群论

QUN LUN

上　册

A. Г. 庫洛什 著
曾肯成　郝鈵新譯

人民教育出版社

群 論

QUN LUN

上 册

(修訂第二版)

A. Г. 庫洛什著
曾肯成 郝鈵新譯

人民教育出版社

本书是根据苏联技术理論书籍出版社(Государственное издательство Технико-Теоретической Литературы)1953年出版的庫洛什(А. Г. Курош)著"群論"(Теория Групп)修訂第二版譯出的。书中叙述了群論这一門科学的基础，系統地整理了本世紀五十年代以前在一般群論方面所积累的材料，使广大数学工作者可以通过本书了解近代群論的主要方向，群論中的方法和一些新成就，以及尙未解决的問題。

本书并不要求讀者具有群論方面的預备知識，可供具有高等代数基础知識的大学生、研究生和数学工作者閱讀参考。

本书中譯本暫分上下两册出版。

群　論

上　册

А. Г. 庫洛什著

曾肯成　郝鈵新譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号K13010・1117　开本 850×1168 1/32　印张 $7\frac{7}{16}$

字数 175,000　印数 0,001--5,400　定价(5)¥0.75

1964年3月第1版　1964年3月北京第1次印刷

第二版序

作者准备本书第一版的工作是在 1940 年完成的，次年即已看过两次校样，只是由于战时的条件才将本书的出版工作推迟到 1944年。这样，从本书完成后已經过去了約十二年。在这些年里，一般群論已經起了很大的变化——許多問題被解决了，一系列的新問題被提出来了，一些完全新的方向出現了，其中的某些在群論中占有非常重要的地位。在群論的这样蓬勃发展中，苏联的代数工作者起了显著的作用。苏联群論学派——由施米特(O. Ю. Шмидт)所創立的——系統地补充了并且继續补充着青年研究人員，从而他們的創造性工作的范圍几乎包括了群論的所有分支，并且在許多方向上苏联学者的工作居于領先地位。本书的第一版也为我国群論研究的发展提供了力所能及的帮助——应該提一下，本书在 1940 年的打字原稿保存在莫斯科大学数学力学系，給研究人員带来了方便。

两年前着手准备第二版时，作者企图使本书重新适应已經达到的科学水平。为此，实际上就不得不写一本新的书。它和旧书的区别不仅在于題材的安排上——增加了許多新的章节，而且旧书里的許多內容也都已完全改写。一般来說，在新书里几乎沒有一节是毫无改变地从旧书中搬过来的。另一方面，遺憾的是，由于无法避免全书篇幅的增大，作者不得不把旧书的許多地方完全删去，有时甚至要删去整个的一节，而其中某些內容現在把它們收入本书中并不算錯。因此，我认为，在某些情况下，介紹讀者去查閱补充文献，并且指出第一版的相应章节是适宜的。

然而应該着重指出，新书是以旧书为基础的，并且在构思上与

旧书非常相近。这就使作者认为应該保持旧的书名而附加上《修訂第二版》这样一个小标題。

我們不打算对本书作一个完整的概述，而只是指出它的主要章节与第一版的相应章节的主要差別。第一篇所包括的是一些自然地应該归在群論基础的范圍之內的材料。这一篇材料是为本书以后的各篇作准备的。特别指出一个細节。在本书中，商群概念以及关于同态定理是在正規子群概念被引入以前很早就出現了。这样一个改变并不是由于群論本身的需要，而是为了通过这样的安排来指明那样一些經常出現的群論概念的推广是沒有道理的，这些推广的理論发展下去只比同态定理走得稍远一点。我們知道，这个定理实际上可以对于带有任意多个运算的集合来陈述和证明。

阿貝尔群的理論被认眞地改写了。特别是准素阿貝尔群的理論在很大程度上被重新写过了，这种群的理論由于庫里可夫(Л. Я. Куликов)的工作已經大大地改进和丰富起来。至于无扭阿貝尔群，在这里删去了对于研究这种群帮助不大的用 p 进(p-adic)矩陣系給出群的方法，但是叙述了完全分解群的理論。

在自由群和自由积的理論中也作了一系列重大的补充。特别，关于諾依曼(B. H. Neumaun)和他的合作者近来所获得的某些結果在本书中也有所反映。

在群的直积理論中，近年来有很大的进展；基本上由于作者的工作以及后来貝尔(R. Baer)的工作，这一理論看起来已接近完成。因此，在本书中自然应該从最近所得到的許多比較广泛的定理之一来推出施米特(Шмидт)定理(也常称为勒馬克-施米特(Remak-Шмидт)定理或克魯尔-施米特(Krull-Шмидт)定理)。这就需要安排大量的补充題材并且不得不把直积那一章与格論那一章合并在一起。

在第一版里，群的扩張只叙述了一节。在第二版里，由于在群里上同調論的出現，把它扩充为一章。自然，目前关于群扩張的描述还远远沒有达到如此完备的程度，使得任何一个关于扩張的問題都可以在这样的描述上用簡单的推演来解决；然而整个的情况是十二年以前所无法比拟的。

在可解与幂零无限群的理論中发生了特別重大的变化。本书第一版中在这个方向上只反映到初次探索的地步；在該书中相应段落处內容的叙述与其說是对当时所取得的成就的高度評价，还不如說是預見它的进一步的发展。現在这个理論实际上已經成为群論中最重要的而且內容最丰富的分支之一；这一理論的綱要可以用下面的話来說明，这就是：在就某种意义来說很近似于元素个数为有限的这种假定之下，来研究和阿貝尔群非常接近的一类群。

群論的这一新的分支几乎整个地是由苏联学者的工作建立起来的。在这里，車尔尼可夫(С. Н. Черников)起了特殊的作用；他的开創性的貢献在很大程度上确定了这一領域中的研究方向。关于这种群的理論中的深邃定理的一系列結果是由馬力茨夫(А. И. Мальцев)得到的。

現在談一談本书范圍以外所剩下的群論部分。这大部分是与有限群論有关的。在准备第一版时，作者面临的任务是要指出群論不应該只是有限群論，因而在书中几乎不包含任何关于有限群的特别叙述。現在这个任务可以认为已經完成。相反地，提出了新的問題——要注意到有限群論是一般群論的一个重要組成部分。尽管已在书中补充了关于有限群論的一些題材，然而最后問題在本书中还完全沒有解决。

如果由苏联的有限群方面的专家在本书的基础上（即不再重述群論基础）写一本关于有限群的不太大的书，那将是有益的。

或許有必要写这样一本书，书名可以暫定为变換群的代数理論。它应該包括被广泛研究了的置換群論，矩陣群論以及抽象群的表示的一般理論。群通过矩陣的同构表示，单項群及它們的表示，任意域上的典型群和許多其他的題材也都应該在其中占一个地位。所有这些在某种意义上来說是群論的应用部分，利用一般群論的方法对它們作出系統的叙述是非常有用的。

本书对讀者的要求已經在第一版序的末尾指出了。还应該补充指出，本书假定讀者已經知道环的概念以及和环有关的一些最簡单的概念。

文献目录都重新审定了，并且补充了近年来所发表的与本书內容有关的論文。

在开始第二版的工作之前和在工作中，从书信里或私人談話里或在討論班上，曾得到許多苏联代数工作者对本书的意見和建議。謹向以他們的意見帮助过我的所有同志致以誠摯的謝意。

莫斯科，1952 年 5 月

庫洛什(A. Курош)

第一版序摘要

群論有着悠久和丰富的历史。它是随同加罗瓦 (Galois) 理論一起，为了这一理論的需要而产生的，并且首先是作为有限置換群的理論而发展起来的(Cauchy, Jordan, Sylow)。然而，不久就发現，对于这一理論中使我們感兴趣的大多数問題来說，用以构成群的特殊材料——置換——并不重要，而实际所应注意的只是对于在任意有限集合里所定义的代数运算的性質的研究。这样一个現在看起来是不言而喻的发現，实际上是一个很大的成就，并且使得有限群的一般理論得以形成。不錯，由置換群过渡到一般有限群論实質上并沒有丰富了研究对象，但是这样的过渡就把群論建立在公理基础上，使它变得严謹而清晰，从而有利于这一理論的进一步发展。

上世紀末和本世紀的最初十年里是有限群論的全盛时代。在这期間，有限群的主要結果被得到了、主要研究方向被指明了，主要研究方法被建立了；一般說来，有限群論通过这方面主要学者(Frobenius, Hölder, Burnside, Schur, Miller) 的工作，在当时已經具备了它在今天所带有的一切主要特征。然而以后逐漸显示出来，群的有限性是一个过于强的而且是一个极不自然的限制。更重要的是，这样一个限制不久就使得群論与它的一些邻近数学部門之間发生矛盾：在几何学的各个分支，自守函数以及組合拓扑学的理論中，常常遇到这样的一些代数对象，它們与群非常类似，只不过是无限的。于是就对群論提出了有限群論所无法滿足的要求。同时，群論作为代数学的一部分，从代数学本身的观点来看，例如像整数加法群这样簡单而又重要的群竟被排除在群論范圍之

外，也不能认为是正常情况。因此，有限群应該被看作群的一般概念的一个特殊情形，而有限群論应該是一般《无限》(即不一定有限)群論中的一章。

在世界文献中，不假定有限性而叙述群論基础的第一本书是施米特(О. Ю. Шмидт)的《抽象群論》(基輔，1916)，这本书直到現在仍然是苏联一切代数工作者的重要参考书。然而，一般群論的广泛发展則开始得較晚，这是在本世紀20年代随着代数里所进行的彻底的重新整理以及向集合論基础上的过渡(E. Noether)而一起开始的。特别，从此在群論中引入了像运算子系和鏈中断条件这样一些新的概念。

自此之后，一般群論方面的工作有蓬勃的并且是多方面的开展，現在这一数学分支已經成为一門范圍广泛的內容丰富的科学，在近世代数学中占一个首要地位。一般群論的发展自然不能忽視在有限群論中已經取得的成果。相反地，一般群論的发展在很多地方正是被有限群論中相应理論所推动的。这里所遵循的原則是，期望用一些自然的限制来代替群的有限性，使得已知的定理和理論仍旧保持正确，而去掉这些限制后即不再成立。然而也常常出現这样的情形，一些在有限群論里是非常簡单并且被完全解决了的問題在一般群論里变成一个广泛发展并且还远沒有完成的理論，例如，近代群論的重要分支之一的阿貝尔群論就是如此。同时也产生了一些和无限群的研究本质地关連着的分支——自由群和自由积的理論。最后，在某些情形——首先是关于用定义关系給出群的問題中——，群論第一次达到了在它以前的发展阶段所沒有达到的精确和严格的程度。

群論离着完成还差得很远。它的具体問題的多种多样性以及这样一些仅在最近才开始发展的方向的存在，使我們可以认为，一般群論还沒有达到它的发展頂峰。虽然如此，把已經积累的材料

加以系統整理，以便使广大的数学工作者了解近代群論的主要方向，它的方法，它的最卓越的成就，最后还有它的当前的問題和最近发展中的必要途徑是适时的。

自然，本书并不妄图包括群的全部理論，但是在这里几乎提供了这一門科学的一切基础部分，这些內容已經足够使讀者看到这一理論內容的丰富性和方法的多样性。

本书并不要求讀者具备关于群論基本概念方面的預备知識。只是为了作为群的某些最初的例子——矩陣，置換，单位根——才要求高等代数的基础知識。要求讀者关于数論方面的知識也只限于同余式的初步理論。此外，关于集合論的基础知識方面，要求讀者具备豪斯道夫(Hausdorff)«集合論»前四章的內容。特別，許多重要的构造和证明要用到超限归納法。

在文献索引中尽可能完全地包括了一般群論方面的論文目录，其中也有一些是最近发表的而对本书內容沒有什么影响的論文。关于有限群方面的丰富文献，在索引中只包括与本书內容有重要关系的为数不多的几篇。在文献索引中給出了原文中作者的姓名，并且把引用的論文編上号碼(写在方括号內)。

莫斯科，1940年10月。

上册目录

第一篇　群論基础

第一章　群的定义

§1. 代数运算

在高等代数課程中，讀者就已遇到过带有代数运算的集合。高等代数中的主要集合是域和环，即带有两个独立运算(加和乘)的集合。可是在各种各样的应用中都时常可以遇到那样一种集合，在它們里面只定义了一种代数运算（或者在該場合只考慮一种运算)。現在我們来說一下这个概念的定义。

設已知一集合M。如果对于集合M中按一定次序取出的任意两个(相同或不相同的)元素，根据某一規律可使屬于同一集合中的完全确定的第三个元素和它們相对应，那我們就說，在集合M里面定义了一个代数运算。

因此，在代数运算的定义中，已經包括了运算的单值性的要求和对任意一对元素均可進行运算的要求。另一方面，这个定义里还提到了进行运算时从集合M中取出元素的次序。換句話說，这个定义并沒有排除下述的可能性，即与集合M中的元素偶a, b及元素偶b, a相对应的元素可能互不相同，也就是說，所討論的运算是非交換的。

可以举出許許多多由普通的数所組成的、带有一个运算的集合，它們能适合上述的定义。我們建議讀者自己去造出一些这样的例子。在这里我們只指出，例如，負整数的集合对于乘法，奇数的集合对于加法是不适合我們的定义的。同样，全体实数的集合，

如果把除法看作它上面的运算，也不适合这个定义，因为不能用零除。

如大家所熟知的，也有各种各样不是行之于数的代数运算的例子。n 維矢量空間中矢量的加法，三維欧氏空間中矢量的矢量乘法，n 阶方陣的乘法，一个实变数的实函数的相加以及这些函数的相乘等等，都是这样的代数运算。对以后来說一个非常重要的代数运算的例子，就是置换的乘法。如大家所知道的，所謂一个 n 次置换，就是头 n 个自然数集合的一个自身相互单值映射。相继进行两个 n 次置换，其結果仍旧是一个 n 次置换，叫做第一个置换乘上第二个置换的乘积。举例来說，如果給出当 $n=3$ 时的两个置换

$$a=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

那末这两个置换的乘积就是置换

$$ab=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

这样，在 n 次置换的集合中，就定义了一个代数运算。很容易看出，这个代数运算是非交换的；譬如对上面所給的那两个置换 a 和 b 来說，b 乘上 a 的乘积将是

$$ba=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

在研究带有一个代数运算的集合时，我們照例使用乘法的术語和記号。就是說，把所研究的运算叫作乘法，把对元素偶 a, b 进行运算的結果叫作这两个元素的乘积 ab。但在某一些場合下，使用加法的术語和記号要来得方便一些，那就是說，把运算叫作加法，而把运算的結果叫作元素 a, b 的和 $a+b$。

我們已經指出过，在代数运算的定义中，并沒有要求运算是交换的，也就是說，并沒有要求对集合 M 中的任意一对元素 a 和 b，

等式

$$ab=ba$$

成立。

非交換运算的例子有：当 $n\geqslant 2$ 时 n 阶方陣的乘法，n 次置換的乘法，不仅对 $n=3$ 的情形是非交换的，如在上面已指出过的，对所有 $n\geqslant 3$ 的情形也都是非交換的。此外，三維欧氏空間中矢量的矢量乘法也是非交換的。数的减法也可以看作非交換运算的一个例子。

代数运算的定义幷沒有要求这个运算必須是结合的，也就是説，沒有要求对集合 M 中的任意三个元素 a, b, c 等式

$$(ab)c=a(bc)$$

成立。

三維欧氏空間中矢量的矢量乘法是非結合运算的一个例子；整数的减法也是非結合的。另一方面，如大家所知道的，方陣的乘法是結合的。置換的乘法也是一个結合的运算，这一点可以从下面这个更普遍的結果中得出来。

設已知一个集合 S，有限或无限在所不論。試考察所有将集合 S 映入其自身的单值映射。也就是説，所有这样的映射，它們中的每一个能使 S 中的任意一个元素，都有这一集合中一个完全确定的元素和它相对应，虽然和 S 中不同元素相对应的元素可能是同一元素，幷且在 S 中还可能有一些元素，誰也不和他們相对应。如果我们把接连作这样两个映射的运算称为它们的相乘，那末我们就可以得出这个映射集合中的一个结合的代数运算。

事实上，設給出三个将集合 S 映入其自身的单値映射 φ, ψ 和 χ。其次，設 a 是集合 S 中的一个任意的元素，幷設元素 a 被 φ 映到元素 b，而元素 b 又被 ψ 映到元素 c，最后，元素 c 又被 χ 映到元素 d。在这样的情形下，映射 $\varphi\psi$ 将元素 a 映到元素 c，因而映射

$(\varphi\psi)\chi$ 将元素 a 映到元素 d。但映射 $\psi\chi$ 将元素 b 映到元素 d,因而映射 $\varphi(\psi\chi)$ 也将元素 a 映到元素 d。这就证明了 $(\varphi\psi)\chi$ 和 $\varphi(\psi\chi)$ 这两个映射是一致的。

現在让我們来看一看，从某一集合 M 中給定的代数运算滿足結合律这一事实可以推出怎样一些結論。从代数运算的定义可知,从集合 M 中按一定次序取出的任意两个元素都有乘积,并且这个乘积是唯一确定的。但仅仅根据这一点，在一般情形下我們还不能討論三个元素的乘积——一般說来，依一定次序从 M 中取出的三个元素 a, b 和 c，其乘积要看我們是怎样将它們相乘才能决定:是将 a 和 b 的乘积乘上 c 呢,还是将 a 乘上 b 和 c 的乘积?有了結合律，我們才可以唯一地說出 M 中三个元素的乘积:元素 $(ab)c$ 等于元素 $a(bc)$,并将其簡单地記作 abc。显然,变换因子的次序时,三个元素的乘积一般說来也是会跟着改变的。

除此之外,有了运算的結合律,我們还可以談論集合 M 中按一定次序取出的任意有限多个元素的乘积而不会有所誤解。也就是說，从結合律可以证明进行运算的結果与最初括号的分布位置无关。現在让我們假定这一事实对因子的个数小于 n 的情形已經证明，进而来证明它对 n 个因子$(n>3)$的情形也成立。設在已知集合 M 中有一个 n 个元素的有序組

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$

在这些元素之間按某种方式安置了一些括号，表示运算进行的次序。按这些括号所指示的次序依次相乘,最后一步,我們将把最先 i 个元素的乘积 $a_1a_2\cdots a_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 与乘积 $a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_n$ 相乘。因为这两个乘积中因子的个数都小于 n，故根据我們的假定,它們是唯一地确定了的。因此我們只要证明由乘积 $(a_1a_2\cdots a_i)(a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_n)$可以过渡到乘积$(a_1a_2\cdots a_j)(a_{j+1}a_{j+2}\cdots a_n)$，$i\neq j$，就行了。很显然,后面这一事实只要就 $j=i+1$ 的情形来证明就够了,

这是可以簡单地运用結合律而达到的：如果

$$a_1a_2\cdots a_i=b,\quad a_{i+2}a_{i+3}\cdots a_n=c,$$

則

$$b(a_{i+1}c)=(ba_{i+1})c.$$

很显然，我們沒有权利用上面的方法，来討論M中无限多个元素的乘积。

有代数运算的集合M，有时候也可能具有单位元素(或簡称单位元)，即这样一个元素1，它使得等式

$$a\cdot 1=1\cdot a=a$$

对M中所有元素a都成立。集合M里只可能有一个元素，具有这种性质：如果还可以找到第二个单位元素$1'$的話，那末乘积$1\cdot 1'$将会同时等于1和$1'$，因而$1=1'$。在采用加法的記号时，单位元素将被称作零，并記作0。

沒有单位元素的带有代数运算集合的例子有：对于加法运算的自然数集合，对于乘法运算的偶数集合，以及对矢量乘法运算的三維欧氏空間中矢量集合。另一方面，正如大家所知道的，n阶方陣的乘法是有单位元素的，这个元素就是单位方陣。n次置换的乘法也具有单位元素，不难看出，这个元素就是恒等置换

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}。$$

一般地說，在将某一集合S映入其自身的全部单值映射的集合中，如果把映射的相继进行当作乘法的話，集合S的恒等自身映射就是单位元素。

最后，让我們引入逆运算这个概念。从高等代数的課程中我們知道，在任意一个环里面，减法是加法的逆运算；而在任意一个域里面，如果只考虑不等于零的元素的話，那末除法就是乘法的逆运算。按照这两个例子，对任意一个带有一个代数运算(不一定是

可换的)的集合M,可以很自然地提出这样一个問題: 对于M中两个已知的元素a和b,可否找到这样两个元素x和y,使

$$ax=b, \quad ya=b. \tag{1}$$

这两个方程可能在集合M内沒有解。另一方面，每一个方程都可能在M里有許多个互不相同的解。如果对任意的a和b，方程(1)中的每一个都有解,并且这个解是唯一的,那我們就說,*在集合M中所定义的运算具有逆运算*。很显然,在非交换运算的情形,这两个解不一定相等。

任意一个有零因子的环(例如函数环和方陣环)里的乘法，是使方程(1)可能具有几个不同的解的运算的例子。使方程(1)不永远有解的运算的最簡单的例子，是自然数集合中的加法以及整数环中的乘法。对实数域中的乘法来說也是如此，这是因为不能用零除的緣故。

§2. 同构·同态

設已知两个集合M和M',每一个集合里面都定义了一个代数运算。我們将把这两个集合里的运算都叫作乘法。設在集合M和M'的元素之間可以建立一个相互单值的对应，具有下面的性质:如果与M中的元素a, b相对应的M'中的元素是a', b',且

$$ab=c, \quad a'b'=c'$$

则在这个对应下,与集合M中的元素c相对应的，不是M'中任何其他元素而恰是元素c'。在这样的情形下,我們就說集合M和M'**同构**。这样一个相互单值的对应,我們称作集合M和M'之間的**同构对应**。集合M和M'同构这个事实,我們用記号

$$M \simeq M'$$

来表示。

要举出相互同构的、带有一个代数运算的集合的例子并不困