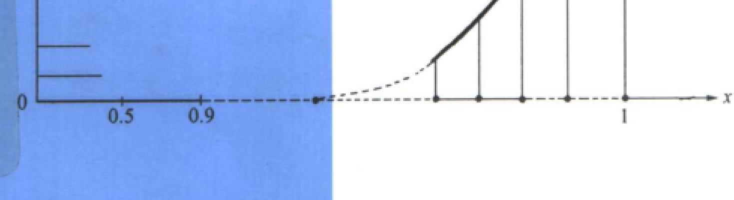
微积分已成为普通中学生都能明白的常识，
你知道吗？请读大众化理论专著

微积分的本来面目

WeiJiFenDeBenLaiMianMu

——无穷小数的思维方法与计算

尚士民 著



东北林业大学出版社

责任编辑：杨秋华
封面设计：曹　晖

ISBN 7-81076-164-1

9 787810 761642 >

微积分的本来面目

尚士民　著

业大学出版社

ISBN 7-81076-164-1
O · 50　定价：18.00元

微积分的本来面目

——无穷小数的思维方法与计算

尚 士 民 著

东北林业大学出版社

内 容 提 要

本书的基本概念是微分,不是导数.

本书明确指出"数1"与"给定的正无穷小数"是两个不能定义的原始概念.在此基础上,以清楚、灵活的符号表达方式,完成了微分与积分运算.本书还给出了广义积分与级数敛散性判别的固定方法.

本书对数学工作者与数学爱好者来说是不可少的比较参考书;对于学习微积分的学生来说,学习本书你会豁然开朗,一扫从前学习导数积分时的困惑感觉。

图书在版编目(CIP)数据

微积分的本来面目:无穷小数的思维方法与计算/尚士民著.一哈尔滨:东北林业大学出版社,2001

ISBN 7-81076-164-1

Ⅰ.微... Ⅱ.尚... Ⅲ.微积分 Ⅳ.0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第14682号

责任编辑:杨秋华　封面设计:曹　晖

NEFUP

微积分的本来面目

—无穷小数的思维方法与计算

Weijifen de Benlai Mianmu

尚士民　著

东 北 林 业 大 学 出 版 社 出 版 发 行

(哈尔滨市和兴路26号)

黑 龙 江 省 教 委 印 刷 厂 印 刷

开本850×1168　1/32　印张8.5　字数213千字

2000年12月第1版　2000年12月第1次印刷

印数1—2 070册

ISBN 7-81076-164-1

O·50　定价:18.00元

序　言

给定的正无穷小数是一个原始概念，只能描述，不能定义，无论对它怎样定义都导致谬误.数学中的原始概念，还有“数 1”和“集合”.

独立极限论中不可缺少的一个概念是“任意小正数 ϵ”，容易证明，$\epsilon\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\varnothing$（空集）.因而独立极限论逻辑基础是极为脆弱的，出路只有两条：一条是承认独立极限论的脆弱性，一条是把极限论建立在“给定的正无穷小数”的基础上，即承认 $\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)\right]\cap\mathbf{R}=\varnothing$. $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)$ 为正无穷小数集的一个表达形式.

本书的一个基础概念是数概念.数概念的基础是有理数.

定义　若概念 x 对任取有理数 a，总有 $x>a$，$x=a$，$x<a$ 之一成立，则称概念 x 为数概念.

本书中所涉及的实数、轴数、广义实数、侧数、清数都是数概念.

由于正无穷小数不可定义的困扰，由于任意小正数 ϵ 按独立极限论的逻辑为空集元素这件事未被查出，使伟大的数学家柯西(Cauchy A.L.)最后摒弃了人类思维的珍贵火种——无限小，这是发生于 19 世纪的一个最重要的的数学史实.

今天我们把极限论建立在无穷小的基础上，恢复了莱布尼茨所说的“马在前车在后”的状态，摒弃了车（极限）在前马（无穷小数）在后的不正常状态.

微积分知识的核心是设 $\mathrm{d}x\in\mathbf{wx}^{+}$ 和 $x\in[a,b]$，给出一个微

分函数 $\varphi(x,\mathrm{d}x)$. 若存在实数函数 $F(x)E[a,b]$, 使

$$\varphi(x,\mathrm{d}x) = F(x+\mathrm{d}x) - F(x),$$

则称微分函数 $\varphi(x,\mathrm{d}x)$在$[a,b]$上可积; 若存在一个实数函数 $f(x)E[a,b]$, 使

$$\varphi(x,\mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x,$$

则称微分函数 $\varphi(x,\mathrm{d}x)$在$[a,b]$上可微.

对于可积且可微的微分函数 $\varphi(x,\mathrm{d}x)$有(在远误差限为 $\mathrm{d}x$ 的条件下)

$$\varphi(x,\mathrm{d}x) = F(x+\mathrm{d}x) - F(x) = f(x)\mathrm{d}x,$$

相应的积分有

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}\varphi(x,\mathrm{d}x) &= \int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{[a,b]}[F(x+\mathrm{d}x) - F(x)] \\ &= F(x)\Big|_b^a = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

于是一语道破微积分的本来面目.

尚士民
2000 年 10 月
联系电话　0459 - 4611762

目　　录

第一章　第一个不加定义的数

第一节　第一个不加定义的数

初等数学的基础是一个不加定义的数，这个数就是刚入学的儿童都懂得的数"1".数 1 是不加定义的数，也是第一个不能定义的数.

有了数"1"，再把另一个数"1"和原来的数"1"放在一起，就成了数 2，….有了数 1，也就有了一个不加定义的运算(换算)，这个换算叫"加 1"，记作"+1".

有了数 1 和运算"加 1"以后，就会产生自然数 2,3,4,…

$1+1=2,$

$2+1=3,$

$3+1=4,$

…

实际上是 $1+1$ 定义为 2，$2+1$ 定义为 3，$3+1$ 定义为 4，…，这样就产生了自然数 1,2,3,4,….

以后，自然数一般用 n 表示，自然数集合用 N 表示.

第二节　自然数的加法与减法

定义 1　设有两个自然数 n 和 m.则称 $n+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m个}$ 为 $n+m$，其中 n 叫被加数，m 叫加数.$n+m$ 本身也是一个自然数，叫和.

自然数加法有如下运算规律：

(1)交换律：$n+m=m+n$，即 $n+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m个}=m+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n个}$；

(2)结合律：$(n+m)+k=n+(m+k)$；

(3)消去律：$n+m=n+k \Leftrightarrow m=k$.

有了自然数，也就有了自然数的顺序，即自然数的大小概念：

$$1<2<3<4<\cdots,$$

$$n+1<n+2<n+3<n+4<\cdots,$$

$$m<k \Leftrightarrow n+m<n+k.$$

定义 2 设有两个自然数 $n>m$. 若 $n=m+k$，则规定

$$n-m=k,$$

称 $n-m$ 为自然数的减法.

定义 2 是说有 3 个自然数 n,m,k，

$$n-m=k \Leftrightarrow n=m+k.$$

定律 设 $n \geqslant m$，则任取自然数 k，等式 $m-n=k$ 总不成立.

定律是说在自然数范围内，只能有大数减去小数，小数减去大数不能进行，相等的两个数也不能相减. 并表明，在自然数范围内，减法不是总能进行的. 这意味着自然数不够用了，需要创造或发现新的数.

定义 3(零的发现) 规定任取自然数 m，$m-m=0$，$m+0=m$.

这里说明零是从自然数减法中发生的，现实的零也确实是从减法中发现的. 例如，箱中的苹果数为零，表明箱中从前有苹果，因为都拿走了，才变成了零，有变成了无.

定义 4(负自然数的发现) 设给定两个自然数 $n>m$，规定 $m-n=-(n-m)$. 其中 $n-m=k$ 为自然数，$-k=-(n-m)$ 叫负自然数.

定义 5 自然数、零、负自然数构成一个新数集，叫整数集，记作 **Z**.

定义 6(整数加法) 设 i,j 为两个整数,则规定

$$i+j=i-(-j)=-(-i)+j$$
$$=-(-i+-j).$$

整数加法仍满足交换律、结合律和消去律.

定义 7(整数减法) 设 $i,j\in\mathbf{Z}$,则规定 $i-j=i+(-j)$.

整数加减法总能进行.

第三节 自然数的乘法与除法

定义 8 给定 $n,m\in\mathbf{N}$,则规定

$$n\times m=\underbrace{n+n+\cdots+n}_{m个}.$$

自然数乘法满足交换律和结合律以及对加法的分配律.

定义 9 给定 n,m,s 为自然数.若 $n\times m=s$,则可定义除法 $s\div n=m$.

定义 10(可除性) 设给定自然数 n,s.若能找到 $m\in\mathbf{N}$,使 $s=m\times n$,则认为 $s\div n$ 能进行;若任取 $m\in\mathbf{N}$,总有 $s\neq m\times n$,则认为 $s\div n$ 不能进行.

当 $s\div n$ 不能进行时,也就是在整数范围内 $s\div n$ 找不到,这个疑难为分数的诞生奠定了基础.

定义 11(分数的产生) 给定自然数 n,s.除法 $s\div n$ 的商为 m,此时 m 不一定为自然数,一般记 $m=\frac{s}{n}$,这里 m 已经是一种新数(分数).

分数发现的社会背景是刀的发明,使一个整体能被均匀地分成若干份.

自然数之商叫正分数,进而可定义负分数.正分数、零、负分数构成有理数.知道了有理数,人类对数的认识就算完善了,因为此时,人们可以近似地表达任何数了.

有了自然数的除法后,可以定义整数的乘除法,进而可定义有

理数的乘除法. 除法的一个重要特征是零不能做除数. 乘法保持有交换律、结合律、消去律与分配律.

第四节 乘方与对数、非有理数

定义 12 设 a 为有理数, n 为自然数,

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}},$$

称 a^n 为 a 的 n 次方, (符号“$:=$”表示被定义为), 也记作 $a \sqcap n$ 或 $n \sqcup a$. $\sqcap$叫升法号, $\sqcup$叫落法号. $a \sqcap n$ 读做 a 升 n, $n \sqcup a$ 读做 n 落 a. 即有

$$a \sqcap n = n \sqcup a = a^n = n \text{ 个 } a \text{ 相乘}.$$

式中: a 叫乘方 a^n 的底数, n 叫指数.

升法与落法似乎没有区别, 但连升连落时区别就太大了. 例如

$$3 \sqcap 3 \sqcap 3 = 27^3 = 19\,683,$$

$$3 \sqcup 3 \sqcup 3 = 27 \sqcup 3 = 3^{27} = 7.625\,6 \times 10^{12}.$$

乘方运算的运算规律如下:

(1) 指数可加, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

(2) 除时指数可减, $a^n \div a^m = a^{n-m}$;

(3) 再乘方指数可乘, $(a^n)^m = a^{nm}$;

(4) 底 $a>1$ 时, 单调性, 即 $n < m \Leftrightarrow a^n < a^m$;

(5) 底 $a>1$ 时, 单调性, 即

$$1 < a < b \Leftrightarrow a^n < b^n.$$

定义 12 中指数 n 为自然数, 我们要把指数 n 逐渐转化为有理数.

乘方是 $a^n = b$, n 为自然数, a 与 b 为正有理数. 现在设已知 b 与 n, 问如何求底数 a, 这就是开方

$$a = \sqrt[n]{b}.$$

由于依照运算规律应有

$$b^{1/n} = (a^n)^{1/n} = a^{n\cdot(1/n)} = a,$$

因而就规定$\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$,这样指数就可以为自然数的倒数了,再求乘方

$$(b^{1/n})^m = b^{(1/n)m} = b^{m/n},$$

于是指数就可以为正分数了.再由于

$$1 = a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0,$$

$$a^{-m} = a^{0-m} = a^0 \div a^m = 1/a^m,$$

因而,可规定 $a^0=1, a^{-m}=1/a^m$,这样指数就可为任一有理数了.

在开方运算中,出现了一个问题,例如 $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}=1.414\cdots$已经不能用有理数表达了,就是说$\sqrt{2}$不是有理数.但显然,如果第一个不加定义的数 1 确定后,$\sqrt{2}$是确定的数,这样的数就叫无理数.

有理数、无理数统叫实数.由实数构成的集合叫实数集合,记作 **R**.有理数集合记作 **Q**.

不过严格讲起来,应有如下定义:

定义 13(数概念) 设给定一个概念 x.若任取有理数 a,总有 $x<a, x>a, x=a$ 三者之一成立,则称 x 为一个数概念.

例如$\sqrt{2}$ 是个数概念,而$\sqrt{-1}$不是数概念.

定义 14(实数) 设 x 是一个数概念,当第一个不加定义的数 1 确定后,x 也就确定了,则称 x 为实数.

如果有第二个不能加以定义的数(记作 β)存在,一个数概念 x,只有第一个不加定义的数和第二个不加定义的数 β 同时确定后,x 才确定,此时 x 就不一定是实数.

现在要讨论乘方 a^b,其中 a, b 都是正实数.不妨设 $a>1$,且有有理数 a_1, a_2 靠近 a,即 $1<a_1<a<a_2$;又有有理数 b_1, b_2 靠近 b,即 $0<b_1<b<b_2$,则按乘方性质,一定有

$$a_1{}^{b_1} < a^{b_1} < a^b < a^{b_2} < a_2{}^{b_2},$$

这样当 $a_1{}^{b_1}, a_2{}^{b_2}$ 非常靠近时,就可以理解 a^b 的意义了.一般来说 $a^b=c$;a, b, c 都为实数.

请读者注意，当 a，b 都是有理数时，往往 $a^b=c$ 不是有理数，而是无理数，因而只能说 $a^b=c$ 为实数.

乘方 $a^b=c$ 的另一个逆运算是取对数，或者叫对法，对数算法.

定义 15 取 a，b，c 为实数，规定

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,$$

称 $\log_a b$ 为以 a 为底的 b 的对数，a 叫底数，b 叫真数. $c=\log_a b$ 叫对数值，也记作 $b \sqsubset a$，$a \sqsupset b$. 读做 b 对 a，a 反对 b. 即

$$\log_a b = b \sqsubset a = a \sqsupset b.$$

一般要求 a，b 为正数.

例 1 $\log_2 8=3$.

例 2 $\log_2 4=2$.

例 3 $\log_{(-2)}(-8)=(-8)\sqsubset(-2)=3$.

例 4 $\log_2(-4)=(-4)\sqsubset 2$ 不能运算.

例 5 $\log_{-2}4=4\sqsubset(-2)=2$.

例 6 $\log_{(-2)}(-4)=(-4)\sqsubset(-2)$不能运算.

对数主要运算规律是换底公式：

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

在对数 $\log_a b$ 中，即使 a，b 都是有理数，$\log_a b$ 也往往不是有理数，因而对数运算中产生大量无理数.

第五节 三角运算

三角运算不是直接建立在“第一个不加定义的数 1”基础上，而是在人们认识了有理数和实数之后，在测量实践的基础上逐渐产生了三角运算.

在三角形 ABC 中，$\angle C=\angle ACB=90^\circ=\pi/2$，斜边为 c，B 角