

262105

水工結構应力分析丛书之九

拱 坝

潘家铮 編 著

8;2

上海科学技术出版社

514
3238.2

水工結構应力分析叢書之九

拱 壩

潘家鍾 編著

上海科学技术出版社

201502

內 容 提 要

本書論述拱坝应力計算的一些解法,分圓筒法、純拱法和試載法等。純拱法中討論到形常數、載常數、一般性理論,變截面及等截面圓拱計算等,而試載法則為經過數十年來的發展,証明是較為合理而切實用的。最後略述模型試驗中的一些問題。本書可供水利工程設計人員及有關專業院校師生參考之用。

水工結構应力分析丛书之九

拱 坝

潘家鏞 編 著

上海科学技术出版社出版

(上海南京西路2004号)

上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海市印刷五厂印刷 新华书店上海发行所总經售

开本 850×1168 1/32 印張 5 16/32 插頁 3 字數 135,000

1959年11月第1版 1959年11月第1次印刷

印數 1—1,500

統一書号: 15119 · 1324

定 价: (十二)0.92元

目 录

第一章	概述	1
第二章	圓筒法	6
第三章	純拱法中的拱和基础常数	10
第四章	計算彈性拱的一般性理論	15
第五章	变截面圓拱的計算	19
第六章	等截面圓拱的計算	32
第七章	簡易試載法	60
第八章	試載法概述	71
第九章	基本理論和公式	78
第十章	准备工作	103
第十一章	徑向調整	110
第十二章	切向調整	144
第十三章	扭轉調整	149
第十四章	再調整	157
第十五章	应力計算	160
第十六章	模型試驗	167
参考文献		172

第一章 概 述

拱坝是一种先进的坝型，它能适当地利用材料的强度而不是其重量来获得稳定；拱坝中渗透压力及重力只起了次要的作用，而温度变化和混凝土收缩则上升为主要荷载之一。由于拱坝的结构作用较重力坝合理，故其体积常较重力坝的为小。一般重力坝坝高与底宽之比常为 1:0.7 甚或达 1:1，而拱坝常仅为 1:0.3, 1:0.2。轻型的薄拱坝甚至能达到 1:0.1 以下。因此和重力坝相较，拱坝能节约大量的混凝土，从而节约了大量的建筑材料（水泥）和加速了建设进度，这完全符合我国大跃进的形势要求，和党所提出的“多快好省建设社会主义总路线”的精神。其次，拱坝的安全性也优于重力坝。根据国内外许多学者的研究，均认为拱坝是“潜在的安全性”最高的一种坝型。从实践上来看，拱坝的失事记录，极为少见，某些实验性的拱坝（如美国的司蒂文森坝）曾受到远远超过设计值的荷载并在顶上大量溢流，仍未造成破坏。因此在适当的条件下，拱坝常为混凝土坝中最经济和安全的一种。

过去也有部分人不赞成采用拱坝。他们认为拱坝混凝土的要求高，不能大量埋放毛石，每公方水泥用量较多，并且不容易象重力坝一样快速施工；拱坝的外形较复杂，施工准备工作较困难；拱坝横缝宜灌浆处理，因而对混凝土温度控制较严格，并增加灌浆工序，会延长工期；此外拱坝顶部溢流问题较重力坝难解决，对地形地质要求也高。当然，这些问题要视具体工程的条件来衡量，但拱坝体积小和安全性较高的两个基本优点，是众所公认的，何况上述的某些问题，在工人群众和技术人员已经解放了思想的今天

來說，實在已不是什麼不可克服的困難了。

我國過去修建的拱壩不多，最近高達八十餘公尺的流溪河拱壩和响洪甸重力拱壩的完成，給今後大量修建高拱壩創造了條件。1958年大躍進中，許多巨型和高大的拱壩都已紛紛設計興建。由於我國水利資源地區地形、地質條件優越之處極多，可以預言，拱壩的設計和興建將為我國大壩工程的主要發展方向之一。

一般講來，拱壩對地形、地質上的要求較高。地形上言，拱壩適宜修建於狹而陡的U形或V形峽谷中，對於寬闊平坦的梯形峽谷，修建純拱壩不甚適宜，但可建築以重力為主的重力拱壩，後者的應用範圍可以至河谷寬高比 $\frac{B}{H}$ 等於3.5以至4.0左右。

拱壩在庫水壓力及溫度變化等荷載作用下拱端會發生巨大的推力和剪力，直接傳達到基岩上，因此不但要求岩石的抗壓强度高，彈性模量大，尤其要求基岩致密完整，一切節理、裂縫等等都對拱壩不利，我們在決定修建拱壩時，必須在壩址區進行詳盡的地質勘探工作，弄清楚岩層、岩性、復蓋風化層、節理、裂縫、斷層、滑坡及水文地質等問題。但有些人對拱壩的地質問題抱着過分大的顧慮，這也是不必要的，除非岩石過分軟弱，一般基岩對抗壓強度的要求是容易滿足的，基礎變形雖對拱壩不利，但可通過工程措施適當地予以改善，壩區的節理及裂縫則每可通過灌漿來解決，以目前的技術水平來講，較不利的地質條件並不能完全否定建造拱壩的可能性。

拱壩除按其結構作用，可分為“拱壩”及“重力拱壩”兩大類外（實際上也沒有明顯的界限），並可按布置形式分為“定圓心拱壩”及“變圓心拱壩”兩類。前者各高程拱圈的圓心在平面上位於同一點，其半徑（或外半徑）亦常相等，後者各高程拱圈圓心在平面上不位於同一點，其半徑亦不等。除此以外，拱壩也有不用圓拱形式，而做成穹形薄殼式的，當然不能再稱之為定圓心或變圓心拱壩了。

拱壩壩高與最大厚度之比，可以從重力拱壩的2:1到純拱壩

的10:1或12:1。拱圈以采用圓拱形式为多見,这时,中心角及半徑-厚度比以越大越好,中心角一般不希望小于 100° 。

拱坝的应力計算工作素称浩大,我們如把目前已有的几种計算方法来归納一下,不妨把它們分为下列四类:

(1) 圓筒法 最早的拱坝是定圓心、定半徑的圓筒式結構,因此設計者把它当做一个浸在水中的圓筒来計算,計算的公式就是普通薄管(或厚管)公式,十分簡單。早年的工程師們用这种簡單方法設計和修建了不少低的或中等高度的拱坝,他們在設計中采用一个較大的安全因数来解决簡單公式中所未能考虑的各种問題。当然,这样做不能得出經濟和安全的結果。原始的圓筒公式,現在已很少采用了(即使作为初步估計,也常都不用此法);但若將圓筒法加以改进,使能包括若干边界条件影响,則仍很适用于定圓心、等半徑的薄拱坝。这种圓筒形薄拱坝如能按彈性圓筒壳来处理,結果可更好些;可是事实上,因边界条件复杂,应用彈性薄壳法来計算拱坝,具有不少数学上的困难。

(2) 純拱法 此法視拱坝由一組組水平(或斜的)拱圈組成,而且假定各拱圈間无相互牽涉作用,因得視為独立的拱进行計算。純拱法以其理論淺显,計算較方便,曾风行一时;而其缺点,显然在于它不能考虑拱圈間的相互影响,因而計算結果也不能表示拱坝中的实际应力情况。实际上,純拱法可称是一种拱坝的“設計方法”,而不是一种符合实际情况的計算理論。到目前,仍有不少国家的工程師采用此法設計拱坝。我們認為在比較次要的工程,或作为初步計算时,可以采用純拱法,此外,純拱法的計算理論及公式是試載法的基础。

(3) 悬臂拱法 此法是由純拱法逐漸推演发展而来。简单地說,此法視拱坝由兩組不同的結構——水平的拱圈和垂直的悬臂梁所組成,計算中同时考虑拱及梁的作用。因此,在理論上比較合理些。如何能在計算中同时考虑拱及梁的作用呢?美国垦务局的

工程師們創用了一種“試載法”的步驟，甚為風行。因此，我們常以試載法來稱呼此法。實際上，“試載”僅是一種計算步驟，而非原理，故以稱為“懸臂拱法”更合理些。關於試載法的詳細理論及方法，詳見第八至十五章，這裡暫不詳述。

也有人主張成立聯立方程式以代替“試載”的工作，但這條路不易走通。因為第一，當拱壩受力而發生開裂等情況時，疊加原理不復適用，聯立方程式法就將失效；第二，如果要考慮拱及懸臂梁各種方向位移的調整使其相符合時，聯立方程式的數量將浩大無比，建立和解算這組方程式會遭遇到很大的困難。

試載法的工作量也是相當浩大的，它的優點是在理論上較合理，而且富有伸縮性，對於重要的工程，或最後的定案計算，可以進行得深入一些；對於次要的工程，或初步計算時，可以少取一些拱圈，少校正一些位移，並用簡捷近似的方法來計算拱圈及梁，而將工作量壓縮到最少，使與所需的精度相稱。最簡單的試載法，只考慮中央懸臂梁及拱圈拱頂處的徑向位移調整，可稱為“中央懸臂梁法”，此法計算工作不多，常可取代純拱法。

(4) 彈性理論法 最精確的拱壩應力計算，應該由彈性理論的方法來完成，在彈性理論的觀點上，拱壩應力計算問題是一種什麼性質的問題呢？首先，這是一個三向的彈性體應力問題；其次，它屬於彈性力學第三類基本問題（部分邊界上的力系分布為已知，部分邊界上的位移或位移規律為已知）。換句話說，拱壩應力問題是一種特殊的“接觸問題”（拱壩和基岩的接觸問題）。

從以上的討論，不難看出要用彈性理論方法來計算拱壩應力，實在是一個極其複雜的問題。

第一次採用彈性力學途徑計算拱壩應力的，恐怕要推諸英國的 Pippard 教授及其助手們。他們首先導出了一些基本公式，並用迭弛法計算了一個定圓心的薄圓拱壩（英國給伊拉克建造的杜廣壩）；他們的方法，雖然在理論上富有興趣，但目前來說，還不能承

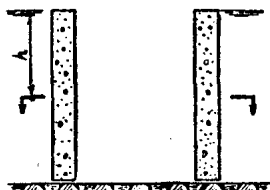
認這是一個適宜於設計工作中採用的方法。我們如注意到此法暫時尚只適用於定圓心圓拱壩，計算中不能考慮開裂問題，需要熟悉迭弛計算的大批人員，經過為時數年的計算，還要借助於模型試驗，才能得出初步結果，就不難了解此點。

如果在嚴謹的彈性理論中，加上一些簡化的假定，則可以使計算中的困難減輕些。例如假定拱壩厚度較其他尺寸為小，這就歸化成彈性薄殼的計算問題，和由圓筒法發展而來的薄殼法相同。我們倘注意到近年來拱壩厚度有日益減薄的趨勢，拱壩形式也不再限於直立的圓筒形式，而可造成穹形，則將不能或不宜再用“水平拱圈”、“垂直懸臂梁”這種經典觀念來分析它了。如何應用彈性薄殼的理論來計算薄拱壩的問題，將日益顯得重要，而將被提到研究的日程上來。

本書中，我們將僅限於介紹一些經典解法，首先，將論述圓筒法，純拱法和簡易的試載法，特別注重論述純拱法。在第八至十五章中我們完全討論試載法，該法經過數十年來的發展和理論及實驗上的研究，都證明是較為合理而切實用的——至少在計算圓筒形（非穹形薄殼式的）的拱壩是適宜的。最後則略述模型試驗中的一些問題。

第二章 圓筒法

考虑图 1 中的圓筒,四面浸在水中,在深度为 h 处,取出一断面,四周承受均匀外水压力 $p=wh$ (w 为水的容重),筒內的箍压力为 $P_x=wh \cdot R_u$ (R_u 为外半径),单位箍应力为



$$\sigma_x = \frac{wh \cdot R_u}{T} \quad (1)$$

式中 T 为拱圈厚,这就是圓筒法的基本公式。如我們已規定拱坝的允許压应力 $[\sigma]$,則由式(1),即可計算各断面上的厚度 T 。

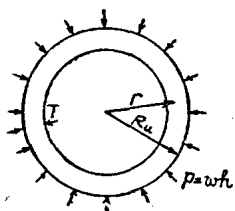


图 1

圓筒法有下列几个特点:

(1) 只能适用于定圓心等截面的薄圓拱坝(勉强可用于变圓心的等截面圓拱坝,不能适用于非圓形的拱坝)。

(2) 圓筒法不能用来計算温度应力、地震应力和基础影响等。

(3) 圓筒法完全忽略了边界条件,因此只能求出一个应力 σ_x (如考虑自重影响,尚可求出一个垂直压应力 σ_y)。实际上,拱坝各元素上有 12 个分应力,而且所求出的 σ_x ,也仅仅是真实应力的一个极其粗糙的平均值。

式(1)是个薄圓筒公式,当然,也可以用厚管公式来代替它(厚管公式可見水工隧洞一书,此地从略)。

上面說过,圓筒法中完全沒有顧及拱坝实际的边界条件,对定

圓心薄拱坝來說，我們可以設法包括一些边界条件影响在內，而使圓筒法的結果更較合理一些。

图 2^(a) 中示一修建于U形峡谷中的定圓心拱坝。我們首先可注意到拱坝之底，即圓筒之底，是与基岩固接而不能自由移位的，因此，將拱坝化为圓筒計算时，我們也把筒底与基岩固結起来，而如图 2 (b) 所示。这个問題可化为彈性地基上的梁来計算（見調压井衬砌一书）；我們可以計算圓筒在水压力及温度应力下的力矩 M_y 、剪力 V_y 及位移 Δ ，这些数值即近似地为原拱坝中央悬臂梁上的应力 M_y 、 V_y 及徑向位移 Δ 。如圓筒为等厚度（上下不变），基础为絕對剛固，則可以用調压井衬砌一书中的資料进行計算；如圓筒上下厚度有变化，則可以化成阶形梁来計算（詳見漸变段衬砌一书）。① 如要考慮基础的变位影响，我們可以应用第十一章中的基础变位常数 k_1 （即基础上作用单位力矩所引起的轉动），將图 2 (c) 的固定端改为彈性固接端来进行計算（詳調压井衬砌一书）。更精确一点，还应该考慮基础受剪力后的徑向位移影响，这須再求出一个基础徑向变形常数 k_3 （即单位剪力作用下的基础

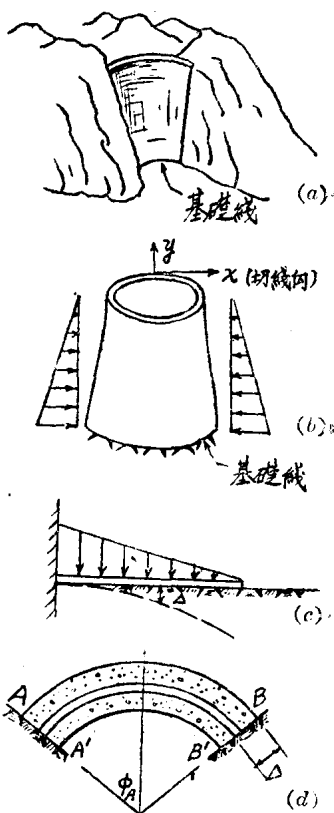


图 2

① 如拱坝厚度上下呈直綫变化，亦可用貝塞尔函数或米契尔函数計算之。参考 S. Timoshenko: Theory of Plates and Shells, 或机械工程学报四卷二期“法兰应力計算的研究”及 Trans. A. S. C. E. 83 卷中 B. A. Smith 氏的 Arched Dams 一文。

徑向位移值)。总之,这是一个对称圓筒在軸对称荷載下的应力及变位計算問題,即使断面是变化的,基础是彈性接合而非絕對剛固的,我們也常能求出其解答。这种問題的詳細演算方法,可參閱上述調压井衬砌及漸变段衬砌二书,本书中不再重复叙述。

求出梁的变位 Δ 后,原拱坝各高程拱圈中的箍向压力 P_x ,不再等于 (whR_u) ,而应该由 Δ 来计算:

$$P_x = \frac{E_g \cdot T}{r} \cdot \Delta \quad (2)$$

式中 E_g 为混凝土的彈性模量,以下常簡写为 E ; T 为拱坝厚, r 为平均半徑。

这样我們已將坝底的边界条件影响考虑进去,其后果是各高程拱圈的箍压力 P_x 应该由式(2)而不是式(1)計算,同时我們又求出了中央悬臂梁上的应力 V_y 和 M_y ; 其次一个問題是拱坝各高程拱圈并非一个完整的圓圈,因此必須考虑拱端基础的影响,这个問題可以用下述方法来近似地調整: 在图 2(d)中示某一高程的拱圈,若为完整圓筒,則按以上的計算,在該高程处的拱圈半徑將縮小一值 Δ ,而拱圈位置將要从 AB 移至 $A'B'$ 处,但实际上 AB 两点为拱圈兩端,已与基岩固接,不能自由变形,因此,我們可以把 $A'、B'$ 两点“拉回”到 $A、B$ 处,計算这种措施下的引起的拱端应力(包括軸力 P'_x 、剪力 V_x 及力矩 M_x),这种应力,与温度降低 t 度所引起的应力完全相同,而

$$t = \frac{\Delta}{\epsilon \cdot r} \quad (3)$$

式中 ϵ 为混凝土的綫膨脹系数,拱圈中由于温度降低所产生的应力,不論基础为完全剛固或彈性相接,常能計算出来,这样便校正了拱端边界影响。

圓筒法經過这样两次校正后,边界条件可望大致滿足(未能完全滿足的原因是:我們在处理第二种校正影响时,將各拱圈視为独立拱进行,忽略其相互影响)。这时我們已求出下列几項应力:

中央悬臂梁上：力矩 M_y ，剪力 V_y ，垂直压力 P_y （即自重）。

拱圈上：力矩 M_x ，剪力 V_x ，軸向力 P_x [包括各拱圈按式(2)求得的箍压力 P_x 及第二次校正基础影响所引起的軸向力 P'_x]。

这种改良的圓筒法，是我們設計某电站厂房防洪拱圈方案时研究出来的。对于薄的定圓心的拱坝（不論修建于U形或V形峡谷中）都很适用，它的計算远比薄壳理論或試載法为簡單，而所給出的中央悬臂梁及各拱圈的应力，都有足够的精度，可惜它不适用于变圓心拱坝及很厚的拱坝。

比圓筒法更合理的做法，是視拱坝为一連續的彈性薄壳，然后用薄壳理論来进行計算。但一般性的薄壳解法是很繁复的，除了少数簡單情况外，尙无現成的結果可供采用。只在近年来才有一些視拱坝为彈性薄壳而用薄壳理論进行初步分析的論文发表，讀者可参考“水利譯丛”、“水力发电”和“水电建設参考資料”各期刊上的轉載譯文。这些論文虽多数尙限于簡單和近似的分析，但我們若注意到拱坝的結構形式日益向薄壳方向发展，可以确信相应的理論研究工作在今后亦必有更多的发展。

第三章 純拱法中的拱和基础常数

純拱法既然將各拱圈視為獨立的拱進行計算，則問題就簡化成普通結構學上彈性拱的計算問題，其比較特殊的地方，有以下几点：

(1) 拱坝所受剪力及压力的数值很大，因此，它們对于变形的影响不宜忽略（尤其是压力的影响）。

(2) 拱坝两端基础能发生弹性变形，而且基础变形对拱坝应力的影响很大，亦不宜忽略。

(3) 拱坝所受的主要荷载是向心的水压力及温度荷载（地震时尚有横向惯性力）。

(4) 拱坝拱圈厚度较大，宜作为厚拱计算。

純拱法計算中，最好利用“形常数”及“載常数”的觀念，最稱清晰。以下我們介紹这些常数的定义。

(甲) 形常数

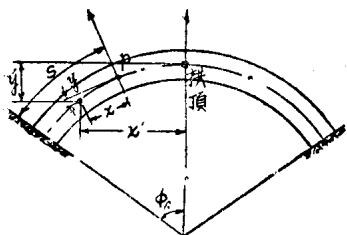


图 3

图 3 中示一拱圈， p 为其中任一点，在该点处有 6 个形常数 $A_1, B_1, C_1, B_2, C_2, B_3$ ，其定义如下：

A_1 —— 在 p 处将拱圈割断，化成两段弯曲的悬臂梁，并在 p 点处作用一单位力矩，所引起的 p 点转动角，称为 A_1 ，如基础刚固，则

$$A_1 = \int_0^s \frac{ds}{EI}$$

(积分自 P 点积至較近的拱端);如基础能发生彈性变形,則

$$A_1 = \int_0^s \frac{ds}{EI} + (E) \quad (4)$$

式中 (E) 为基础常数,即作用一单位力矩于基础上所引起的基础轉动角。可見形常数常由两部分合成,一部分是拱圈成分 $\left(\int_0^s \frac{ds}{EI}\right)$, 另一部分是基础成分[如 (E)]。其他形常数及載常数亦同。

B_1 ——在 P 点作用一单位軸向力所引起的該点轉动,由馬氏互等定律,此值亦即在 P 点作用一单位力矩所引起的該点切向位移,其公式为

$$B_1 = \int_0^s \frac{y \tilde{ds}}{EI} + (E)y_A + (F)\sin \phi_A \quad (5)$$

式中第一項为拱圈部分,第二、三項为基础影响部分, x 、 y 为各点坐标^①(以 P 点为原点,坐标軸沿 P 点徑向及切向), x_A 、 y_A 为拱端坐标, (F) 为另一基础常数,即在基础上作用一单位軸向力所发生的轉动。

C_1 ——在 P 点作用一单位剪力所引起的該点轉动,由馬氏互等定律,此值亦即在 P 点作用一单位力矩所引起的該点徑向位移,其公式为

$$C_1 = \int_0^s \frac{x \tilde{ds}}{EI} + (E)x_A + (F)\cos \phi_A \quad (6)$$

B_2 ——在 P 点作用一单位軸向力所引起的該点徑向位移,由馬氏互等定律,此值亦即在 P 点作用一单位剪力所引起的該点切向位移,其公式为

① 对于拱頂这一点而言, x 、 y 軸即为水平和垂直軸, x_A 、 y_A 及 ϕ_A 表示拱端至拱頂的縱橫坐标和角坐标。

$$B_2 = \int_0^s \frac{xy ds}{EI} - \int_0^s \frac{\sin \phi \cos \phi ds}{EA} + 3 \int_0^s \frac{\sin \phi \cos \phi ds}{EA} \\ + (E)x_A y_A - (G)\sin \phi_A \cos \phi_A + (H)\sin \phi_A \cos \phi_A \\ + (F)x_A \sin \phi_A + (F)y_A \cos \phi_A \quad (7)$$

式中前三项为拱圈影响，后五项为基础影响， ϕ 为各点的角坐标， (G) 及 (H) 为另两个基础常数，其定义为

(G) ——在基础上作用单位轴向推力所引起的切向变形值；

(H) ——在基础上作用单位剪力所引起的径向变形值。

C_2 ——在 P 点作用一单位剪力所引起该点的径向位移，其值为

$$C_2 = \int_0^s \frac{x^2 ds}{EI} + \int_0^s \frac{\sin^2 \phi ds}{EA} + 3 \int_0^s \frac{\cos^2 \phi ds}{EA} \\ + (E)x_A^2 + (G)\sin^2 \phi_A + (H)\cos^2 \phi_A + 2(F)x_A \cos \phi_A \quad (8)$$

B_3 ——在 P 点作用一单位轴向力所引起该点的切向位移，其值为

$$B_3 = \int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} + \int_0^s \frac{\cos^2 \phi ds}{EA} + 3 \int_0^s \frac{\sin^2 \phi ds}{EA} \\ + (E)y_A^2 + (G)\cos^2 \phi_A + (H)\sin^2 \phi_A + 2(F)y_A \sin \phi_A \quad (9)$$

以上六个形常数，只为拱圈尺寸及基础特性的函数。属于基础部分的有 (E) 、 (F) 、 (G) 、 (H) 四个基本常数，它们是基础弹性模量、泊松比、基坑尺寸及基坑倾角的函数。根据这些资料，可以按一定公式求出 (E) (F) (G) (H) 四值（公式列于第十一章中）。属于拱圈部分的，有以下 9 个积分值：

$$\int \frac{ds}{EI}, \int \frac{y ds}{EI}, \int \frac{x ds}{EI}, \int \frac{xy ds}{EI}, \int \frac{x^2 ds}{EI}, \int \frac{y^2 ds}{EI}, \\ \int \frac{\sin^2 \phi ds}{EA}, \frac{\cos^2 \phi ds}{EA}, \int \frac{\sin \phi \cos \phi ds}{EA}。$$

对于非圆形拱，或变截面拱，这些积分值须用分段积分法求出，工

作量很大;对于圆拱,可利用某些数表,查出拱圈上各指定点的这些积分值。

在导引上列公式中,是取剪力系数 $2k(1+\mu)=3$ 的 (k 为断面上剪力分布系数),有的资料中定此值为 2.88,则以上各式中的系数 3 应改为 2.88。

在导引以上公式时,对应力及位移的正负号,采取图 4 中所示的规定(示左半拱圈)。

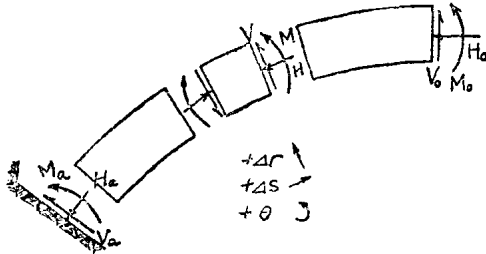


图 4 正的应力及位移图

(乙) 载常数

载常数共计 3 个,记之为 D_1 、 D_2 及 D_3 。

D_1 ——由于拱圈上荷载所引起的 P 点转动值(所谓拱圈荷载即指自拱端至 P 点间的荷载),其值为

$$D_1 = \int_0^s \frac{M_L ds}{EI} + M_{AL}(E) + V_{AL}(F) \quad (10)$$

式中 M_L 指拱圈上各点(在 P 点切开后)由荷载所引起的静定力矩, M_{AL} 及 V_{AL} 指静定情况下的拱端的力矩和剪力。

D_2 ——由于拱圈上荷载所引起的 P 点的径向位移值,按下式计算:

$$\begin{aligned} D_2 = & \int_0^s \frac{M_L x ds}{EI} + \int_0^s \frac{H_L \sin \phi ds}{EA} + 3 \int_0^s \frac{V_L \cos \phi ds}{EA} \\ & + M_{AL}(E)x_A + H_{AL}(G)\sin \phi_A + V_{AL}(H)\cos \phi_A \\ & + M_{AL}(F)\cos \phi_A + V_{AL}(F)x_A - ct y_A \end{aligned} \quad (11)$$