科學圖書大庫

無窮與集合

（訂正版）

譯　者：黃克寧
校閱者：郭從古

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

無窮與集合

（訂正版）

譯　者　董克榮
校閱者　郭[illegible]

徐氏基金會出版

序

數學的基礎現在又成了熱門問題。尤其集合論，更是個重要的研究範圍，它幾乎彌漫了整個近世數學的思潮。集合論可算是源於康脫（Cantor），他設法把物件聚合的概念，構成了無窮在數學理論上的基礎。這種無窮並不是極限理論裏的那種"趨勢"、不可得到的無窮，而是一切有窮數值外，完全確定的那種"實際"或者乾脆說是眞的東西。他把集合論由原來自然、合理的念頭，推廣爲今日抽象、公設的成果，而成了代數、幾何、分析的基礎。由這裏不難了解康脫的偉大成就了。

現在坊間關於集合論方面的英文書籍，都是些散碎的零篇，不然就嫌太過艱深。正迫切需要一本從不太抽象的公設講起，並足以將集合論作基本介紹的英文書，更要緊的是要能適合大學或高中的教師、大學生、甚至適合對這些感興趣的門外漢閱讀；而本書，正好迎合這種需要。介紹集合論的時候，所賦予的意義與推論最好都能與具體世界的觀察符合，這樣也才算是最順應自然的講法；而本書，正是採用這種方法。開始先一點一點地講些性質與原理，接着再從這些性質與原理導出抽象物件集合的定理。就像這樣從具體的有窮集合一直引領到基數，到無窮數，並藉序型引領到無窮序數。

本書將不涉及一種基於公設系統的抽象集合論。諸位要是想作更進一步的研究，可以看看書後附上的書目。選擇公設以及它與整序定理的關係，對於整個集合論的發展極爲重要，但這是數學家的事，初學者可不去理會它。譯本書的旨意在能爲讀者打下良好的根柢，並冀能激起讀者深入研究的狂熱。

Howard.F.Fehr.

目　錄

第一章　導言

"幾何與分析、微分與積分總是或隱或顯地涉及無窮集合。"這是郝斯多福①在他的集合論初步裡所說的（1914）。要想眞正通曉數學的這些部門，就非得對它們的共同基礎有一番認識不可，而這共同的基礎便是集合論。

或者要問，數學到底講些什麼呢？不外是講些數的集合啦！點的集合啦！——通常都是無窮集合，也就是說，含無窮多個物件的集合。

讀者或許懷疑，是否可能用數學分析的方法來探求無窮（infinite）②從而得以數學定律與數學公式來處理無窮。其實這種探求無窮的方法正是集合論的精髓所在。因此我們對無窮的概念，就這一意味上說來，絕不可與模糊的感情想法或非數學的無窮（形而上學的無窮）相混淆。

在康脫③以前，無窮在數學上還是個含糊晦澀的部份。即使是高斯④，他於1831年還認爲："無窮只是實際談到極限時的一種表達方式，因爲某些比率要多趨近就可多趨近于某些極限，而另一些比率卻

① 譯註：F. Hausdorff

② 譯註：讀者可曾注意到 infinite〔'infinit〕，finite〔'fainait〕，infinitive〔in'finitiv〕等字的發音。

③ 譯註：Georg Cantor（1845－1918）

④ 譯註：Karl F. Gauss（1777－1855）

可無限地增大[5]。”高斯他自己便不主張採用無窮數（infinite number）的字樣，以為它是數學上所不容的東西[6]。他認為無窮只是極限 $\lim_{x\to\infty}\cdots$ 裏的一種無限增大的過程[7]。

康脫的老前輩，巴札諾[8]也認為[9]數學裏的無窮充滿了反論（矛盾），無法以算學來處理。然而康脫卻告訴我們如何藉他導出的明確判分的無窮數及嚴格定義了的運算法則來計算無窮：“…那是一種擴充；也就是實整數數列超過無窮的一種延續。大膽地說，我不僅希望而且堅信，這種擴充早晚要被認為徹頭徹尾都是簡單、合理、而且自然的。”

十年後，康脫才逐漸體會到，這概念對於數學更進一步的發展是不可或缺的，於是決意發表這創見。就在那本著述中，他把用於有窮

---

⑤ 譯註：能趨近于某一極限的比率，就可用有窮數來代表此極限．例如，當 $x\to 0$，比率 $\frac{1}{x+1}\to 1$，即 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$；然而比率 $\frac{1}{x}$ 當 $x\to 0$ 時卻不趨近于某一極限，反而可變得比任何已知的有窮數還要大．為了能用一符號來表示此比率可無限地變大的意義，就創用了符號“∞”，因此如果說某比率的極限是 ∞，意思也就是說此比率在某種情況下可無限地變大．高斯所認為的無窮就是“∞”．當然“∞”根本不是數，只是為了表達比率的某種趨向而創用的符號，如 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\to\infty$．

⑥ 譯註：因認為無窮不是數．

⑦ 譯註：請參閱第三章第一節之2．

⑧ 譯註：Bernhard Bolzano（1781－1848）

⑨ 原註：在他的一本遺作（1851年出版）裏說的．

數的定律與法則都予以推廣，使它們不再局限於有窮數的範圍。他說明如何把應用於有窮集合的方法來計算無窮集合。他以一些明白定義了的概念，像順序（order）（這要回溯到狄德肯 Dedekind）、數額或基數（power 或 cardinal number）、可數性（denumerability）等，把集合論發展爲一門有窮與無窮間根本不再有隔閡的學科⑩——把無窮變成可以理解的。

今日我們知道，就如希伯特⑪所說，康脫從此"創立了數學上最有發展、最有力的一個部門；一個沒人能把我們趕出去的天堂⑫"。集合論乃人類智慧最特出、最優美的一種創作；它的概念推定與論證方法，使數學研究各部門再度生氣蓬勃。從集合論就可以看出，康脫主張"數學的本質在於它的無限制性"是很有道理的。

數學就在提問題上發揮了它的無限制性。誰不曾提到過如下的問題呢？

整數比偶數多嗎？⑬

無界直線合的點比線段合的點多嗎？⑭

平面合的點比空間合的點少嗎？⑮

---

⑩ 譯註：用根本上相同的定義，來定義有窮數與無窮數，從此有窮數與無窮數是一家人了。

⑪ 譯註：David Hilbert（1861 — 1932）

⑫ 譯註：在天堂裏萬物復甦，一切欣欣向榮、生生不息。

⑬ 譯註：見第三章第一節之 1。

⑭ 譯註：見第三章第一節之 4。

⑮ 譯註：見第三章第三節之 7。

有理數密集于數標尺上嗎？[16]

尤其是，$\infty+1$，$\infty\cdot3$，∞^2 各代表什麼呢？[17]

人們總是避免公開談論這些問題，因爲這種問法似乎太天眞或者無聊，更因爲他們根本不懂。然而只要這些問題措詞適當，集合論都能一一予以數學上嚴密的清晰解答。

一般集合論的基礎至今已經建立了有半個世紀以上。要理解它幾乎不需要具備任何必需的專門知識。**所需要的只是對論證"無窮大"有興趣，對領悟稍微難一點的概念有耐心**。雖然集合論是出自直覺上的具體事物，却仍然達到一個非常高階的抽象[18]。

本書只是集合論的初步介紹。在前面幾頁裏，將用大家熟悉的有窮集合來導出基本概念。雖然有窮集合論就只是些算術與排列組合，但對於提供集合論的專門名詞與符號還是很有幫助的。這些概念也就供給了接著討論無窮集合的基礎。本書討論的一般集合論以序集合爲結尾，另附一些點集合的重要定理。至於會產生矛盾的定義只在結論章裏約略提一提。

---

(16) 譯註：見第五章第三節之3。

(17) 譯註：見第三章第六節。

(18) 譯註：見第四章第一節註1。

第二章　有窮集合

第一節　集合、元素、集合的相等

1. 集合（set）是什麼？集合並不是我們日常談話中所指稱的許多人、許多船、或許多東西①．

集合是我們的知覺或思想中，明確的、各別的物件的聚合；這些物件叫做集合的元素②．

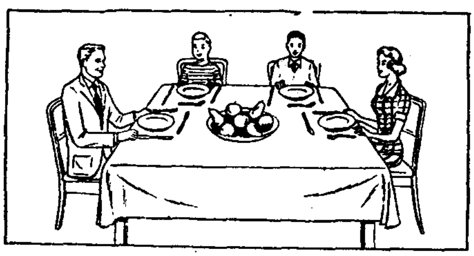

圖1．　在王家的餐廳裏

2. 以下是集合的一些例子：

(*a*)　圖 1 裏圍著餐桌坐的四個人形成一個四人集合，因為他們是

① 譯註：因為那些是含糊不明確的物件的聚合．

② 譯註：A set is a bringing together into a whole of definite well-distingished objects of our perception or thought—which are to be called the elements of the set。(Georg Cantor)

我們知覺中四個明確的、各別的"物件"·我們把王伯父、王伯母、與他們的兒子王大偉、王小華全部看作一個整體，稱之為王家集合·四張椅子形成一個四元素的集合；四把湯匙、四把叉、四把刀、四個盤子也各形成一個四元素的集合·如果我們定義集合B的元素是餐具，那末所有這些餐具就可看作形成一個十六元素的集合B·

在果盤裏有一個七只水果的集合·我們也可以說：果盤裏有一個四只蘋果的集合與一個三只梨子的集合·

注意：各集合含些什麼元素，全要看各集合本身的特性而定·每一件東西都要能確定是或不是某個集合裏的元素·王家一切男性份子所構成的集合，含有元素：王伯父、王大偉、王小華；王家一切女性份子所構成的集合，只含一個元素：王伯母·數學裏可以有小到只含一個元素的集合；為了使集合更具一般性，還要有空集合（empty set 或 null set）.

空集合不含任何元素③.

圖1果盤裏李子的集合就是空集合的一個例子·

(*b*) 某畢業班有15位學生·這15個元素就形成應屆畢業生的集合·這集合定的性質就是：每一個元素都是這畢業班裏的一位學生·

假設這15位學生的教室有座位15個，我們由排列律④可知共有 $15!=1,307,674,368,000$ 種不同的坐法·因此各種坐法的集合含有1.3兆多個元素·（1.3兆秒合四萬多年！）

3. 數學上通常都是用抽象物件（我們思想中的物件⑤）來構成

---

③ 譯註：通常以 ϕ 表空集合·

④ 原註：n 個不同物件的排列數是 $n!$·讀作"n 階乘"並定義
$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot n$$

⑤ 譯註：實在物件是"知覺中"的物件（見2(*a*)）；抽象物件是"思想中"的物件·請再參閱集合的定義·

集合，而很少用實在物件・抽象物件例如：數、點、三角形等諸如此類的東西・

4. 下面是抽象集合的例子：

(*a*)　全部個位自然數所構成的集合 M 含有元素 1，2，3，4，5，6，7，8，9；這九個明確的、各別的物件都屬於集合 M，因爲它們都具有"個位自然數"這種特性・

(*b*)　令集合 N 含數字 9，8，7，6，5，4，3，2，1・爲了表明集合裏的元素，我們把元素括在紐括弧內・因此寫作：

$$M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ ;$$

$$N=\{9,8,7,6,5,4,3,2,1\}\ .$$

"5是 M 的一個元素"與"5是 N 的一個元素"分別用符號"$5\in M$"與"$5\in N$"表示・"$\in$"唸作：**是…的一個元素或屬於**；相反地，"$\notin$"表示：**非…的一個元素**⑥・

5. 前面的例子裏，集合 N 與集合 M 含有相同的元素・除了元素的排列方式外，這兩個集合的元素可說是完全相同・這樣我們就說，集合 M 與集合 N 相等，而寫作 $M=N$・

兩集合相等，若且唯若該兩集合含有相同的元素・

由這個定義可以看出：相等的關係是**反身的**（reflexive）、**對稱的**（symmetric）、**傳遞的**（transitive）・亦即：

(*a*)　$M=M$・

(*b*)　若 $M=N$，則 $N=M$・

(*c*)　若 $M=N$，$N=P$，則 $M=P$・

---

⑥　原註：所有的符號都載在第七章第四節的彙編裏・

6. 康脫的集合定義要求元素是明確的並且是各別的（definite and distinct）• 在同一個集合裏，相同的元素不得重覆出現 • 因此字母 g，e，o，m，e，t，r，y 裏的兩個 e 必須去掉一個 e 才能成爲一集合 • 如此則

$$M=\{e,g,m,o,r,t,y\}.$$

7. 幾何裏的集合例子：

(a) 圓面積 $x^2+y^2\leq 4$ 內的格子點⑦所構成的集合 K 含 13 個點 •（見圖 2）

(b) 在頂點爲 $(0,2)$，$(2,0)$，$(0,-2)$，$(-2,0)$ 的正方形上及形內的格子點構成一個集合 Q • 這集合所含的元素與上面的集合所含的相同 • 因此這兩個點集合相等，而寫作 $K=Q$ •

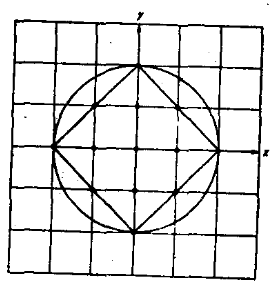

圖 2. 格子點的集合

練 習

1. 從你四周找出若干可以作爲集合元素的東西 •（提示：窗、座位、書…）•
2. 在本節之 7 的例子裏，把 K 與 Q 中位於圓上及正方形上的點除掉後，所得兩個新集合是不是還相等？

⑦ 原註：格子點乃整數坐標的點 •

3. 界於圓 $x^2+y^2=12$ 與圓 $x^2+y^2=4$ 間的格子點集合是空集合嗎？（請作圖）

4. 試作出一切眞分數的集合，但分子分母必須是個位互質自然數。

5. 爲什麼分子分母是個位互質自然數的一切假分數所構成的集合，正好比第四題的集合少八個元素？

第二節　子集、補集、聯集、交集

1. 如果集合 N 的每一個元素也是集合 M 的元素，我們就說集合 N 是集合 M 的一個子集（subset）。（並且說 M 是 N 的一個母集 superset）。而寫作："若 $a\in N$ 必有 $a\in M$，則 $N\subseteq M$"，"$\subseteq$"唸作："爲…的一個子集"或"包含於"。

若 $N\neq M$，則稱 N 爲 M 的一個眞子集 (proper subset)，寫作："$N\subset M$"，唸作"N 爲 M 的一個眞子集"。像這樣，M 就至少有一個元素不屬於 N。

又若 $N=M$，則稱 N 爲 M 的一個假子集（improper subset）。注意，任何集合一定也是它本身的一個假子集①。我們並公認由定義可得：

空集合是任何集合的一個子集。

2. 如果 N 是 M 的一個眞子集，那末由 M 中不屬於 N 的元素所構成的集合 R 叫做 M 上對於 N 的補集（complementary set to N over M）。寫作 $R=M-N$②。

---

① 譯註：有些書裏採用 $N\subset M$，相當於本書的 $N\subseteq M$，又 $M\supseteq N$ 代表"M 是 N 的一個母集"

② 譯註：有些書裏以 $A-B$ 代表差集合（difference）。而 B 可以不是 A 的子集。差集合就是從 A 的元素中扣掉屬於 B 的元素後，剩下的元素所構成的集合。例如 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{b,f,g\}$，則

$$A-B=\{a,c,d\}.$$

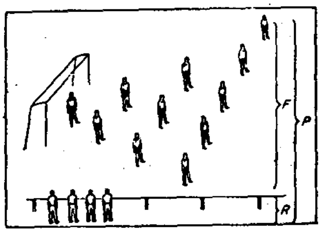

圖3. 集合P，子集F，補集R

3. 例：由畢業班（見第一節，2(*b*)）的 15 人中選出一部份人來組一個足球隊・那末選手的集合F就是畢業班集合P的一個子集・F所有的 11 個元素同時也都是P的元素，但是P的元素有些却不含於F；因此F是P的眞子集・P上對於F的補集R（$R=P-F$）含有畢業班裏四位未當選手的觀衆・此處R也是P的子集・我們可將這些性質簡寫如下：

$$F\subseteq P\ ;\ R=P-F\ ;\ R\subseteq P$$

這足球隊的 11 位學生可以．．種不同的方法，編排於球隊的 11 個位置・除了 11! = 39,916,800 種不同的編排法外，還可從這 15 位應屆畢業生中，選取不同的選手來組隊・由集合P的 15 個元素來構成含 11 個元素的子集，共有

$$\binom{15}{11}=\frac{15!}{11!4!}=1365^{③}\text{個}.$$

因此，自 15 位應屆畢業生中選出 11 位組成足球隊，盡一切可能的編

③ 原註：在排列組合裏可以證明，由N個不同的物件中選取P個物件共可有

$$\binom{N}{P}=\frac{N!}{P!(N-P)!}\text{ 種組合・}$$

排法所構成的集合共含有$11! \cdot \binom{15}{11} = 54,486,432,000$個元素。

4. 現在來作出集合$M=\{1,2,3\}$裏可能的一切子集。首先是空集$M_0=\{\}$；含一個元素的集合有：$M_{11}=\{1\}$，$M_{12}=\{2\}$，$M_{13}=\{3\}$；含二個元素的集合有：$M_{21}=\{1,2\}$，$M_{22}=\{2,3\}$，$M_{23}=\{3,1\}$；以及假子集$M_3=\{1,2,3\}$。因此集合$M=\{1,2,3\}$正好有8個也就是2^3個子集。

凡n個元素的集合必正好有2^n個子集④。

這定理很容易證明，可利用從n個物件中依次選取。1，2，3，…，p，…，n個的組合公式⑤。

5. **兩集合的聯集（union）是由至少屬於該兩集合之一的一切元素所構成的集合。**

兩集合的聯集以符號$M \cup N$代表⑥唸作：M與N的聯集。聯集中含有M的元素，也含有N的元素，但M與N都含的元素却只保留一個。

6. **兩集合的交集乃一切同時屬於該兩集合的元素所構成的集合。**

兩集合的交集以符號$M \cap N$代表。唸作：M與N的交集。

---

④ 譯註：集合N的一切子集所構成的集合族稱爲N的**冪集合**；可以2^N代表，但本書都以$U(N)$代表。見第三章第七節之5。

⑤ 原註：有$\binom{n}{0}$個即1個空子集；$\binom{n}{1}$個即n個含一個元素的子集；$\binom{n}{2}$個即$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$個含二個元素的子集；餘類推。所以子集的總數是：

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n.$$

⑥ 譯註：有些書裏以$M+N$表示M與N的聯集，並稱之爲M與N的**集合論和**（set - theoretical sum）.

7.例：

(a) 設有集合：

$M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$；

$G=\{2,4,6,8\}$；

$U=\{1,3,5,7,9\}$；

$P=\{2,3,5,7\}$；

我們可以看出M含有全部個位自然數；G僅含偶數；U含奇數；P含個位質數。現在再作子集、補集、聯集、交集。以下是一些可能的關係：

(α) $G\subset M$；$U\subset M$；$P\subset M$。

(β) $G\cup M=M$；$U\cup M=M$；$P\cup M=M$；

$G\cup U=M$；$(G\cup U)\cup P=M$；

$G\cup P=\{2,3,4,5,6,7,8\}$；

$P\cup U=\{1,2,3,5,7,9\}$。

(γ) $M-U=G$；$M-G=U$；$M-P=\{1,4,6,8,9\}$。

(δ) $M\cap G=G$；$M\cap U=U$；$M\cap P=P$；

$P\cap G=\{2\}$；$P\cap U=\{3,5,7\}$；$G\cap U=\{\}$。

注意在最後的那個交集裏，G與U沒有共同的元素——兩集合裏的元素完全不同。我們就說這兩集合**離交**（disjoint），離交的兩個集合的交集是空集合。

(ε) 集合M有$2^9(=512)$個子集。即：$\{\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，…，$\{9\}$，$\{1,2\}$，…，$\{8,9\}$，$\{1,2,3\}$，…，$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。

(b) 現在以集合$M=\{m,o,r,g,e,n\}$，$N=\{n,a,c,h,t\}$，