基本方程组与能量方程	199
§ 5	粘性可压缩流体的能量方程	203
§ 6	粘性可压缩流体的基本方程组和熵方程	211
§ 7	粘性流动的边界条件	214
第六章	粘性流体运动的数值计算方法	216
§ 1	流线迭代法的计算网格	216
§ 2	粘性流体的压力梯度方程	218
§ 3	粘性可压缩流体的焓梯度方程	223
§ 4	流线迭代法中所采用的基本方程组	225
§ 5	粘性轴对称流动的数值计算方法	230
§ 6	计算实例与说明	237
参考文献		240

第 一 章

叶轮机械中理想流体运动的基本方程组

叶轮机械内部流体的运动,与通常的流体运动有较大的不同,有它自己的一些特点。这些特点主要是叶轮的旋转带来的。在多级的轴流、径流或混流的叶轮中,往往有相间排列的动叶轮(旋转的)和静叶轮(不动的)。当流体(如空气、水、燃气、蒸汽等)在叶轮通道中流过时,流体与叶轮相互间进行着功能的交换。例如,高温、高压的燃气(或蒸汽)冲击涡轮就会使涡轮转动,这就是流体对叶轮作功的例子。类似地,水库里的水放出来冲击水轮机使它转动的过程,也是流体对叶轮作功的例子。相反地,高速旋转的压气机叶轮,它对吸入的空气作功,使出口的空气压力提高;类似地,水泵能把井下的水打到地面或高楼,这些都是叶轮对流体作功的例子。由于叶轮的叶片形状和流道形状相当复杂,加上动叶和静叶间的互相干扰,因此,叶轮内的流动比通常管道内的流动和飞行器在大气中飞行时的流动更加复杂和困难。

除了启动、关车或变工况的情况外,通常动叶轮是以等角速度绕轴旋转的。对于流过动叶轮内的流体运动,从地面上的人来看(静止坐标系),运动总是非定常的(即流动量随时间 t 而变)。但是,如果将坐标系建立在动叶轮上,则在与叶轮一起转动的运动坐标系中流动往往可以看作是相对定常的,即从与叶轮一起旋转的观察者来看,流动量是不随时间变化的。因此,在叶轮机械的三元流动理论中,必须引入绝对坐标系和相对坐标系,必须区分绝对流动和相对流动、绝对定常和相对定常等概念。一旦建立并弄清楚这些概念之后,人们才能对叶轮内的流动有一个正确的了解。

鉴于这种情况,流体流动的基本方程组在两个坐标系内必然是不同的。由于旋转坐标系不是伽里略的惯性系统,因此无法直接应用牛

顿定律,从而不能在相对坐标系内直接导出动量方程式。所以,为了导出流体流动的基本方程组,必须先从绝对坐标系出发导出方程,然后利用相对坐标系与绝对坐标系的转换关系,把方程式写成相对系的形式。这也是叶轮机内三元流动更加复杂的一个方面。

在本章中,我们将先给出两种坐标系(绝对坐标系和相对坐标系)以及任一流动量的各种导数(如梯度、散度和旋度等)在两个坐标系内的转换关系。在§2中,我们将给出在两种坐标系下理想流体流动的基本方程组,并给出首次积分(相当于通常的贝努里积分)。关于粘性流体的运动方程组,我们将在第五章给出。最后(§3),我们还将讨论相对坐标系下边界条件的提法。

§1 绝对坐标系和相对坐标系

在叶轮机内的流体流动问题中,选用适当的坐标系对于求解问题是大有帮助的。通常的叶片机,其动叶轮都是以某一角速度 ω 绕某固定轴旋转的。除了启动、停车和工况变动的情况外,一种工况对应于一个常数的角速度 ω 。根据叶轮绕某个固定轴旋转的特性,选用柱面坐标系来描述叶轮几何形状和内部流场,显然是十分合适的。通常总是取柱面坐标系 (r, θ, z) 的 z 轴重合于叶轮的旋转轴,而使 θ 角的增加方向与动轮的旋转方向相一致。

这样我们就可建立两种柱面坐标系:一个是绝对的柱面坐标系 (r, φ, z) ,它是固结在地面上静止不动的坐标系(z 轴同样与旋转轴一致);另一个是相对的柱面坐标系 (r, θ, z) ,它固结在动叶轮上并随叶轮一起旋转。在绝对坐标系里来看叶轮内的流体流动,既包括有流体相对于动轮的运动,也有动轮以角速度 ω 作旋转的运动。在相对坐标系内来观察流体的运动,那就只有流体相对于叶轮的相对流动了。

采用绝对坐标系的好处在于它是一个惯性系统,因此可以直接应用牛顿第二定律,从而可以直接导出理想流体的基本方程组。而采用相对坐标系的好处在于观察者与动轮一起转动,因此叶轮通道的固体

壁面(如轮盘、叶片表面等)是相对静止的,这样边界条件很容易建立。此外,对某一稳定工况的流动,认为流动是相对定常的假设是合理的,因此数学上的处理和求解就更加简单了。

下面我们来建立绝对坐标系和相对坐标系之间的转换关系,以便导出常用的叶轮机内三元流动的基本方程组。[2]曾详尽地进行过相对运动和绝对运动之间的相关分析,给出了任何标量和矢量的各种导数在两个坐标系内的转换关系。这里,我们基本上采用[2]的叙述方法,简要地给出为推导运动方程所需要的一些基本关系式。更详尽的内容,读者可参看[2]。

为便于分析起见,假设绝对坐标系和相对坐标系的坐标原点和 z 轴都是重合的,且在初始时刻 $t=0$ 时,所有相应的坐标轴都是重合的(见图1.1)。

为使讨论和转换更易进行,除了引进两个(绝对和相对)柱面坐标系外,再引进两个相应的笛卡尔直角坐标系(图1.1)。这样,我们就有了四个坐标系:

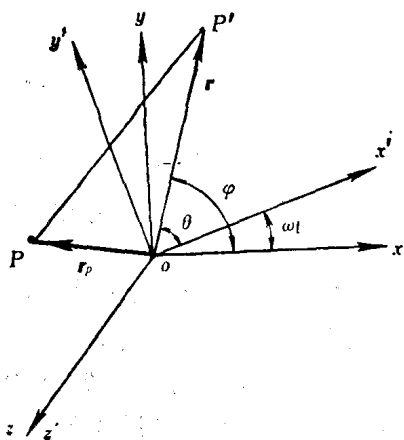


图 1.1

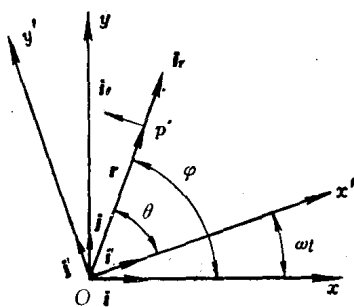


图 1.2

$$\begin{array}{l}
 \text{绝对坐标系} \left\{ \begin{array}{l} \text{直角系: 坐标 } x, y, z; \text{ 单位矢量 } i, j, k \\ \text{圆柱系: 坐标 } r, \varphi, z; \text{ 单位矢量 } i_r, i_\varphi, k \end{array} \right. \\
 \text{相对坐标系} \left\{ \begin{array}{l} \text{直角系: 坐标 } x', y', z'; \text{ 单位矢量 } i', j', k' \\ \text{圆柱系: 坐标 } r', \theta, z'; \text{ 单位矢量 } i'_r, i'_\theta, k' \end{array} \right.
 \end{array}$$

很显然, 由于 z 轴和 z' 轴是重合的, 故有

$$z' = z, \quad k' = k \quad (1.1a)$$

再考虑到矢量投影及几何关系(图 1.1 和 1.2), 则显见有:

$$i'_r = i_r, \quad i'_\varphi = i_\varphi \quad (1.1b)$$

$$r' = r, \quad \varphi = \theta + \omega t \quad (1.1c)$$

利用 oxy 平面上的矢量分解和投影关系, 我们可以得到如下一些以后十分有用的关系式(见图 1.2):

$$\left. \begin{array}{l} i_r = \cos\varphi i + \sin\varphi j = \cos\theta i' + \sin\theta j' \\ i_\varphi = i_\varphi = -\sin\varphi i + \cos\varphi j = -\sin\theta i' + \cos\theta j' \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos\varphi = r \cos(\theta + \omega t) \\ y = r \sin\varphi = r \sin(\theta + \omega t) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \text{tg}^{-1}(y/x) \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

对空间任何一点 P 的位置矢量 r_P 可以有各种不同的表达形式, 如:

$$\begin{aligned}
 r_P &= xi + yj + zk = x'i' + y'j' + zk \\
 &= ri_r + zk \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

这些公式都是显而易见的。

下面我们将要进行相对坐标系与绝对坐标系之间的转换。由于我们的目的只是为了对流体力学方程组进行转换, 因此只着重导出必需的公式。更详尽的可见 [2]。

我们知道, 在绝对坐标系内的流体动力学方程组包括连续性方程、动量方程和能量方程等。流体流动的物理量大致分成两大类: 一类是所谓数量函数, 我们称为标量函数, 例如压力 p , 密度 ρ , 温度 T , 热焓 i 等。另一类是所谓矢量函数, 例如速度矢量 C , 体积力矢量 F 等。

任一标量函数 q 和任一矢量函数 A , 一般都可以是空间坐标和时间 t 的函数, 在柱面坐标下可写成:

$$\left. \begin{aligned} q &= q(r, \varphi, z, t) = q'(r', \theta + \omega t, z', t') \\ A &= A(r, \varphi, z, t) = A'(r', \theta + \omega t, z', t') \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

由于任一标量函数的值并不随坐标系的选取而改变, 因此利用复合函数的求导法则可知:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial r'} &= \frac{\partial q}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial r'} + \frac{\partial q}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r'} + \frac{\partial q}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r'} \\ \frac{\partial q}{\partial \theta} &= \frac{\partial q}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{\partial q}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial q}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial q}{\partial z'} &= \frac{\partial q}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z'} + \frac{\partial q}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z'} + \frac{\partial q}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z'} \end{aligned}$$

按照 (1.1) 式知:

$$r' = r, \quad z' = z, \quad \varphi = \theta + \omega t, \quad t' = t$$

故除了

$$\frac{\partial r'}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 1$$

外, 其他偏导数均为零。这样就有:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial r'} \\ \frac{\partial q}{\partial \theta} \\ \frac{\partial q}{\partial z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial r} \\ \frac{\partial q}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial q}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

这意味着, 标量函数 q 在相对坐标系内对空间坐标的偏导数与在绝对坐标系内对空间坐标的偏导数是相等的, 即

$$\frac{\partial q}{\partial r'} = \frac{\partial q}{\partial r}, \quad \frac{\partial q}{\partial \theta} = \frac{\partial q}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial q}{\partial z'} = \frac{\partial q}{\partial z}$$

为了区分相对系和绝对系的偏导数(或全导数), 以后我们均在绝对系的偏(全)导数下加上下标“ a ”以示区别, 于是上式可写成:

$$\frac{\partial q}{\partial r'} = \frac{\partial_a q}{\partial r}, \quad \frac{\partial q}{\partial \theta} = \frac{\partial_a q}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial q}{\partial z'} = \frac{\partial_a q}{\partial z} \quad (1.7a)$$

如果我们引进梯度微分算子“ ∇ ”的话^[2,5], 那么上式可简写为:

$$\nabla q = \nabla \cdot q \quad (1.7b)$$

这里, ∇q 表示相对系内 q 的梯度, 而 $\nabla \cdot q$ 是绝对系内 q 的梯度。公式 (1.7) 表明, 运动方程组内像压力梯度和温度梯度这样的项, 在坐标系转换时是保持不变的。

现在来寻求标量函数 q 对时间 t 的偏导数。同样可利用复合函数求导的公式:

$$\frac{\partial q}{\partial t'} = \frac{\partial q}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t'} + \frac{\partial q}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t'} + \frac{\partial q}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t'} + \frac{\partial q}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial t'}$$

由于

$$\frac{\partial r}{\partial t'} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial t'} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t'} = \omega, \quad \frac{\partial t}{\partial t'} = 1$$

故有

$$\frac{\partial q}{\partial t'} = \frac{\partial q}{\partial t} + \omega \frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{\partial q}{\partial t} + \omega \frac{\partial q}{\partial \theta}$$

或用下标“ a ”来区分:

$$\frac{\partial q}{\partial t'} = \frac{\partial_a q}{\partial t} + \omega \frac{\partial_a q}{\partial \varphi} = \frac{\partial_a q}{\partial t} + \omega \frac{\partial q}{\partial \theta} \quad (1.8)$$

这说明, 在两个坐标系内 q 关于时间的偏导数是不相同的。

接下去, 我们要考虑的是标量函数 q 和矢量函数 A 关于时间 t 的全导数或“随流导数”之间的转换。这在能量方程和连续性方程的转换时都要用到。由流体力学知道, 研究流体的流动现象基本上有两种方法: 一种是所谓的拉格朗日方法, 它是观察者随流体质点一起运动的研究方法; 另一种即所谓的欧拉方法, 它是观察者固定在空间某个位置(窗口)上来考察流体流过该位置时流动量变化情况的一种研究方法。按照欧拉的观察方法, 空间坐标 $r, \theta(\varphi), z$ 和时间 t 均为独立的自变量, 流动物理量 p, ρ 和速度 C 等均为这些自变量的函数。但是, 如果按照拉格朗日的观点来看, 流体流动的物理量 ρ, p, C 及其坐标位置等也应是时间 t 的函数, 即

$$r=r(t), \theta=\theta(t), z=z(t), \varphi=\varphi(t)$$

故对任一标量函数 q 和任一矢量函数 A , 有

$$\left. \begin{aligned} q &= q(r(t), \varphi(t), z(t), t) \\ A &= A(r(t), \varphi(t), z(t), t) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

这样, 单位时间内 q 和 A 的变化率就是 q 和 A 对时间 t 的全导数(流体力学中称为随流导数或质点导数):

$$\frac{Dq}{Dt} \text{ 和 } \frac{DA}{Dt}$$

全导数的定义为:

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial q}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial q}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial q}{\partial t} \quad (1.10)$$

按照此定义, 我们可以给出标量函数 q 在两种坐标系下的全导数:

$$\begin{aligned} \frac{D_q q}{Dt} &= \frac{\partial_q q}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial_q q}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial_q q}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial_q q}{\partial t} \\ \frac{Dq}{Dt'} &= \frac{\partial q}{\partial r'} \cdot \frac{dr'}{dt'} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt'} + \frac{\partial q}{\partial z'} \cdot \frac{dz'}{dt'} + \frac{\partial q}{\partial t'} \end{aligned}$$

利用 (1.1) 式知:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} + \omega \quad (1.11)$$

再利用 (1.7) 式和 (1.8) 式, 可以很快看出:

$$\frac{D_q q}{Dt} = \frac{Dq}{Dt'} \quad (1.12)$$

这个式子使我们以后可以很快地转换能量方程和连续性方程。

再来看矢量函数 A 的全导数和偏导数的转换公式。为了使转换更加简洁方便, 引进直角坐标系作为辅助坐标系是很方便的。矢量 A 在绝对直角系下的表示式为:

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

这里 A_x, A_y, A_z 是 A 在绝对直角系下 x, y, z 方向的分量。由于单位矢量 i, j, k 总是不变的, 故有

$$\frac{\partial_a A}{\partial r} = \frac{\partial_a A_x}{\partial r} i + \frac{\partial_a A_y}{\partial r} j + \frac{\partial_a A_z}{\partial r} k$$

利用标量函数的坐标偏导数公式 (1.7a) 及 (1.1) 式, 则有

$$\frac{\partial_a A}{\partial r} = \frac{\partial A_x}{\partial r'} i + \frac{\partial A_y}{\partial r'} j + \frac{\partial A_z}{\partial r'} k = \frac{\partial A}{\partial r'} \quad (1.13a)$$

类似地有:

$$\frac{\partial_a A}{\partial \varphi} = \frac{\partial A}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial_a A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z'} \quad (1.13b)$$

联合 (1.13a) 和 (1.13b), 可以得到 A 的散度公式:

$$\nabla_a \cdot A = \nabla \cdot A \quad (1.14)$$

这表明矢量函数 A 对坐标的偏导数在绝对系和相对系内是不变的。

再来看, A 的时间偏导数公式。如 (1.8) 式一样, 一般说来, 矢量函数 A 对时间 t 的偏导数, 在绝对坐标系和相对坐标系内应该是不一样的。首先, 让我们来看一下两个直角坐标系的单位矢量之间的关系。由 (1.2) 式知 (图 1.1):

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

对 (1.15) 式两边关于时间 t 求绝对偏导数, 注意到 i, j, k 并不随时间而变化, 则有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_a}{\partial t} \begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t & 0 \\ -\omega \cos \omega t & -\omega \sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.16)$$

这意味着, 从绝对坐标系的观察者来看, 相对系的直角坐标单位矢量 i', j' 是随时间而变化的 (因为坐标系在旋转), 它们关于时间的变化率由 (1.16) 式决定。

有了(1.16)式后,就可导出 $\mathbf{A}$ 关于时间偏导数的转换式。考虑矢量 $\mathbf{A}$ 在相对直角系内的表示式:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i}' + A_y \mathbf{j}' + A_z \mathbf{k}'$$

这里 A_x, A_y, A_z 是 $\mathbf{A}$ 在相对直角系内的坐标分量。于是,可写成矢量乘积的形式:

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

于是,利用矩阵(或矢量)求导公式可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_a \mathbf{A}}{\partial t} = & \left(\frac{\partial_a A_x}{\partial t}, \frac{\partial_a A_y}{\partial t}, \frac{\partial_a A_z}{\partial t} \right) \\ & \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} + (A_x, A_y, A_z) \cdot \frac{\partial_a}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

利用(1.8)式和(1.16)式,则可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_a \mathbf{A}}{\partial t} = & \left(\frac{\partial A_x}{\partial t'} - \omega \frac{\partial A_x}{\partial \theta}, \frac{\partial A_y}{\partial t'} - \omega \frac{\partial A_y}{\partial \theta}, \frac{\partial A_z}{\partial t'} - \omega \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right) \\ & \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} + (A_x, A_y, A_z) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} \\ = & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'} - \omega \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta} + (A_x \cdot \mathbf{j}' - A_y \cdot \mathbf{i}') \cdot \omega \end{aligned}$$

若我们定义 $\boldsymbol{\omega}$ 为:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}' = (0, 0, \omega)$$

利用两个矢量的矢积公式,易知:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \omega (A_x \mathbf{j}' - A_y \mathbf{i}')$$