

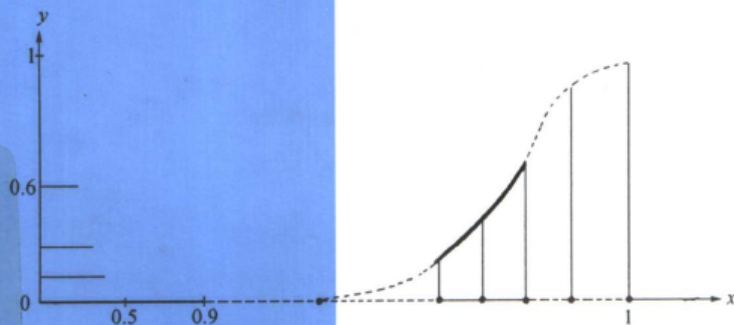
微积分已成为普通中学生都能明白的常识，
你知道吗？请读大众化理论专著

微积分的本来面目

Wei Ji Fen De Ben Lai Mian Mu

——无穷小数的思维方法与计算

尚士民 著



东北林业大学出版社

微积分的本来面目

尚士民 著

业
大学出版社

责任编辑：杨秋华

封面设计：曹 晖

ISBN 7-81076-164-1



9 787810 761642 >

ISBN 7-81076-164-1

O·50 定价：18.00 元

微积分的本来面目

——无穷小数的思维方法与计算

尚 士 民 著

东北林业大学出版社

内 容 提 要

本书的基本概念是微分,不是导数.

本书明确指出“数1”与“给定的正无穷小数”是两个不能定义的原始概念.在此基础上,以清楚、灵活的符号表达方式,完成了微分与积分运算.本书还给出了广义积分与级数敛散性判别的固定方法.

本书对数学工作者与数学爱好者来说是不可少的比较参考书;对于学习微积分的学生来说,学习本书你会豁然开朗,一扫从前学习导数积分时的困惑感觉.

图书在版编目(CIP)数据

微积分的本来面目:无穷小数的思维方法与计算/尚士民著. —哈尔滨:东北林业大学出版社,2001

ISBN 7-81076-164-1

I. 微... II. 尚... III. 微积分 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 14682 号

责任编辑:杨秋华 封面设计:曹 晖



NEFUP

微积分的本来面目

—无穷小数的思维方法与计算

Weijifen de Benlai Mianmu

尚士民 著

东北林业大学出版社出版发行

(哈尔滨市和兴路 26 号)

黑龙江省教委印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 8.5 字数 213 千字

2000 年 12 月第 1 版 2000 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—2 070 册

ISBN 7-81076-164-1

O·50 定价:18.00 元

序 言

给定的正无穷小数是一个原始概念,只能描述,不能定义,无论对它怎样定义都导致谬误.数学中的原始概念,还有“数1”和“集合”.

独立极限论中不可缺少的一个概念是“任意小正数 ϵ ”,容易证明, $\epsilon \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$ (空集).因而独立极限论逻辑基础是极为脆弱的,出路只有两条:一条是承认独立极限论的脆弱性,一条是把极限论建立在“给定的正无穷小数”的基础上,即承认 $\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right)\right] \cap \mathbf{R} = \emptyset$. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right)$ 为正无穷小数集的一个表达形式.

本书的一个基础概念是数概念.数概念的基础是有理数.

定义 若概念 x 对任取有理数 a ,总有 $x > a, x = a, x < a$ 之一成立,则称概念 x 为数概念.

本书中所涉及的实数、轴数、广义实数、侧数、清数都是数概念.

由于正无穷小数不可定义的困扰,由于任意小正数 ϵ 按独立极限论的逻辑为空集元素这件事未被查出,使伟大的数学家柯西(Cauchy A. L.)最后摒弃了人类思维的珍贵火种——无限小,这是发生于19世纪的一个最重要的的数学史实.

今天我们把极限论建立在无穷小的基础上,恢复了莱布尼茨所说的“马在前车在后”的状态,摒弃了车(极限)在前马(无穷小数)在后的不正常状态.

微积分知识的核心是设 $dx \in \mathbf{w}x^+$ 和 $x \in [a, b]$,给出一个微

分函数 $\varphi(x, dx)$. 若存在实数函数 $F(x) \in [a, b]$, 使

$$\varphi(x, dx) = F(x + dx) - F(x),$$

则称微分函数 $\varphi(x, dx)$ 在 $[a, b]$ 上可积; 若存在一个实数函数 $f(x) \in [a, b]$, 使

$$\varphi(x, dx) = f(x)dx,$$

则称微分函数 $\varphi(x, dx)$ 在 $[a, b]$ 上可微.

对于可积且可微的微分函数 $\varphi(x, dx)$ 有 (在远误差限为 dx 的条件下)

$$\varphi(x, dx) = F(x + dx) - F(x) = f(x)dx,$$

相应的积分有

$$\begin{aligned}\int_{[a, b]} \varphi(x, dx) &= \int_{[a, b]} f(x)dx \\ &= \int_{[a, b]} [F(x + dx) - F(x)] \\ &= F(x) \Big|_b^a = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

于是一语道破微积分的本来面目.

尚士民

2000年10月

联系电话 0459-4611762

目 录

第一章 第一个不加定义的数	(1)
第一节 第一个不加定义的数	(1)
第二节 自然数的加法与减法	(1)
第三节 自然数的乘法与除法	(3)
第四节 乘方与对数、非有理数	(4)
第五节 三角运算	(6)
第六节 近似计算	(7)
第七节 一元函数,初等函数	(7)
第二章 正无穷小及其继承公理	(11)
第一节 什么是正无穷小	(11)
第二节 正无穷小继承公理	(11)
第三节 轴数概念	(12)
第四节 轴数继承公理	(13)
第五节 正无穷小判别公理	(14)
第六节 轴数的远三性	(15)
第七节 常用正无穷大比较定理	(17)
第八节 轴数的商集	(19)
第九节 轴数计算公理	(21)
第十节 条件等式	(25)
第十一节 极限相等	(27)
第十二节 主要定理	(28)
第十三节 关于数学中两个基数的若干种称呼	(32)
第三章 微积分的邻差理论	(34)
第一节 函数 $y = f(x)$ 的连续性	(34)
第二节 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的微分	(35)

第三节	函数 $y = f(x)$ 在区间 q 上的微分	(38)
第四节	微分的两种主要形式	(38)
第五节	求微分的两条主要规律	(39)
第六节	关于我们所研究的实数函数的要求	(41)
第七节	实数区间向轴数区间的转化,轴数函数	(42)
第四章	微积分技术	(45)
第一节	微积分技术的实质	(45)
第二节	基本初等函数的微分公式	(45)
第三节	求微分法则	(48)
第四节	微积分的主要公式与法则	(51)
第五节	求微分习题	(56)
第六节	求导数运算	(57)
第七节	隐函数求微分	(58)
第八节	用参变量表示的函数的微分	(59)
第九节	求不定积分的运算	(60)
第十节	不定积分表	(66)
第十一节	不定积分习题	(66)
第五章	微积分的整体理论	(68)
第一节	微积分的朴素理论	(68)
第二节	整体的函数表示法	(68)
第三节	增量积分	(72)
第四节	放大积分	(73)
第五节	放大积分的性质	(75)
第六节	放大积分的存在性	(77)
第七节	定积分的近似计算	(86)
第八节	定积分的理论计算	(89)
第九节	定积分的换元积分法	(91)
第十节	定积分的分部积分法	(92)
第十一节	例题与习题	(94)

第六章 极限理论介绍	(96)
第一节 数列的极限	(96)
第二节 函数的极限	(102)
第三节 独立的极限理论	(109)
第四节 独立极限论下的微积分理论	(118)
第五节 对独立极限论的一个独立见解	(121)
第六节 极限定义与实数对无穷小的反继承公理	(123)
第七章 广义积分	(126)
第一节 无穷积分	(126)
第二节 瑕积分	(129)
第三节 习题	(134)
第八章 中值定理	(135)
第一节 中值定理	(135)
第二节 洛必达法则	(139)
第三节 高阶导数	(147)
第四节 台劳公式	(148)
第五节 习题	(158)
第九章 微分的应用	(160)
第一节 函数的单调性与极值	(160)
第二节 曲线的凹凸与拐点	(164)
第三节 曲线的渐近线	(167)
第四节 函数图形的描绘	(168)
第五节 求极值的应用问题	(170)
第六节 弧微分	(172)
第七节 曲率圆	(173)
第八节 习题	(176)
第十章 放大积分的应用	(177)
第一节 放大积分的几何应用	(177)
第二节 放大积分的物理应用	(182)

第三节	习题	(183)
第十一章	数项级数	(185)
第一节	数项级数的概念与分类	(185)
第二节	数项级数的简单性质	(187)
第三节	正项级数敛散性的初步判别	(189)
第四节	一般级数的敛散性判别	(198)
第五节	什么是实数	(200)
第六节	习题	(201)
第十二章	正项级数示散列判散法	(203)
第一节	连对数	(203)
第二节	一阶发散指数判散法	(204)
第三节	二阶发散指数判散法	(204)
第四节	三阶发散指数判散法	(205)
第五节	m 阶发散指数判散法	(205)
第六节	正项级数示散列判散法	(208)
第七节	正项级数示散列判散法举例(一)	(209)
第八节	正项级数按示散列的分类	(215)
第九节	发散指数的前后左右关系	(216)
第十节	正项级数示散列判散法举例(二)	(217)
第十一节	非规整正项级数的例子	(219)
第十二节	级数收敛的一个充分条件	(220)
第十三节	广义积分的示散列判散法	(220)
第十四节	习题	(229)
第十三章	函数列与函数项级数	(230)
第一节	函数列及其引出的函数团	(230)
第二节	半独立轴数函数 $f_w(x)$ 的性质	(233)
第三节	函数列的一致收敛	(236)
第四节	一致收敛判别法	(237)
第五节	极限函数的连续性	(241)

第六节	极限函数的微积分性质·····	(243)
第七节	函数项级数的概念·····	(245)
第八节	函数项级数的微积分性质·····	(246)
第九节	幂级数的一致收敛·····	(248)
第十节	幂级数的性质·····	(251)
第十一节	初等函数展成幂级数·····	(254)
第十二节	点函数·····	(257)
第十三节	习题·····	(258)
附录	本书主要符号一览表·····	(260)
参考文献	·····	(262)



第一章 第一个不加定义的数

第一节 第一个不加定义的数

初等数学的基础是一个不加定义的数,这个数就是刚入学的儿童都懂得的数“1”.数1是不加定义的数,也是第一个不能定义的数.

有了数“1”,再把另一个数“1”和原来的数“1”放在一起,就成了数2,…….有了数1,也就有了一个不加定义的运算(换算),这个换算叫“加1”,记作“+1”.

有了数1和运算“加1”以后,就会产生自然数2,3,4,……

$$1+1=2,$$

$$2+1=3,$$

$$3+1=4,$$

...

实际上是 $1+1$ 定义为2, $2+1$ 定义为3, $3+1$ 定义为4,……,这样就产生了自然数1,2,3,4,…….

以后,自然数一般用 n 表示,自然数集合用 N 表示.

第二节 自然数的加法与减法

定义1 设有两个自然数 n 和 m .则称 $n + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\uparrow}$ 为 $n+m$,其中 n 叫被加数, m 叫加数. $n+m$ 本身也是一个自然数,叫和.自然数加法有如下运算规律:

(1) 交换律: $n + m = m + n$, 即 $n + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\uparrow} = m + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\uparrow}$;

(2) 结合律: $(n + m) + k = n + (m + k)$;

(3) 消去律: $n + m = n + k \Leftrightarrow m = k$.

有了自然数,也就有了自然数的顺序,即自然数的大小概念:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \cdots,$$

$$n + 1 < n + 2 < n + 3 < n + 4 < \cdots,$$

$$m < k \Leftrightarrow n + m < n + k.$$

定义 2 设有两个自然数 $n > m$. 若 $n = m + k$, 则规定

$$n - m = k,$$

称 $n - m$ 为自然数的减法.

定义 2 是说有 3 个自然数 n, m, k ,

$$n - m = k \Leftrightarrow n = m + k.$$

定律 设 $n \geq m$, 则任取自然数 k , 等式 $m - n = k$ 总不成立.

定律是说在自然数范围内,只能有大数减去小数,小数减去大数不能进行,相等的两个数也不能相减.并表明,在自然数范围内,减法不是总能进行的.这意味着自然数不够用了,需要创造或发现新的数.

定义 3 (零的发现) 规定任取自然数 m , $m - m = 0$, $m + 0 = m$.

这里说明零是从自然数减法中发生的,现实的零也确实是从减法中发现的.例如,箱中的苹果数为零,表明箱中从前有苹果,因为都拿走了,才变成了零,有变成了无.

定义 4 (负自然数的发现) 设给定两个自然数 $n > m$, 规定 $m - n = -(n - m)$. 其中 $n - m = k$ 为自然数, $-k = -(n - m)$ 叫负自然数.

定义 5 自然数、零、负自然数构成一个新数集,叫整数集,记作 $\mathbb{Z}$.

定义 6(整数加法) 设 i, j 为两个整数, 则规定

$$\begin{aligned}i + j &= i - (-j) = -(-i) + j \\&= -(-i + -j).\end{aligned}$$

整数加法仍满足交换律、结合律和消去律.

定义 7(整数减法) 设 $i, j \in \mathbb{Z}$, 则规定 $i - j = i + (-j)$.

整数加减法总能进行.

第三节 自然数的乘法与除法

定义 8 给定 $n, m \in \mathbb{N}$, 则规定

$$n \times m = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m \uparrow}.$$

自然数乘法满足交换律和结合律以及对加法的分配律.

定义 9 给定 n, m, s 为自然数. 若 $n \times m = s$, 则可定义除法 $s \div n = m$.

定义 10(可除性) 设给定自然数 n, s . 若能找到 $m \in \mathbb{N}$, 使 $s = m \times n$, 则认为 $s \div n$ 能进行; 若任取 $m \in \mathbb{N}$, 总有 $s \neq m \times n$, 则认为 $s \div n$ 不能进行.

当 $s \div n$ 不能进行时, 也就是在整数范围内 $s \div n$ 找不到, 这个疑难为分数的诞生奠定了基础.

定义 11(分数的产生) 给定自然数 n, s . 除法 $s \div n$ 的商为 m , 此时 m 不一定为自然数, 一般记 $m = \frac{s}{n}$, 这里 m 已经是一种新数(分数).

分数发现的社会背景是刀的发明, 使一个整体能被均匀地分成若干份.

自然数之商叫正分数, 进而可定义负分数. 正分数、零、负分数构成有理数. 知道了有理数, 人类对数的认识就算完善了, 因为此时, 人们可以近似地表达任何数了.

有了自然数的除法后, 可以定义整数的乘除法, 进而可定义有

理数的乘除法. 除法的一个重要特征是零不能做除数. 乘法保持有交换律、结合律、消去律与分配律.

第四节 乘方与对数、非有理数

定义 12 设 a 为有理数, n 为自然数,

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \uparrow},$$

称 a^n 为 a 的 n 次方, (符号“ $=$ ”表示被定义为), 也记作 $a \sqcap n$ 或 $n \sqcup a$. $\sqcap$ 叫升法号, $\sqcup$ 叫落法号. $a \sqcap n$ 读做 a 升 n , $n \sqcup a$ 读做 n 落 a . 即有

$$a \sqcap n = n \sqcup a = a^n = n \text{ 个 } a \text{ 相乘.}$$

式中: a 叫乘方 a^n 的底数, n 叫指数.

升法与落法似乎没有区别, 但连升连落时区别就太大了. 例如

$$3 \sqcap 3 \sqcap 3 = 27^3 = 19\,683,$$

$$3 \sqcup 3 \sqcup 3 = 27 \sqcup 3 = 3^{27} = 7.625\,6 \times 10^{12}.$$

乘方运算的运算规律如下:

- (1) 指数可加, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
- (2) 除时指数可减, $a^n \div a^m = a^{n-m}$;
- (3) 再乘方指数可乘, $(a^n)^m = a^{nm}$;
- (4) 底 $a > 1$ 时, 单调性, 即 $n < m \Leftrightarrow a^n < a^m$;
- (5) 底 $a > 1$ 时, 单调性, 即

$$1 < a < b \Leftrightarrow a^n < b^n.$$

定义 12 中指数 n 为自然数, 我们要把指数 n 逐渐转化为有理数.

乘方是 $a^n = b$, n 为自然数, a 与 b 为正有理数. 现在设已知 b 与 n , 问如何求底数 a , 这就是开方

$$a = \sqrt[n]{b}.$$

由于依照运算规律应有

$$b^{1/n} = (a^n)^{1/n} = a^{n \cdot (1/n)} = a,$$

因而就规定 $\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$, 这样指数就可以为自然数的倒数了, 再求乘方

$$(b^{1/n})^m = b^{(1/n)m} = b^{m/n},$$

于是指数就可以为正分数了. 再由于

$$1 = a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0,$$

$$a^{-m} = a^{0-m} = a^0 \div a^m = 1/a^m,$$

因而, 可规定 $a^0 = 1, a^{-m} = 1/a^m$, 这样指数就可为任一有理数了.

在开方运算中, 出现了一个问题, 例如 $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.414\cdots$ 已经不能用有理数表达了, 就是说 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 但显然, 如果第一个不加定义的数 1 确定后, $\sqrt{2}$ 是确定的数, 这样的数就叫无理数.

有理数、无理数统叫实数. 由实数构成的集合叫实数集合, 记作 $\mathbf{R}$. 有理数集合记作 $\mathbf{Q}$.

不过严格讲起来, 应有如下定义:

定义 13(数概念) 设给定一个概念 x . 若任取有理数 a , 总有 $x < a, x > a, x = a$ 三者之一成立, 则称 x 为一个数概念.

例如 $\sqrt{2}$ 是个数概念, 而 $\sqrt{-1}$ 不是数概念.

定义 14(实数) 设 x 是一个数概念, 当第一个不加定义的数 1 确定后, x 也就确定了, 则称 x 为实数.

如果有第二个不能加以定义的数(记作 β)存在, 一个数概念 x , 只有第一个不加定义的数和第二个不加定义的数 β 同时确定后, x 才确定, 此时 x 就不一定是实数.

现在要讨论乘方 a^b , 其中 a, b 都是正实数. 不妨设 $a > 1$, 且有有理数 a_1, a_2 靠近 a , 即 $1 < a_1 < a < a_2$; 又有有理数 b_1, b_2 靠近 b , 即 $0 < b_1 < b < b_2$, 则按乘方性质, 一定有

$$a_1^{b_1} < a^{b_1} < a^b < a^{b_2} < a_2^{b_2},$$

这样当 $a_1^{b_1}, a_2^{b_2}$ 非常靠近时, 就可以理解 a^b 的意义了. 一般来说 $a^b = c$; a, b, c 都为实数.

请读者注意,当 a, b 都是有理数时,往往 $a^b = c$ 不是有理数,而是无理数,因而只能说 $a^b = c$ 为实数.

乘方 $a^b = c$ 的另一个逆运算是取对数,或者叫对法,对数算法.

定义 15 取 a, b, c 为实数,规定

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,$$

称 $\log_a b$ 为以 a 为底的 b 的对数, a 叫底数, b 叫真数. $c = \log_a b$ 叫对数值,也记作 $b \sqsubset a, a \sqsupset b$. 读做 b 对 a, a 反对 b . 即

$$\log_a b = b \sqsubset a = a \sqsupset b.$$

一般要求 a, b 为正数.

例 1 $\log_2 8 = 3.$

例 2 $\log_2 4 = 2.$

例 3 $\log_{(-2)}(-8) = (-8) \sqsubset (-2) = 3.$

例 4 $\log_2(-4) = (-4) \sqsubset 2$ 不能运算.

例 5 $\log_{-2} 4 = 4 \sqsubset (-2) = 2.$

例 6 $\log_{(-2)}(-4) = (-4) \sqsubset (-2)$ 不能运算.

对数主要运算规律是换底公式:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

在对数 $\log_a b$ 中,即使 a, b 都是有理数, $\log_a b$ 也往往不是有理数,因而对数运算中产生大量无理数.

第五节 三角运算

三角运算不是直接建立在“第一个不加定义的数 1”基础上,而是在人们认识了有理数和实数之后,在测量实践的基础上逐渐产生了三角运算.

在三角形 ABC 中, $\angle C = \angle ACB = 90^\circ = \pi/2$, 斜边为 c , B 角