地震波动力学

杜世通　主编

石油大学出版社

地震波动力学

杜世通　主编

石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

地震波动力学/杜世通著.-东营:石油大学出版社,
1999.4(2003.4 重印)
ISBN 7-5636-0749-8

Ⅰ.地… Ⅱ.杜… Ⅲ.地震波-波动力学
Ⅳ.P315.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 031068 号

地震波动力学
杜世通　主编
出 版 者:石油大学出版社(山东　东营,邮编 257061)
网　　址:http://sunctr.hdpu.edu.cn
排 版 者:石油大学出版社排版中心
印 刷 者:石油大学印刷厂
发 行 者:石油大学出版社(电话 0546-8391797)
开　　本:140×202　印张:12　字数:309 千字
版　　次:1996 年 7 月第 1 版第 1 次印刷　2003 年 4 月第 1 版第 4 次印刷
印　　数:2101—2500 册
定　　价:15.00 元

前　言

本书是为勘查地球物理专业本科生编写的地震波动力学教材，也可供应用地球物理专业攻读硕士学位研究生学习学位课《地震波动力学理论》时参考。

近 20 年来，地震勘探的波动理论及方法，以地震偏移成像为中心，得到迅速的发展，引起了地震勘探工程技术人员学习地震波波动理论的巨大兴趣。以前为物探专业开设的弹性力学课程已远不能满足学习地震波波动理论和方法的需要。为此，石油大学勘探系已将地震波动力学列入勘查地球物理专业本科教学计划，作为必修的专业理论课，以代替原设的弹性力学课程。根据教学大纲，重新选择了教学内容。

地震波动力学的主要内容包括弹性理论基础、弹性波物理学的基本理论和方法、地震勘探波动方法的理论、实际地震波传播介质特性及各向异性介质地震波理论等五部分。前两部分是学习地震勘探波动理论和方法的基础，包含了原设的弹性力学课程中的基本内容。后三部分是为紧密结合地震勘探实际而扩充的地震波动力学理论和基本方法，其中涉及的主要问题有，

1. 克其霍夫积分及波动物理学基本概念
2. 格林函数及瑞雷积分
3. 柱坐标中的波动方程及其解法
4. 积分变换方法及其应用
5. 实际介质中的地震波
6. 横向均匀介质中的地震波

课程内容的选择，将使本书成为学习地震勘探波动方法的基础理论教材。书后附录为学生深入掌握有关数学方法和钻研弹性动力

学理论提供了学习材料。

学习地震波动力学，对勘查地球物理工科专业学生，有一定的难度。要求学生有较好的数学、物理学基础知识，学习过复变函数及数理方法、数学场论及理论力学等课程。为便于联系实际，明确学习地震波动力学理论的目的，在安排教学计划时，地震波动力学课程学习应与地震勘探原理、地震资料数字处理方法等课程学习并行。为减少学生学习的困难，本书编写过程中注意了深入浅出。对难度较大的数学推导，注意了步骤明确、推导过程叙述详尽，必要时增加了有关数学内容的讲解。

学生在学习本课程时要注意手脑并用，既要理解问题的物理意义，又要学习数学推导。书中作者有意识地略去了部分数学推导，学生在自学、复习基础上，应把它做出来，以提高自己解决问题的实际能力。通过本课程的学习，学生的地球物理专业理论水平，预期有一定明显的提高，为进一步深造打下基础。

本书第八章和附录一由王宁编写，其它各章和附录二、附录三由杜世通编写。

不足之处，敬请指正。

编　者

1995 年 9 月

目　录

第一章　弹性理论基础

自然界中的物体，根据它们对外力作用的反应，可以划分为刚体、弹性体和塑性体。一个物体在外力作用下发生平移或转动，并可沿力的作用方向传递力的作用，称为刚体。当一个物体受到外力作用，在它的内部质点间发生位置的相对变化，从而使其形状改变，称为应变。处于应变状态的物体，为保持其平衡状态，在内部质点间产生内力作用，称为应力。当外力作用取消后，物体的应力、应变状态立刻消失，并恢复原有的形状。这类物体称为弹性体。有一种物体，当外力作用停止后，物体逐渐恢复其原有形状，或者不能完全恢复其原有形状，而保留一定的变形，称为塑性体，或不完全弹性体。

地震勘探方法是研究人工激发的机械振动在地球介质中的传播规律，推断地下地质结构的。在地球介质中传播的机械振动，称为地震波。地震震源作用，给地球介质岩层施加外力，使之发生变形。这里既可能发生弹性应变，也可能发生使岩石破碎、永久变形的非弹性应变。哪种变形的形式占优势，这决定于一系列因素。其中主要的是震源作用力的大小和作用时间、岩石的性质。一般说，远离震源处，震源作用力微小，作用时间短暂，一些特殊岩相除外（如干沙），岩石表现为弹性体。因此，在岩石中产生的机械振动可以看成是弹性介质中的弹性振动，地震波可以看成是在岩层中传播的弹性波。弹性理论是研究弹性波的基础，也是学习和研究地震波传播规律的理论基础。

弹性理论的建立基于以下几个基本假设：

① 构成弹性体的物质应是连续的，充满了弹性体所占空间而无间断，也就是说，要忽略物质的分子结构和原子结构，从宏观上

对介质作研究。

② 物质具有理想的弹性性质，在荷载和卸载时不发生能量的吸收。

③ 处于应力应变状态的物体，其应力与应变成比例关系；弹性理论通常限于讨论均匀各向同性、完全弹性介质。

应该指出，使用弹性理论研究地震波，不仅仅是因为上面指出的地球介质与弹性体的相似性，还因为实际介质中地震波的复杂性，并且对它的研究还很不充分。实际介质中传播的地震波有一些明显区别于弹性波的物理性质，如介质的吸收作用，虽不能用弹性理论来解释，但可以在相应的弹性波方程中增加一个校正项或系数，来加以考虑。

§1-1 应力分析

一个弹性体在受外力作用时，其内部各质点间发生位置的相对变化，物体处于应变状态。为了保持这种状态平衡，在物体内部各质点间表现出力的相互作用。这种作用力称为内力，是与外力相平衡的作用力，是对外力作用的反应。作用力可以施加于物体表面，称为面力；也可以施加于物体每一个体积元，称为体力。面力的例子，如流体对物体表面的压力；体力的例子，如万有引力、向心力等。内力作用是分布在物体内部任一截面上，沿截面物体两部分相互接触而发生力的作用，所以它是一种面力、接触力。作用于单位截面积上的内力，称为应力。因此，在外力作用下，弹性体处于应力应变状态。

一、应力及其分量

为了分析物体应力状态，我们想像着将在外力作用下处于应力应变状态的弹性体沿着任意选取的截面 S 分为 A 和 B 两部分。将部分 A 和作用于该部分的外力一起移走，则为了保持 B 部分原有的应力应变状态，在 S 截面上表现出了面力作用 $\boldsymbol{P}$。这个作用力

代替了移走的 A 部分物体对 B 部分的作用，是存在于物体内部、决定了物体分割前应力应变状态的内力。物体在施加的外力和所产生的内力作用下处于平衡状态。如图 1-1 所示。

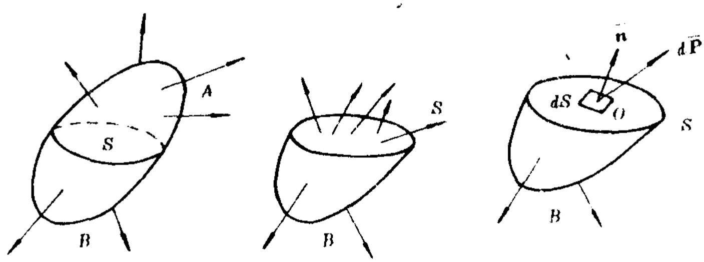

图 1-1　应力向量

在截面 S 上取面积元 $\mathrm{d}S$，其法线方向为 $\boldsymbol{n}$。分布于面积元 $\mathrm{d}S$ 上的内力，用作用于其中心点 O 的集中力 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ 代替，$\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ 等效于 $\mathrm{d}S$ 上的面力作用。比值

$$\boldsymbol{P}_n = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}S} \tag{1-1}$$

称为 $\mathrm{d}S$ 面积元上的应力。一般情况下 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ 作用方向相对面积元法线 $\boldsymbol{n}$ 可以是任意的，而不与 $\boldsymbol{n}$ 相重合。应力向量 $\boldsymbol{P}_n$ 的下标 n 表示应力作用截面法线方向，而不是应力作用方向。应力向量的大小和方向决定于面积元中心点 O 在物体内部的位置和面积元法线的空间方向。如果我们沿另一个过 O 点的截面 S_1 分割物体，则在同一 O 点上所有的内力 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}'$ 和应力 $\boldsymbol{P}_{n'}'$，都将不同于原有的内力 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ 和应力 $\boldsymbol{P}_n$，因为此时应力作用的截面法线不同，$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}'$。显然，物体在一点上的应力状态不能用一个应力向量来完全表达。

应力向量 $\boldsymbol{P}_n$ 可以沿坐标轴方向分解。在笛卡尔直角坐标系中，它可沿 x、y、z 轴分解，其分量表示为 P_{nx}，P_{ny}，P_{nz}；其中第一个下标表示向量 $\boldsymbol{P}$ 作用面的法线方向，第二个下标表示所取分量方向。另一方面，应力作用截面也可以向坐标面投影，即任意一截面

法线方向 n 可以投影在 x,y,z 轴上。可以想像，讨论垂直于坐标轴 x,y,z 的三个截面上的应力向量 P_x,P_y,P_z，可以用来表示物体内过一点在任意截面 n 上作用的应力向量。所以讨论在垂直坐标轴的截面上的应力向量及其分量，在弹性理论中是十分重要的。

我们想像着在弹性体内沿与坐标面平行方向取一个平行六面体单元，如图 1-2 所示。当物体处于应力应变平衡状态时，在平行

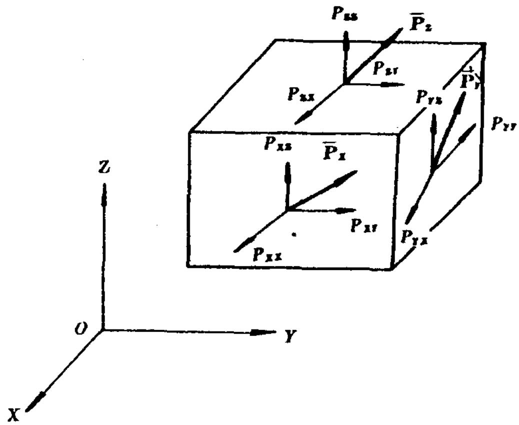

图 1-2　应力及其分量

六面体的三个在图上可见的侧面上将分别作用不同的应力向量 P_x,P_y,P_z；而每个应力向量又可沿坐标轴方向分解，作用于垂直 x 轴的侧面上的应力向量 P_x 其分量是 P_{xx},P_{xy},P_{xz}；作用于垂直 y 轴的侧面上的应力向量 P_y 其分量是 P_{yx},P_{yy},P_{yz}；作用于垂直 z 轴的侧面上的应力向量 P_z 分量是 P_{zx},P_{zy},P_{zz}；下标相同的应力分量，其作用方向与作用截面垂直，称为正应力，通常用 σ 表示，

$$P_{xx}=\sigma_{xx}\qquad P_{yy}=\sigma_{yy}\qquad P_{zz}=\sigma_{zz}\tag{1-2}$$

其余应力分量下标不相同，作用方向在作用截面上，称为切应力，通常用 τ 表示，

$$\left.\begin{array}{lll}P_{xy}=\tau_{xy} & P_{xz}=\tau_{xz} & P_{yx}=\tau_{yx}\\ P_{yz}=\tau_{yz} & P_{zx}=\tau_{zx} & P_{zy}=\tau_{zy}\end{array}\right\}\tag{1-3}$$

应力向量各分量符号的选择与坐标轴方向选择有关。如果截面外法线与相应的坐标轴方向重合，则应力向量的分量沿坐标轴方向取正；若截面外法线方向与相应的坐标轴方向相反，则应力向量分量沿坐标轴方向为负。正向正应力为拉伸力，负向正应力为压缩力。

二、过一点的不同截面上作用的应力之间的联系

为了讨论通过物体内同一点的不同截面上作用的应力之间的关系，我们想像着在物体内沿坐标轴方向为其棱取一个微四面体体积元如图 1-3 所示，坐标原点取在所研究的物体内的一点上，且

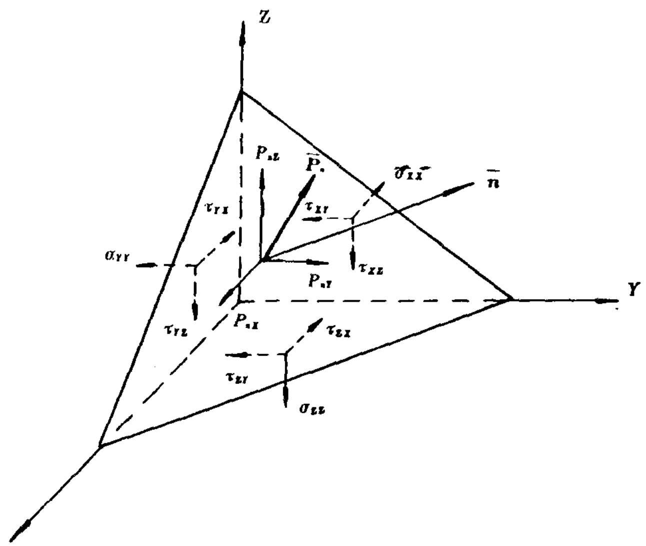

图 1-3 任意倾斜截面上的应力

为所取四面体的顶点。垂直于坐标轴 x,y,z 的三个侧面表示为 $\mathrm{d}S_x$、$\mathrm{d}S_y$、$\mathrm{d}S_z$，而第四个倾斜侧面为 $\mathrm{d}S$，其外法线方向为 $\boldsymbol{n}$；$\boldsymbol{n}$ 是一个单位向量，其在空间的方向用方向余弦 l,m,n 表示。为方便起见，方向余弦用 l_i，$i=1,2,3$ 表示：

$$\left.\begin{array}{ll} l_1 = l = \cos(\boldsymbol{n},x) & l_2 = m = \cos(\boldsymbol{n},y) \\ l_3 = n = \cos(\boldsymbol{n},z) & \end{array}\right\} \quad (1\text{-}4)$$

则有 $\boldsymbol{n}=l_1\boldsymbol{i}+l_2\boldsymbol{j}+l_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为坐标轴 x,y,z 正方向单位向量。$\boldsymbol{n}$ 表示倾斜侧面 $\mathrm{d}S$ 在空间的方向。当 $\mathrm{d}S$ 为物体内任意截面时，我们希望用作用于四面体三个侧面 $\mathrm{d}S_x,\mathrm{d}S_y,\mathrm{d}S_z$ 上　　的应力向量 P_x、P_y、P_z 或其分量来表示作用于 $\mathrm{d}S$ 上的应力向量 $\boldsymbol{P}_n$；如果能做到这一点，则可以肯定，弹性体内一点的应力状态可以完全由作用于垂直坐标轴方向的三个截面上的应力向量或其分量所确定。如图 1-3 所示。设作用于任意方向 n 的截面上的应力为 $\boldsymbol{P}_n$，其分量为 P_{nx},P_{ny},P_{nz}；作用于垂直坐标方向上的三个截面上的应力分量为 $\sigma_{xx},\tau_{xy},\tau_{xz}$；$\tau_{yx},\sigma_{yy},\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{zy},\sigma_{zz}$；我们建立四面体平衡方程式。很明显，若所讨论的四面体不平移、不旋转，即处于静力平衡状态，则作用于四面体的合力等于零。

作用于四面体的力包括面力和体力。体力与四面体体积成比例，是相对 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 的三阶微量，可以忽略不计。作用于四面体各个侧面上的面力等于各面上作用的应力向量与面积的乘积。所讨论的四面体是一个微体积元，作用于各侧面上的面力作用点近似地看成是一个点，集中于 O 点上，则四面体平衡方程式为：

$$\boldsymbol{P}_n\mathrm{d}S+\boldsymbol{P}_x\mathrm{d}S_x+\boldsymbol{P}_y\mathrm{d}S_y+\boldsymbol{P}_z\mathrm{d}S_z=0 \tag{1-5}$$

其中 $\boldsymbol{P}_n,\boldsymbol{P}_x,\boldsymbol{P}_y,\boldsymbol{P}_z$ 为作用于四面体倾斜面和三个垂直于坐标轴的侧面上的应力向量。考虑到 $\mathrm{d}S_x,\mathrm{d}S_y,\mathrm{d}S_z$ 三个侧面积外法线为 x，y，z 轴的负方向，则它们与 $\mathrm{d}S$ 的关系是：

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}S_x&=-\mathrm{d}S\cdot\cos(\boldsymbol{n},x)\\\mathrm{d}S_y&=-\mathrm{d}S\cdot\cos(\boldsymbol{n},y)\\\mathrm{d}S_z&=-\mathrm{d}S\cdot\cos(\boldsymbol{n},z)\end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

代入前式可得：

$$\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{P}_x\cos(\boldsymbol{n},x)+\boldsymbol{P}_y\cos(\boldsymbol{n},y)+\boldsymbol{P}_z\cos(\boldsymbol{n},z) \tag{1-7}$$

应力向量用其分量表示为：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{P}_n&=P_{nx}\boldsymbol{i}+P_{ny}\boldsymbol{j}+P_{nz}\boldsymbol{k}\\\boldsymbol{P}_x&=\sigma_{xx}\boldsymbol{i}+\tau_{xy}\boldsymbol{j}+\tau_{xz}\boldsymbol{k}\\\boldsymbol{P}_y&=\tau_{yx}\boldsymbol{i}+\sigma_{yy}\boldsymbol{j}+\tau_{yz}\boldsymbol{k}\\\boldsymbol{P}_z&=\tau_{zx}\boldsymbol{i}+\tau_{zy}\boldsymbol{j}+\sigma_{zz}\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

将关系式(1-8)代入平衡方程式(1-7),并以应力分量表示,可有:

$$P_{nx} = \sigma_{xx}\cos(\boldsymbol{n},x) + \tau_{yx}\cos(\boldsymbol{n},y) + \tau_{zx}\cos(\boldsymbol{n},z)$$

$$P_{ny} = \tau_{xy}\cos(\boldsymbol{n},x) + \sigma_{yy}\cos(\boldsymbol{n},y) + \tau_{zy}\cos(\boldsymbol{n},z)$$

$$P_{nz} = \tau_{xz}\cos(\boldsymbol{n},x) + \tau_{yz}\cos(\boldsymbol{n},y) + \sigma_{zz}\cos(\boldsymbol{n},z) \qquad (1\text{-}9)$$

方程式(1-9)称为柯什公式。它表明,在过一点的任意截面上作用的应力向量分量可以用作用于垂直坐标轴的三个截面上的应力向量分量来表示,或者说,一点的应力状态完全为 $\boldsymbol{P}_x,\boldsymbol{P}_y,\boldsymbol{P}_z$ 三个应力向量所描述。

四面体平衡意味着它既不平动,又不能转动。对于转动平衡条件,可以建立力矩平衡方程式,并由此方程式导出切应力互等原理。比较方便的是讨论四面体围绕过倾斜侧面三角形重心 C,并平

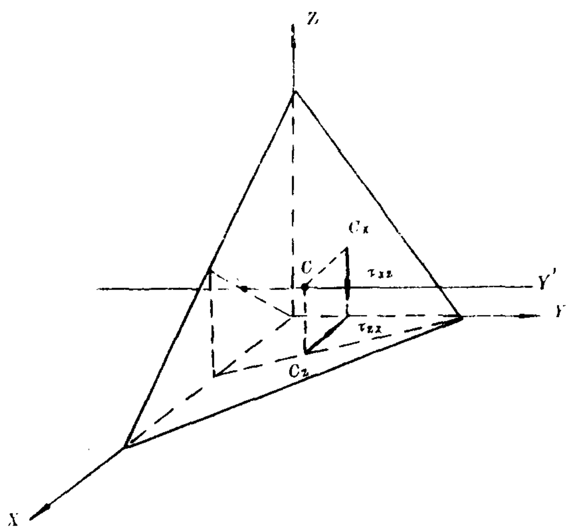

图 1-4 力矩平衡方程式的建立

行于坐标轴的直线 x'、y'、z'的转动,如图 1-4 所示。C 在 dS_x 和 dS_z 平面上的投影 C_x,C_z 分别是 dS_x,dS_Z 侧面三角形的重心。图

中 y' 为过 C 点平行于 y 轴的直线。作用于四面体四个侧面上的十二个应力分量，其作用点位于相应侧面三角形的重心，只有二个分量 τ_{xz} 和 τ_{zx} 将使物体相对 y' 而转动，其余十个应力分量或与 y' 相交或平行于 y' 轴，将不使物体发生转动。因此，相对 y' 的力矩平衡方程式将是：

$$\tau_{xz}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\cdot CC_x-\tau_{zx}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot CC_z=0 \tag{1-10}$$

其中 $CC_x=\frac{1}{3}\mathrm{d}x$；$CC_z=\frac{1}{3}\mathrm{d}z$；因此得到：

$$\tau_{xz}=\tau_{zx} \tag{1-11}$$

同理，过倾斜侧面三角形重心 C 作平行于 x，z 轴的直线 x'，z'；相对 x' 轴产生力矩的应力分量是 τ_{zy}，τ_{yz}；相对 z' 轴产生力矩的应力分量是 τ_{yx}，τ_{xy}；根据力矩平衡方程式，将得到：

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zy}&=\tau_{yz}\\ \tau_{yx}&=\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

等式(1-11)、(1-12)表示切应力互等原理。这说明在表示弹性体内一点应力状态的九个应力分量中只有六个是独立的，即 σ_{xx}，σ_{yy}，σ_{zz}，τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx}；

三、应力张量

如前所述，弹性体内一点的应力状态不能由一个简单的向量确定，而是由三个应力向量的九个分量所描述。九个应力分量构成一个二度对称张量。所以经常说，一点的应力状态决定于应力张量。为了说明应力张量的意义，我们讨论坐标系 xyz 旋转时，应力向量的分量变换。当坐标系 xyz 旋转某个角度后得到新坐标系 $x'y'z'$，两个坐标系原点相同，则有向径分量变换公式为：

$$\left.\begin{aligned}x'&=x\cos(l_{x'},l_x)+y\cos(l_{x'},l_y)+z\cos(l_{x'},l_z)\\ y'&=x\cos(l_{y'},l_x)+y\cos(l_{y'},l_y)+z\cos(l_{y'},l_z)\\ z'&=x\cos(l_{z'},l_x)+y\cos(l_{z'},l_y)+z\cos(l_{z'},l_z)\end{aligned}\right\} \tag{1-13}$$

由关系式(1-13)可见，当坐标旋转时，向径在新坐标中的投影 x'，

y',z'分别等于它在原坐标系中各个分量 x,y,z 在相应坐标轴 x'，y'或 z'上的投影之和。按照坐标系旋转时坐标变换关系，我们用原坐标系中的应力分量表示新坐标系中的应力分量。

首先取垂直新坐标轴之一，如 x'的微面积元，作用于该面积元上的应力向量为 $\boldsymbol{P}_{x'}$；根据柯什公式(1-9)可以写出 $\boldsymbol{P}_{x'}$在原坐标系 x,y,z 中的应力分量 $P_{x'x}$，$P_{x'y}$，$P_{x'z}$：

$$\left.\begin{aligned} P_{x'x} &= \sigma_{xx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x) + \tau_{yx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y) + \tau_{zx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z) \\ P_{x'y} &= \sigma_{xy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x) + \sigma_{yy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y) + \tau_{zy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z) \\ P_{x'z} &= \sigma_{xz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x) + \tau_{yz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y) + \sigma_{zz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z) \end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

应力向量 $\boldsymbol{P}_{x'}$在新坐标系中的某一坐标轴如 x'上的投影等于 $\boldsymbol{P}_{x'}$在原坐标系中各分量在这个坐标轴 x'上投影之和：

$$\sigma_{x'x'} = P_{x'x}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x) + P_{x'y}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y) + P_{x'z}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z) \tag{1-15}$$

将式(1-14)代入式(1-15)，可以得到：

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} = &\sigma_{xx}\cos^2(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x) + \tau_{yx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x) \\ &+ \tau_{zx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x) + \tau_{xy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y) \\ &+ \sigma_{yy}\cos^2(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y) + \tau_{zy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y) \\ &+ \tau_{xz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z) + \tau_{yz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z) \\ &+ \sigma_{zz}\cos^2(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z); \end{aligned} \tag{1-16}$$

同理不难得到应力向量在新坐标系中的九个分量表达式。引一个切应力表达式作为例子：

$$\begin{aligned} \tau_{x'z'} = &\sigma_{xx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_x) + \tau_{yx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_x) \\ &+ \tau_{zx}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_x) + \tau_{xy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_y) \\ &+ \sigma_{yy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_y) + \tau_{zy}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_y) \\ &+ \tau_{xz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_x)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_z) + \tau_{yz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_y)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_z) \\ &+ \sigma_{zz}\cos(\boldsymbol{l}_{x'},\boldsymbol{l}_z)\cos(\boldsymbol{l}_{z'},\boldsymbol{l}_z); \end{aligned} \tag{1-17}$$

为方便起见，使用带下标的坐标系表示，x_i，$i=1,2,3$ 和 x'_m，$m=$