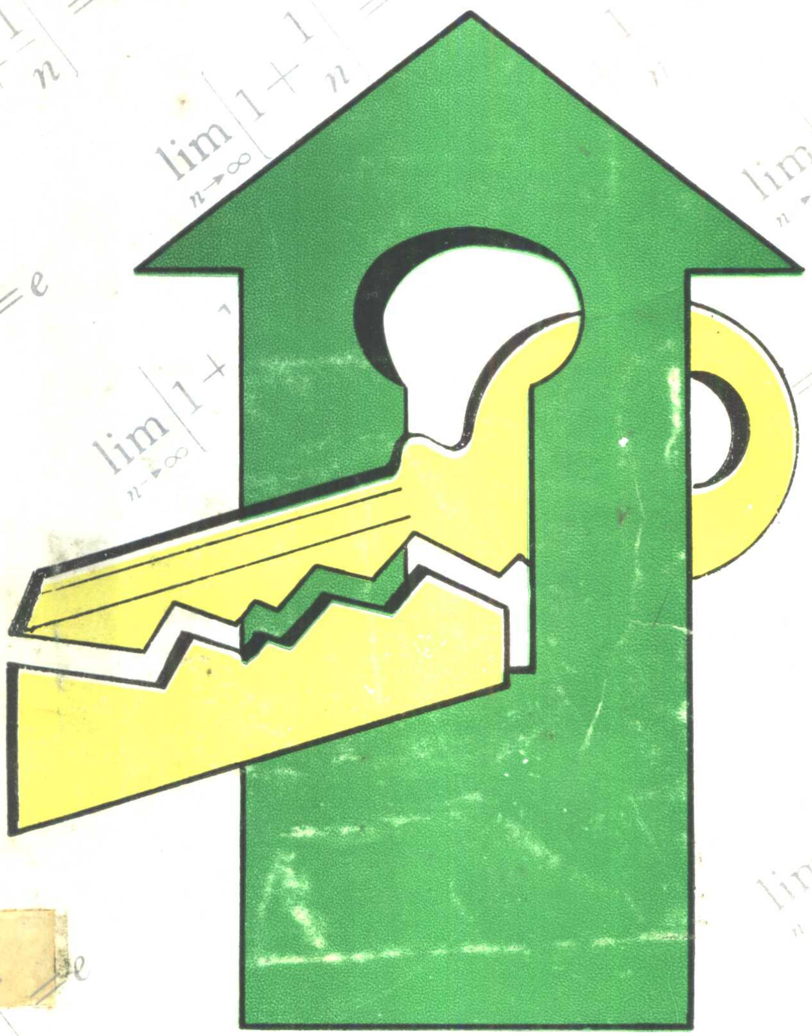
高等数学复习指南

哈尔滨工业大学研究生院招生办公室　编



哈尔滨工业大学出版社

(黑)新登字第4号

内 容 简 介

这是一本内容十分丰富，适合于工科院校学生全面复习高等数学用的指导性参考书。它也更适用于报考工科硕士研究生的读者。

本书按照国家教委考试中心所颁布的考试大纲顺序分为八章：函数、极限、连续；一元函数微分学；一元函数积分学；矢量代数和空间解析几何；多元函数微分学；多元函数积分学；级数；微分方程。

每章分为三部分：第一部分是内容提要，它简明扼要地使读者对本章的主要概念、理论和基本公式有一个系统的了解与复习；第二部分精选了较多数量的典型例题，使读者能更深刻、更融会贯通的领会和掌握本部分的基本内容，并提高分析问题和解决问题的能力；第三部分是练习题（计算题书末附有答案），是供给读者做自我检查用的。

本书也可做为有志于自学高等数学的读者学习时的参考书，还可做为大专院校教师的教学参考书。

高等数学复习指南
哈尔滨工业大学研究生院招生办公室编
*
哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
黑龙江省绥棱县印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/16 印张 31 字数 710 千字
1993年8月第1版 1993年8月第1次印刷
印数 1—10000
ISBN 7-5603-0636-5/O·47 定价 15.80 元

前　　言

《高等数学复习指南》(以下简称《指南》),是我校研究生院招生办公室为了帮助广大有志于报考工学、经济学硕士研究生的同志复习高等数学而编写的,同时兼顾上述两类在校生复习高等数学,参加各种考试或数学竞赛之用。

为了编写《指南》,我们聘请了八位教师组成编写组,他们近几年来都为报考研究生的同学进行过复习辅导,辅导效果都是十分令人满意的,与此同时,我们还聘请了我校几位教学经验十分丰富,对近年来各种考试命题颇有研究的老教授担任编写组的顾问。并在广泛收集大量资料的基础上,经过反复讨论,精心筛选,最后形成了这本内容十分丰富,选材更加贴近考试要求的复习用《指南》。

编写《指南》首先是要帮助考生掌握有关考试内容的深度和广度,因此,本书内容的取材将严格按照国家教委考试管理中心 1992 年所颁布的工学、经济学硕士研究生高等数学入学考试大纲所规定的考试内容进行取舍,考试大纲中有的就包括进来,考试大纲中没有的,就坚决不写,重点内容就多写,次要内容就少写,而内容的主次以及其深度与广度的掌握则是本书的作者们根据积累多年来的命题经验;以及对国家教委各项有关文件的深入研究;加之对历届考题进行了充分的分析与讨论,在此基础上,共同拟定的编写大纲。因此,完全可以相信这种共同的认识,必定能恰如其分的反映出今后的考试要求。

编写《指南》的另一个目的,则是要通过书中的例题分析指导考生建立起比较科学的学习方法,并通过纵观各类典型例题,加强对基本内容的理解,开阔思路,扩大眼界,逐步提高分析问题和解决问题的能力,以期最终能达到取得满意的考试成绩的总目标。

本《指南》的编写顺序(章,节,内容),完全是按照考试大纲的顺序而编排的,全书共分八章,每章又分为三个部分。

每章的第一部分是内容提要,是指明考生所应掌握和熟悉的基本概念、基本理论和基本运算方法,因为这些基本内容都是大家学习过的,因此,对概念我们只着重于它的引入,力图阐述得清楚透彻,并进而阐明各概念间的内在联系,而对定理的证明,基本公式的推导均略去,没有写进来,这不仅是为了节省篇幅,更主要的是为了节省考生的复习时间,有的考生对这些内容如有疑问时,则可查阅任何一本高等数学教材,都可得到圆满的解决。

每章的第二部分是例题分析,是本书的中心内容,它借助于足够数量的典型例题,不仅能使读者更深刻更融会贯通地领会和掌握本部分的基本内容,而且也能通过对这些典型实例的分析与解决,从中逐步学会并掌握分析问题和解决问题的一般方法,以致能达到在学习能力方面,有一个较大的提高。

每章的第三部分是练习题(计算题书末附有答案),是供给读者做自我检查用的,这一部分题的数量较多,是为了给学有余力的同学尽情发挥之用,对一般考生来说,这部分练

习题不可不做，但也不必全做，做多少为宜，要根据每个同志的具体情况而定，不便给出统一的标准。

参加本书编写的同志(以姓氏笔划为序)有：王丽忱、王维生、王希连、白富多、白红、李可成、孙宏伟、富强等八位同志，富强同志对全部书稿做了复审、修改和最后的主编工作。

本书在编写的过程中得到了有关单位和同仁的鼓励和支持，在此表示衷心的感谢。

我们衷心的希望这本《指南》能在同志们的复习中起到应有的作用，并预祝大家考试成功。

哈尔滨工业大学研究生院招生办公室

1993 年 5 月

目　录

第一章 函数、极限、连续

§1.1　函数

内容提要　(1)　例题分析　(4)　练习题　(8)

§1.2　极限

内容提要　(9)　例题分析　(15)　练习题　(36)

§1.3　无穷大与无穷小

内容提要　(39)　例题分析　(42)　练习题　(46)

§1.4　函数的连续与间断

内容提要　(47)　例题分析　(50)　练习题　(59)

第二章 一元函数微分学

§2.1　导数概念

内容提要　(61)　例题分析　(62)　练习题　(69)

§2.2　导数的求法

内容提要　(71)　例题分析　(74)　练习题　(82)

§2.3　微分

内容提要　(84)　例题分析　(86)　练习题　(89)

§2.4　中值定理与洛比达法则

内容提要　(89)　例题分析　(93)　练习题　(113)

§2.5　利用导数研究函数的性态

内容提要　(115)　例题分析　(123)　练习题　(141)

第三章 一元函数积分学

§3.1　不定积分与基本积分法

内容提要　(145)　例题分析　(149)　练习题　(156)

§3.2　有理式的积分

内容提要　(160)　例题分析　(163)　练习题　(170)

§3.3　定积分的概念与计算方法

内容提要　(172)　例题分析　(178)　练习题　(194)

§3.4　定积分的应用

内容提要　(199)　例题分析　(203)　练习题　(215)

第四章. 矢量代数和空间解析几何

§4.1 矢量代数

内容提要 (219) 例题分析 (230) 练习题 (234)

§4.2 空间解析几何

内容提要 (236) 例题分析 (245) 练习题 (262)

第五章. 多元函数和微分学

§5.1 多元函数与偏导数概念

内容提要 (266) 例题分析 (270) 练习题 (272)

§5.2 全微分与复合函数微分法

内容提要 (275) 例题分析 (279) 练习题 (287)

§5.3 二元函数的泰勒公式与极值

内容提要 (289) 例题分析 (292) 练习题 (300)

§5.4 多元函数微分学的几何应用

内容提要 (301) 例题分析 (304) 练习题 (306)

第六章. 多元函数积分学

§6.1 重积分

内容提要 (309) 例题分析 (315) 练习题 (321)

§6.2 曲线积分

内容提要 (323) 例题分析 (330) 练习题 (341)

§6.3 曲面积分

内容提要 (344) 例题分析 (349) 练习题 (360)

§6.4 多元函数积分学的应用与场论初步

内容提要 (364) 例题分析 (369) 练习题 (374)

第七章. 级数

§7.1 数项级数

内容提要 (376) 例题分析 (379) 练习题 (385)

§7.2 函数项级数

内容提要 (388) 例题分析 (393) 练习题 (400)

§7.3 付立叶级数

内容提要 (402)　例题分析 (405)　练习题 (412)

第八章. 微分方程

§8.1 几种可解的一阶方程

内容提要 (415)　例题分析 (418)　练习题 (427)

§8.2 可降阶的高阶微分方程的解法

内容提要 (429)　例题分析 (433)　练习题 (436)

§8.3 线性微分方程的解法

内容提要 (437)　例题分析 (443)　练习题 (452)

练习题答案

§1.1 练习题 (455)　§1.2 练习题 (455)　§1.3 练习题 (457)

§1.4 练习题 (457)　§2.1 练习题 (457)　§2.2 练习题 (458)

§2.3 练习题 (459)　§2.4 练习题 (459)　§2.5 练习题 (460)

§3.1 练习题 (463)　§3.2 练习题 (466)　§3.3 练习题 (468)

§3.4 练习题 (469)　§4.1 练习题 (470)　§4.2 练习题 (471)

§5.1 练习题 (473)　§5.2 练习题 (475)　§5.3 练习题 (476)

§5.4 练习题 (477)　§6.1 练习题 (477)　§6.2 练习题 (478)

§6.3 练习题 (479)　§6.4 练习题 (479)　§7.1 练习题 (480)

§7.2 练习题 (480)　§7.3 练习题 (482)　§8.1 练习题 (484)

§8.2 练习题 (485)　§8.3 练习题 (486)

第一章　函数　极限　连续

§1.1　函　数

一　内 容 提 要

1. *函数及其特性*

定义　若在变量 x 和 y 之间存在着一种对应规律，使得变量 x 在其可取值的数值 X 中每取一个值时，变量 y 就有一个确定的值与之对应，这时我们就说 y 是 x 的函数。记为 $y=f(x)$。且将 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，自变量 x 可以取值的数集 X 叫做这个函数的**定义域**。

设 a 为 $f(x)$ 定义域中的某一点，今后用记号 $f(a)$ 或 $y|_{x=a}$ 表示函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 时所对应的值。此时也说 $f(x)$ 在 $x=a$ 点是有**定义的**。

定义　若函数 $y=f(x)$ 定义在对称于原点的某区间上，则当 $f(x)$ 满足条件：

$f(-x)=-f(x)$ 时，称 $f(x)$ 为**奇函数**；

$f(-x)=f(x)$ 时，称 $f(x)$ 为**偶函数**。

定义　若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内随 x 增加而减少，即设 x_1，x_2 为 (a,b) 内任意两点，当 $x_1<x_2$ 有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 为在区间 (a,b) **内单调减少的函数**，简记为 $y=f(x)\downarrow(a,b)$，若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内随自变量 x 增加而增加，即设 x_1，x_2 为 (a,b) 内任意两点，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 为在区间 (a,b) **内单调增加的函数**，简记为 $y=f(x)\uparrow(a,b)$，同样可以定义在闭区间上或无限区间上的单调增加和单调减少函数。单调增加和单调减少函数，统称为**单调函数**。

定义　若函数 $y=f(x)$ 对数集 A 中的一切元素 x，（A 可以是使 $y=f(x)$ 有定义的任何一种区间），都存在一个正数 M，使得有：$|f(x)|\leq M$，则称 $y=f(x)$ 在数集 A 上是**有界的**。如果这样的 M 不存在，就说 $f(x)$ 在数集 A 上是**无界的**。

定义　若存在一个正数 X，能使对一切的 x 均有

$$f(x+X)=f(x) \tag{*}$$

成立，则说 $f(x)$ 是**周期函数**。满足(*)式 X 中的最小者叫做 $f(x)$ 的**周期**。

定义　设已给 y 是 x 的函数

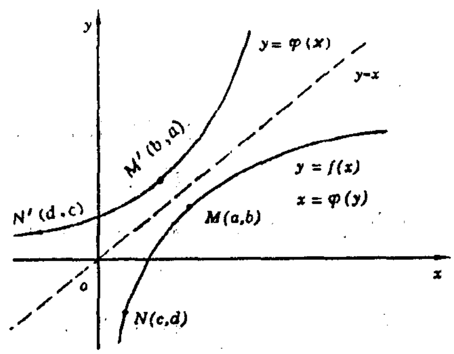
$$y=f(x) \tag{1}$$

若将 y 当作自变量，x 当作因变量，则由函数(1)所确定的 $x = \varphi(y)$ 就叫做函数 $y = f(x)$ 的**反函数**。

由于照顾到人们已经习惯用 x 代表自变量，y 代表因变量，所以也常将 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 改记为 $y = \varphi(x)$。例如：

$y = 3x + 5$ 的反函数本是 $x = \frac{1}{3}(y - 5)$，现改记为 $y = \frac{1}{3}(x - 5)$；

$y = e^x$ 的反函数本是 $x = \ln y$，现改记为 $y = \ln x$。



图(1-1)

显然，在同一坐标系中，函数 $y= f(x)$ 与反函数 $x = \varphi(y)$ 有相同的图象，见图(1-1)进一步看，如果我们将 $x = \varphi(y)$ 改写成 $y = \varphi(x)$，可见后者只不过是从前者中交换了 y 和 x 的位置而得来的，由此可知，若 $y = f(x)$ $(x = \varphi(y))$ 的图象上有一点 M (a, b)，那么，$y = \varphi(x)$ 的图象上必有一点 M' (b, a)，而 M 和 M' 是关于直线 $y = x$ 的对称点，从而推知 $y = f(x)$ 的图象与其反函数 $y = \varphi(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 是对称的。

我们用记号

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

表示两个变量 x 与 y 之间的一个方程。如果当 x 在某个数集 X 中每取一个 x_0 时，存在方程 $F(x_0, y) = 0$（y 为未知数）的唯一一个实根 y_0，那么 y 就成为定义在 X 上的一个函数。我们称这个函数是由方程(2)所确定的**隐函数**。相应地，我们称形如 $y = f(x)$ 的函数为**显函数**。如果由(2)所确定的隐函数能由解析式 $y = g(x)$ 给出，那么隐函数就变成显函数，并且不管 x 是 X 中的什么值总有恒等式

$$F(x, g(x)) \equiv 0$$

成立。

例如，方程

$$xy - 2x + 3y - 1 = 0 \tag{3}$$

确定 y 是 x 的函数。事实上，如果 $x \neq -3$，我们能解得

$$y = \frac{2x + 1}{x + 3}.$$

当然也可以认为方程(3)确定一个 x 是 y 的函数。因为如果 $y \neq 2$，解出 x 有

$$x = \frac{1 - 3y}{y - 2}$$

又如，圆的方程

$$x^2 + y^2 = 1$$

确定了两个函数

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

等等。

由上所述，可见隐函数并不是一种新的函数概念。函数的“显”与“隐”之分，只不过是函数表达形式上的区分罢了。但也必须指出：不是任何包含两个变量的方程都确定一个隐函数。例如 $x^2 + y^2 + 1 = 0$，不管 x 取什么样的实数值，总没有 y 的实根满足这个方程。再者，也不是任何隐函数都能解成显函数的形式，例如方程

$$y^5 - xy + 1 = 0$$

对任何实数 x，至少有 y 的一个实根与之对应，但写不出 y 对 x 的显函数表达式。

2. 初等函数

大家在中学里就已熟悉的

Ⅰ. **常数函数** $y = c$；

Ⅱ. **幂函数** $y = x^u$，u 为非零实数；

Ⅲ. **三角函数** $y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \operatorname{tg} x$，$y = \operatorname{ctg} x$；

Ⅳ. **反三角函数** $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \operatorname{arctg} x$，$y = \operatorname{arcctg} x$；

Ⅴ. **指数函数** $y = a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$；

Ⅵ. **对数函数** $y = \log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$；

统称为**基本初等函数**。有关它们的定义域、图形及简单性质都是每个考生应该掌握的。

定义 若 y 是 u 的函数 $y = f(u)$，u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$，且后者的值域包含在前者的定义域内时，则构成一个 y 是 x 的函数，且表之为 $y = f(\varphi(x))$，这函数就叫做 x 的**复合函数**。

例如由 $y = \sin u$，$u = x^{1/2}$ 可得复合函数 $y = \sin\sqrt{x}$，反过来我们可将 $y = \sin\sqrt{x}$ 看作是由 $y = \sin u$，$u = x^{1/2}$ 复合而成的复合函数。

同样，我们可以视

$y = (\operatorname{arctg} x)^{2/3}$ 是由 $y = u^{2/3}$，$u = \operatorname{arctg} x$ 复合而成；

$y = \ln(\cos x)$ 是由 $y = \ln u$，$u = \cos x$ 复合而成；

$y = (\operatorname{arctg} e^x)^2$ 是由 $y = u^2$，$u = \operatorname{arctg} v$，$v = e^x$ 复合而成；

象这样将一个复合函数分解成为一串基本初等函数的方法，对我们是非常有用的，它提供了将一个较复杂的函数化为一串简单函数的途径。

由基本初等函数经过有限次加、减、乘、除四则运算以及有限次的复合而构成的函

数，叫做初等函数。

二 例 题 分 析

例 1 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$，求函数 $f(\frac{x-1}{x+1})$ 的定义域。

解 由 $0 \leqslant \frac{x-1}{x+1} \leqslant 1$，相当于解不等式组

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x+1 > 0 \\ \frac{x-1}{x+1} \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x-1 \leqslant 0 \\ x+1 < 0 \\ \frac{x-1}{x+1} \leqslant 1 \end{cases}$$

前者解为 $x \geqslant 1$，后者解为空集。故所求之定义域为 $[1, \infty)$。

例 2 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$，试求 $f(x+a) + f(x-a)$ $(a > 0)$ 的定义域。

解 欲求 $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域，只需解不等式组

$$\begin{cases} 0 \leqslant x + a \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x - a \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -a \leqslant x \leqslant 1 - a \\ a \leqslant x \leqslant 1 + a \end{cases}$$

可见 x 应该取在 $a \leqslant x \leqslant 1-a$，而且 a 应满足 $a \leqslant 1-a$。于是得

当 $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$ 时，所求之定义域为 $[a, 1-a]$；

当 $a > \frac{1}{2}$ 时，所求之定义域为空集。

例 3 已知 $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$，求 $f(x)$。

解 这种题的一般作法是：先将括号中的式子用单一字母表示，即令 $x+1=u$，从中解出 x 通过 u 的表达式 $x = u - 1$，再把它代入已知的函数关系中，使其化为u为自变量的函数，即

$$f(u) = (u-1)^2 - 3(u-1) + 2 = u^2 - 5u + 6$$

又因为函数关系与自变量所取记号无关，将 u 换成 x 即得所求函数

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

例 4 若已知 $2f(x) + f(1-x) = x^2$，试求 $f(x)$ 的表达式。

解 由所给的函数等式，启示我们不妨设

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

于是从 $2f(x) + f(1-x) = x^2$，有

$$2ax^2 + 2bx + 2c + a(1-x)^2 + b(1-x) + c = x^2$$

比较各项系数得

$$\begin{cases}3a=1\\2b-2a-b=0\\3c+b+a=0\end{cases}\qquad 解得\quad a=\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3},\ c=\frac{1}{3}$$

故所求函数为

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

例 5 讨论 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性。

解 由 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$

有 $f(-x)=\log_a\left[(-x+\sqrt{x^2+1})\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]$

$$=\log_a\frac{-x^2+(\sqrt{x^2+1})^2}{x+\sqrt{x^2+1}}=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

所以知 $f(x)$ 是奇函数。

例 6 证明定义在 $(-L,L)$ 内的任意一个函数 $f(x)$，都可以唯一地表示成一个奇函数和一个偶函数之和。

证 设 $H(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，显然它是偶函数，

$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，显然它是奇函数，

而

$$f(x)=H(x)+G(x)$$

这即得证任意函数 $f(x)$ 皆可以表为一个奇函数和一个偶函数之和。

其次，再证唯一性。假如还有偶函数 $H_1(x)$ 和奇函数 $G_1(x)$，满足

$$f(x)=H_1(x)+G_1(x)$$

从而有

$$H(x)+G(x)=H_1(x)+G_1(x)$$

即

$$H(x)-H_1(x)=G_1(x)-G(x) \tag{1}$$

且有

$$H(-x)-H_1(-x)=G_1(-x)-G(-x)$$

即

$$H(x)-H_1(x)=G(x)-G_1(x) \tag{2}$$

(1) + (2) 便有 $2H(x) - 2H_1(x) = 0$，即 $H(x) \equiv H_1(x)$， 再由(1)又有 $G(x) \equiv G_1(x)$，亦即唯一性得证。

例 7 求函数 $y = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$ 的反函数及其定义域。

解 化所给函数为

$$(1 + 2^x)y = 2^x, \quad 即 \quad 2^x(1 - y) = y$$

于是可解得

$$x = \log_2 \frac{y}{1 - y}$$

即得所求之反函数为

$$y = \log_2 \frac{x}{1 - x}$$

它的定义域为 $(0, 1)$。

例 8 求 $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}$ 的反函数，并求其定义域。

解 将所给函数两端取立方有

$$\begin{aligned}
y^3 &= x + \sqrt{1 + x^2} + 3(x + \sqrt{1 + x^2})^{\frac{2}{3}}(x - \sqrt{1 + x^2})^{\frac{1}{3}} \\
&\quad + 3(x + \sqrt{1 + x^2})^{\frac{1}{3}}(x - \sqrt{1 + x^2})^{\frac{2}{3}} + x - \sqrt{1 + x^2} \\
&= 2x + 3(x + \sqrt{1 + x^2})^{\frac{1}{3}}(x - \sqrt{1 + x^2})^{\frac{1}{3}} \\
&\quad [(x + \sqrt{1 + x^2})^{\frac{1}{3}} + (x - \sqrt{1 + x^2})^{\frac{1}{3}}] \\
&= 2x + 3(-1)^{\frac{1}{3}}y = 2x - 3y
\end{aligned}$$

所以有 $\quad x = \dfrac{1}{2}(y^3 + 3y)$

即得所求之反函数为

$$y = \frac{1}{2}(x^3 + 3x) \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

例 9 设 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$， $g(x) = \dfrac{1}{1 + x}$，求下列函数的定义域。

(1) $f[g(x)]$ (2) $g[f(x)]$

解 (1) 首先我们看到函数 $f[g(x)]$ 是以 $u = g(x)$ 为中间变量的复合函数。根据复合函数的意义，属于定义域的点 x_0 应满足以下两个条件，即首先 x_0应属于 $g(x)$ 的定义域；其次 $g(x_0)$ 应属于 $f(u)$ 的定义域，根据以上分析 $f[g(x)]$ 的定义域应如下确定：

由于 $g(x)=\frac{1}{1+x}$ 所以 $x\neq -1$

又因 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ 又要求 $g(x)=\frac{1}{1+x}\neq \pm 1$,

即 $x\neq 0$, $x\neq -2$。因此函数

$$f[g(x)]=\frac{\left(\frac{1}{1+x}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{1+x}\right)^2-1}=-\frac{x^2+2x+2}{x^2+2}$$

的定义域为除 $x=-1, 0, -2$ 的一切实数。

(2) 由于 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ 所以 $x\neq \pm 1$,

又因 $g(x)=\frac{1}{1+x}$ 所以又要求 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}\neq -1$,

解得 x 为非零的任意实数。因此函数

$$g[f(x)]=\frac{1}{1+\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\frac{x^2-1}{2x^2}$$

的定义域为除 $x=-1, 0, 1$ 的一切实数。

例10 设
$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\qquad g(x)=e^X$$

求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解 因为 $f[g(x)]$ 表示将 $f(x)$ 中的 x 换成 $g(x)$,所以

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\ 0, & |e^x|=1,\\ -1, & |e^x|>1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & e^x<1,\\ 0, & e^x=1,\\ -1, & e^x>1,\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0,\end{cases}$$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, & |x|<1,\\ e^0, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1,\end{cases}$$

例11 设

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 4,\\ x-2, & 4<x\leqslant 6,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<2,\\ 2+x, & 2\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$$

求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解 先由 $f[g(x)]$ 中的 $g(x)$ 入手

当 $0 < x < 2$ 时，$0 \leqslant x^2 < 4$，$f[g(x)] = f(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

当 $2 < x \leqslant 4$ 时，$4 < 2 + x \leqslant 6$，$f[g(x)] = f(2 + x) = (2 + x) - 2 = x$

总之有

当 $0 \leqslant x \leqslant 4$ 时，$f[g(x)] = x$

再由 $g[f(x)]$ 中的 $f(x)$ 入手

又当 $0 < x < 4$ 时，$0 \leqslant \sqrt{x} < 2$，$g[f(x)] = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$

当 $4 < x \leqslant 6$ 时，$2 < x - 2 \leqslant 4$，$g[f(x)] = g(x - 2) = 2 + (x - 2) = x$

当 $x = 4$ 时，$\sqrt{2} = 2$，$g[f(x)] = 2$

总之有

当 $0 \leqslant x \leqslant 6$ 时，$g[f(x)] = x$.

三 §1.1 练 习 题

1. 求 $y = \lg(\cos\lg x)$ 的定义域.
2. 若函数 $f(x)$ 的定义域为〔-1，1〕，求函数 $f(2\sin x)$ 的定义域。
3. 设 $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x + 1}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a+b)$ $(a+b \neq -1)$。
4. 若 $f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geqslant 1, \\ |\sin x|, & |x| < 1, \end{cases}$

求 $f(1)$，$f(\dfrac{\pi}{4})$，$f(-2)$，$f(\pm\dfrac{\pi}{4})$.

5. 设 $f(-2) = 0$，$f(0) = 1$，$f(1) = 5$，求满足上述条件的二次函数及其在 $x = -1$ 和 $x = 0.5$ 处的函数值。
6. 设 $f(x + \dfrac{1}{x}) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$，求 $f(x)$.
7. 设函数$f(x)$满足 $af(x) + bf(\dfrac{1}{x}) = \dfrac{1}{x}$，其中$|a| \neq |b|$，试求 $f(x)$ 的表达式.
8. 讨论 $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$ 的奇偶性。
9. 假设下面所考虑的函数都是在［$-L$，L］上有定义的，试证明：

(1) 两个偶函数之和仍是偶函数，两个奇函数之和仍是奇函数。

(2) 两个偶函数的乘积仍是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，而偶函数与奇函数之积为奇函数.

10. 讨论 $y=\dfrac{\sin x}{1-\dfrac{x}{|x|}}$ 是否为周期函数，若是时指出其周期.

11. 求函数 $y=\dfrac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$ 的反函数及其定义域.

12. 设 $f(x)$，$g(x)$ 互为反函数，求 $f(\frac{x}{2})$ 的反函数。

13. 设 $f(x)=x^3-x$，$g(x)=\sin x$，求 $f[g(x)]$，$f[g(\frac{\pi}{12})]$，$g[f(1)]$，$f[f(f(1))]$。

14. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$ 及 $f[f(f(x))]$。

15. 设 $f(x)=\sqrt[n]{a-x^n}$，$(x>0)$，求 (1) $f(f(x))$； (2) $f(x)$ 的反函数。

16. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，$g(x)=3x-1$，求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$。

17. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<\infty,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$

求 $g[f(x)]$ 与 $f[g(x)]$

§1.2 极 限

一 内 容 提 要

1. 数列的极限

设 $u_n=\varphi(n)$ 是定义在自然数 1，2，3，…，n，… 上的一个函数，当 n 依序取自然数集的每一个值时，就得一串相应的函数值：

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

这串数叫做一个**数列**，并记为 $\{u_n\}$. 其中，$u_n=\varphi(n)$ 称为是数列的**公项**或**一般项**. 显然，当一个数列的公项已知时，数列就完全被确定了。

对于一个数列 $\{u_n\}$ 我们观察它随着 n 的无限增大，看其是否有一个确定的趋势，观察结果表明它的趋势不外是以下三种：

(1) 随着 n 的增大，u_n 总趋向于一个确定的常数 A；

(2) 随着 n 的增大，u_n 的值不管怎样变化，然而就其各项的绝对值来看，却是无限增大的；

(3) 随着 n 的增大，u_n 的值既不趋向于一个确定的常数，也不是就绝对值而言无限增大的。

对于第(1)种情形，我们称数列 $\{u_n\}$ 是有极限的，其确切定义如下：

定义 若对于任意给定的正数 ε，总存在相应的正整数 N，使当 $n>N$ 时，恒有：

$$|u_n - A| < \varepsilon$$

成立，则称数列 $\{u_n\}$ **以A为极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \quad 或 \quad u_n \to A \quad (当\ n \to \infty\ 时)。$$

从几何上看，$\{u_n\}$ 以 A 为极限的意义就是：以任意一个给定的正数 ε 为半径，以 A 为中心，在数轴上作一个开区间 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$，那么表示数列各项 u_n 的点，落在这区间外的最多只有前 N 个，而从第 $N+1$ 项开始以后的所有点必均落在区间 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 内。

若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$，我们也说 $\{u_n\}$ 是收敛于 A 的。

对于第(2)、(3)两种情形，它们的共同点是，随着 n 的无限增大，u_n 不趋向于一个确定的常数，这时我们就说 $\{u_n\}$ 的极限是不存在的，或者说 $\{u_n\}$ 是发散数列，特别是对第(2)种情形，我们说 $\{u_n\}$ 是趋向于无穷大的数列，或说 $\{u_n\}$ 是一个无穷大量。其精确定义亦可叙述如下：

定义 若对任意给定的正数 G，总存在相应的正整数 N，使当 $n>N$ 时，恒有

$$|u_n| > G$$

成立，则称数列 $\{u_n\}$ **是趋向于无穷的**，记为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty \quad 或 \quad u_n \to \infty \quad (当\ n \to \infty\ 时)。$$

对于数列极限我们有以下定理：

定理一 设

1、数列 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$，$\{w_n\}$ 之间的各项，均有 $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$；

2、$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = A$，

则 $$\lim_{n\to\infty} v_n = A。$$

定理二 设

1、数列 $\{u_n\}$ 的各项均满足 $u_n \geqslant 0$；

2、$\{u_n\}$ 是有极限的数列，即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$，则 $A \geqslant 0$。

为了引进其它定理，我们给出以下概念：

定义 若存在一个正数 M，使数列 $\{u_n\}$ 的所有项均满足 $|u_n| \leqslant M$，亦即