高等学校试用教材

微分几何讲义

虞言林　郝凤歧　编

高等教育出版社

高等学校试用教材

微分几何讲义

虞言林 郝凤歧 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书涉及的微分几何内容是初等的，但所用的方法却是近代的，作者采用幺正活动标架法，使几何问题化为外微分式的计算，突破了用坐标系来计算的传统框架. 全书包括“曲线论”、“曲面论”以及“内蕴几何”三章. 本书经高等工业学校应用数学专业教材委员会1986年5月杭州会议审定作为教材.

本书可作为高等院校应用数学专业和数学专业，以及师范院校数学专业的教材，也可供以上各专业的教师参考.

高等学校试用教材

微分几何讲义

虞言林 郝凤歧 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.375 字数 170 000

1989年1月第1版 1989年2月第1次印刷

印数 0001—2 350

ISBN7-04-000598-0/O·228

定价 1.85 元

前　言

当代微分几何在科学技术的许多领域中日趋广泛的渗透和应用，已是不言而喻的了. 甚至微分几何的近代术语在工程师圈子中也频频出现，使人感到微分几何基础课教材的“时髦化”似乎有了必要. 我们在编写这本讲义时，想对此做一次尝试. 希望学生在基础课学习中也尽可能多地接触近代数学的符号、语言和方法，以提高他们的数学修养和计算能力. 这些当然也是应用数学工作者为适应近代科技发展所必须具备的.

本讲义的第一章(曲线论)和第二章(曲面论)的内容是高等院校数学系及师范院校数学系的“微分几何教学大纲”中规定的基本内容.简短的第三章介绍内蕴几何,它其实是黎曼几何的一个引论.

尽管本讲义涉及的微分几何的结果既初等又古老，但所用的方法却是近代的. 我们采用幺正活动标架法，使几何问题化为外微分式的计算，这突破了用坐标系来计算的传统框架. 这种方法早已有之，只是一直未能进入较低年级的基础课. 其主要原因可能是:外微分式概念的引进过于曲折、冗长，不但占用了许多学时,而且也使学生感到被动，因而产生烦躁. 为此,我们在概念的引进方式上做了些改善,经多年教学实践,还算成功. 配备了外微分式计算的幺正活动标架法会使曲面的基本公式和结构方程鲜明简洁,会使几何中的复杂计算(例如，由第一基本形式计算总曲率的算法,曲面上曲线的各种计算等)简单明快. 因此它并不是时髦的化妆品,而确是解决问题的一个强有力的武器.

本讲义曾在清华大学应用数学系试用多次．教授本讲义中的第一、二章和第三章的部分内容，所需学时不多，56个学时大体就够了．每一小节后面一般都有一定数量的习题，供学生们为加深概念的理解和提高计算的能力而用．

正如前面所说，本讲义是尝试之作，定有许多缺点和疏忽之处，希望大家批评指正．

作　者

1987.12

目　　录

第一章　R^3 中的曲线

三维欧氏空间中的曲线理论是初等微分几何中重要的一部分. 三维欧氏空间E中的一个**幺正标架**$\{O;\ E_1, E_2, E_3\}$**是指**: O **是** E **中一个点**; E_1, E_2, E_3 是向量,满足

$$\langle E_i, E_j\rangle=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j,\\ 0, & \text{当 } i\neq j,\end{cases}$$

其中$\langle\ ,\ \rangle$是向量的内积. 当在E中固定一个幺正标架$\{O;\ E_1, E_2, E_3\}$之后,对于E中任意一点P,我们有下列等式:

$$\overrightarrow{OP}=xE_1+yE_2+zE_3,$$

其中(x, y, z)是一组实数, 它由P唯一确定. 我们把(x, y, z)称为P的坐标. 把P点等同于它的坐标,其结果便给出E到R^3的一一对应,这里的R^3就是下列集合:

$$R^3=\{(x, y, z)\mid x, y, z \text{ 皆是实数}\}.$$

因此以后我们就把三维欧氏空间E看成R^3.

R^3 中的曲线是什么呢? 可以有多种不同的定义法. 例如可以看成方程组

$$\begin{cases}f(x, y, z)=0,\\ g(x, y, z)=0\end{cases}$$

的解组成的集合. 可是微分几何的曲线论中却只认定曲线的某一种特定的定义,即持"点动成线"的观点来了解曲线,而摒弃曲线的其它定义法. 这一点是颇为重要的,而且是战略上的一种选择.

§1 曲线

“点动成线”这句话是说：曲线是物理学中点的运动所留下的轨迹. R^3 中点的运动自然地表为一组方程

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \qquad t\in(a,b), \\ z=h(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中(x,y,z)是点的坐标； t 表示时间；f,g,h 是 t 的函数. 这个运动留下的轨迹是下列集合：

$$C\equiv\{(f(t),g(t),h(t))\mid t\in(a,b)\}.$$

照“点动成线”的观点，上述 C 称为 R^3 中的**曲线**. 上述方程组(1)称为曲线 C 的**参数方程**， t 称为曲线 C 的**参数**. 在此提请大家注意，运动和轨迹是两个不同的概念，曲线是轨迹而不是运动. 现在我们可以陈述对曲线的理解了. 曲线是 R^3 中的一个点集，这个点集可以用参数方程来表示. 本课程中我们研究的曲线就作上述理解，不过尚须加一些正则性条件.

参数方程组(1)的基本要素是三个函数 $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$. 我们把$(f(t),g(t),h(t))$记作 $P(t)$，即

$$P(t)=(f(t),g(t),h(t)).$$

如果 f,g,h 是可微函数，$t_0\in(a,b)$，我们便有向量

$$\left(\frac{df}{dt}(t_0),\ \frac{dg}{dt}(t_0),\ \frac{dh}{dt}(t_0)\right).$$

这个向量称为 C 在 $P(t_0)\equiv(f(t_0),g(t_0),h(t_0))$ 点的**切向量**，记作$\frac{dP}{dt}(t_0)$. 如果在此点的切向量满足

$$\frac{dP}{dt}(t_0)\equiv\left(\frac{df}{dt}(t_0),\frac{dg}{dt}(t_0),\frac{dh}{dt}(t_0)\right)\neq(0,0,0),$$

则称曲线 C 的参数方程(1)在 t_0 处**正则**（或者称参数 t 在 t_0 处

正则).

定义 1.1.1 R^3 中的点集 C 称为**正则曲线**，如果它至少有一个参数方程表示

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \\ z=h(t), \end{cases} \quad t\in(a,b),$$

并且具有下列性质:

(i) t 在区间 (a,b) 中变动; f,g,h 是 t 的连续可微函数(至少三阶连续可微).

(ii) 映射 $P:(a,b)\longrightarrow C:\ t\longmapsto(f(t),g(t),h(t))$ 是双方单值一一的.

(iii) 参数方程在任意的 t 处正则.

在上述正则曲线的定义中，t 称为曲线 C 的一个**正则参数**，参数方程称为**正则参数方程**.

例 1 R^3 中的点集

$$\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2=1, z=0, (x,y)\neq(1,0)\}$$

是正则曲线. 这是因为它有正则参数方程表示:

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \\ z=0, \end{cases} \quad t\in(0,2\pi).$$

例 2 点集 $\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2=1, z=0\}$ 以及 R^3 中的折线皆不是正则曲线. (请自证).

例 3 R^3 中的直线 $\{(x,y,z)\in R^3 \mid y=z=0\}$ 有下列两组参数方程表示:

$$(\text{甲})\begin{cases} x=t, \\ y=0, \\ z=0, \end{cases} \qquad (\text{乙})\begin{cases} x=\tau^3, \\ y=0, \\ z=0, \end{cases}$$

其中 t，$\tau\in(-\infty,\ \infty)$. 易见参数方程(甲)是正则的，参数方程(乙)不是正则的. 但该直线是正则曲线.

由于我们只研究正则曲线，采用的参数或参数方程又皆是正则的，所以为叙述简单计，通常将“正则”二字省略. 除非有特别需要，才加上“正则”，“非正则”等词.

我们已经知道，正则曲线可能具有多组参数方程(亦即具有多个参数). 设 t 与 $\bar{t}$ 是正则曲线 C 的两个正则参数，这时我们有 C 的两个参数表示

$$P(t)=(f(t),g(t),h(t))$$

和

$$\bar{P}(\bar{t})=(\bar{f}(\bar{t}),\bar{g}(\bar{t}),\bar{h}(\bar{t})).$$

以后我们将采用下面的约定.

约定: 将 $\bar{P}(\bar{t})$ 记作 $P(\bar{t})$.

这个约定规定了符号 $P(t)$，$P(\bar{t})$ 的含义. 我们在此做些说明. 初看起来，这个约定可能使人产生混乱. 既然已经有 $P(t)=(f(t),g(t),h(t))$，那么“想当然地”就会有

$$P(\bar{t})=(f(\bar{t}),g(\bar{t}),h(\bar{t})).$$

可是按照我们现在的约定，却应有

$$P(\bar{t})=(\bar{f}(\bar{t}),\bar{g}(\bar{t}),\bar{h}(\bar{t})).$$

这就告诉我们应当小心些，不要稀里糊涂地去乱用“想当然的公式”. 假若我们把 $(f(\alpha),\ g(\alpha),\ h(\alpha))$ 记为 $P(t)|_{t=\alpha}$，那么我们知道

$$P(t)|_{t=\bar{t}}\neq P(\bar{t}).$$

对曲线 C 的两个正则参数 t 与 $\bar{t}$，我们把代表 C 上同一点的两个参数值 t_0 与 $\bar{t}_0$ 对应起来. 由定义 1.1.1 中(ii)可知此对应是双方单值的一一对应，这就使得我们可以把 t 看成 $\bar{t}$ 的函数 $t(\bar{t})$，反之 $\bar{t}$ 也是 t 的函数 $\bar{t}(t)$. 换句话说，我们可从下列方

程组

$$\begin{cases} f(t)=\bar{f}(\bar{t}), \\ g(t)=\bar{g}(\bar{t}), \\ h(t)=\bar{h}(\bar{t}) \end{cases}$$

解出函数 $t(\bar{t})$ 和 $\bar{t}(t)$.

有了函数 $t(\bar{t})$ 和 $\bar{t}(t)$，则可知

$$P(t)\big|_{t=t(\bar{t})}=P(\bar{t}),$$

$$P(\bar{t})\big|_{\bar{t}=\bar{t}(t)}=P(t).$$

当我们把 t 与 $t(\bar{t})$ 等同起来，上述第一个等式就可写成 $P(t)=P(\bar{t})$；若等同 $\bar{t}$ 与 $\bar{t}(t)$，则第二个等式可写成 $P(\bar{t})=P(t)$. 因此采用前面的约定记号与这里的等同，即有

$$P(t)=P(\bar{t}).$$

在类似的解释之下，当由下面的引理 1.1.2 保证了可微性之后，容易看出下列等式成立，

$$\frac{dP(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{d\bar{t}}=\frac{dP(\bar{t})}{d(\bar{t})}.$$

这个等式简记为

$$\frac{dP}{dt}\cdot\frac{dt}{d\bar{t}}=\frac{dP}{d\bar{t}}.$$

至此，我们已经对前面的约定做了充分的解释，以帮助大家熟悉这个惯用的记号 $P(t)$.

引理 1.1.2 设 t，$\bar{t}$ 是 C 的任意两个正则参数，则函数 $\bar{t}(t)$ 是连续可微的，而且 $\frac{d\bar{t}}{dt}$ 处处不为零.

证明 对于任意的值 $\bar{t}_0$，

$$\left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{t}}(\bar{t}_0),\frac{d\bar{g}}{d\bar{t}}(\bar{t}_0),\frac{d\bar{h}}{d\bar{t}}(\bar{t}_0)\right)\neq(0,0,0).$$

不妨设

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{t}}(\bar{t}_0)\neq 0,$$

此时考虑参数方程中第一个等式

$$x=\bar{f}(\bar{t}).$$

由反函数定理可知：在某一个小区间$(\bar{f}(\bar{t}_0)-\varepsilon,\bar{f}(\bar{t}_0)+\varepsilon)$上存在$\bar{f}$的可微反函数$\varphi(x)$，使得下式成立，

$$\bar{t}=\varphi(x)=\varphi(\bar{f}(\bar{t})).$$

再根据函数$\bar{t}(t),t(\bar{t})$的定义，有

$$\begin{cases}f(t)=\bar{f}(\bar{t}),\\ g(t)=\bar{g}(\bar{t}),\\ h(t)=\bar{h}(\bar{t}),\end{cases}$$

从而

$$\bar{t}=\varphi(\bar{f}(\bar{t}))=\varphi(f(t)).$$

因此$\bar{t}$是t的可微函数. 同理可证$t(\bar{t})$也是可微函数. 再从

$$\frac{dt}{d\bar{t}}\cdot\frac{d\bar{t}}{dt}=\frac{dt}{dt}=1,$$

推知$\frac{d\bar{t}}{dt}$处处不为零. 引理证毕.

引理 1.1.3 设t和$\bar{t}$是正则曲线的两个参数（暂不假定是正则参数），又假设$t(\bar{t})$连续可微且$\frac{dt}{d\bar{t}}$处处不为零，则t是正则参数当且仅当$\bar{t}$是正则参数.

证明 由于

$$\frac{dP}{d\bar{t}}\cdot\frac{d\bar{t}}{dt}=\frac{dP}{dt},$$

和$\frac{dt}{d\bar{t}}$处处不为零，所以$\frac{dP}{dt}$处处不为零等价于$\frac{dP}{d\bar{t}}$处处不为零，从而引理得证.

习　题

1. 设$P(t)=(x(t),y(t),z(t))$是正则曲线C的正则参数表示，P_0—

$P(t_0)$是C上任意一点，试证明曲线C在P_0点附近，关于适当的坐标系下可以表为如下的Monge形式

$$P(\tau)=(\tau,y(\tau),z(\tau)).$$

2. 设$\varphi(x,y)$是变量x,y的正则函数(即φ连续可微，且$(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2$处处不为零)，$\Gamma$是平面$R^2$上满足$\varphi(x,y)=0$的点集，任取$(x_0,y_0)\in\Gamma$，则在$(x_0,y_0)$的一个邻域内$\Gamma$可以用正则的参数方程表示.

§2 弧长参数

本节介绍正则曲线的一类最好的参数，即**弧长参数**. 设曲线C的一个正则参数方程是

$$\begin{cases}x=f(t),\\ y=g(t), \qquad t\in(a,b).\\ z=h(t),\end{cases}$$

设P_0,P_1是C上两个点，它们对应的参数值是t_0,t_1(即$P_0=P(t_0)\equiv P(t)|_{t=t_0}$, $P_1=P(t_1)\equiv P(t)|_{t=t_1}$)，于是$C$上$P_0$至$P_1$间的**弧长**是

$$\begin{aligned}l(P_0,P_1)&=\left|\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2+h'(t)^2}\,dt\right|\\&=\left|\int_{t_0}^{t_1}\left|\frac{dP}{dt}\right|\cdot dt\right|.\end{aligned}$$

定义 1.2.1 设s是C的一个参数（不假定它是正则参数），如果对于C上任意两点P_0,P_1，总有

$$l(P_0,P_1)=|s_1-s_0|,$$

其中s_0,s_1分别是P_0, P_1所对应的参数值，这时我们称s是C的一个**弧长参数**.

引理 1.2.2 设s是C的一个参数，则s是弧长参数当且仅当s是正则参数，且

$$\left|\frac{dP}{ds}\right|=1.$$

证明 如果 s 是弧长参数，则当取正则参数 t 之后，有

$$|s_1-s_0|=l(P_0,P_1)=\left|\int_{t_0}^{t_1}\left|\frac{dP}{dt}\right|\cdot dt\right|,$$

从而

$$s-s_0=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{dP}{dt}\right|dt.$$

故$\frac{ds}{dt}$存在，且

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{dP}{dt}\right|\neq 0,$$

于是 s 是正则参数．对等式 $s-s_0=\int_{s_0}^{s}\left|\frac{dP}{ds}\right|ds$ 两端做关于变量 s 的微商，即可得

$$\left|\frac{dP}{ds}\right|=1.$$

反过来，如果已经知道 s 是正则参数，且

$$\left|\frac{dP}{ds}\right|=1\ ,$$

则

$$l(P_0,P_1)=\left|\int_{s_0}^{s_1}\left|\frac{dP}{ds}\right|ds\right|=\left|\int_{s_0}^{s_1}ds\right|=|s_1-s_0|.$$

于是引理得证．

引理 1.2.3 设 C 是任意一条（正则）曲线，则它必具有弧长参数．

证明 取 C 的一个正则参数 t，选定 C 上一固定点 $P_0\equiv P(t_0)$，对 C 上任意一个点 P，定义一个数 $s(P)$ 如下：

$$s(P)=\int_{t_0}^{t(P)}\left|\frac{dP}{dt}\right|dt,$$

中 $t(P)$ 是 P 点按参数 t 衡量时的参数值，现在曲线 C 上任意一点 P 都对应一数 $s(P)$，也就是在 C 上选取了一个参数 s．接下来

证明 s 就是一个弧长参数. 首先易见$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{dP}{dt}\right|>0$，从而由引理1.1.3可知 s 是正则参数. 由于

$$\left|\frac{dP}{ds}\right|=\left|\frac{dP}{dt}\right|\cdot\left|\frac{dt}{ds}\right|=1,$$

故由引理1.2.2知 s 是弧长参数. 证毕.

引理 1.2.4 设 s 是曲线 C 的弧长参数，τ 是 C 的另一个参数，则 τ 是弧长参数当且仅当存在 $\varepsilon=+1$ 或 -1，及一个常数 a，使得

$$\tau\equiv\tau(s)=\varepsilon\cdot s+a.$$

证明 由$\frac{dP}{ds}=\frac{dP}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{ds}$及引理1.2.2得：$\tau$ 是弧长参数当且仅当$\left|\frac{d\tau}{ds}\right|=1$. 至此引理就已不证自明了.

习 题

1. 求平面曲线的极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 表达下的弧长公式，其中 ρ 为极径，θ 为极角.

2. 计算下列曲线从 $t=0$ 起的弧长：

(1) 圆柱螺线 $P(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$.

(2) 双曲螺线 $P(t)=(a\operatorname{ch}t, a\operatorname{sh}t, bt)$.

3. 取定弧长参数时，表示曲线曲率和挠率的参数方程称为曲线的自然方程. 试建立 R^2 中圆与悬链线$\left(y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right)$的自然方程.

4. 设有曲线 $P(t)$，做 $P(t)$ 的泰勒展开式如下：

$$P(t)=P_0+\frac{dP}{dt}(0)\cdot t+\frac{d^2P}{dt^2}(0)\cdot\frac{t^2}{2!}+\frac{d^3P}{dt^3}(0)\cdot\frac{t^3}{3!}+\varepsilon t^3,$$

其中 $\varepsilon\to0$（当 $t\to0$）. 取一个弧长参数 s，使得 $s(P_0)=0$，试用$\frac{d^kP}{dt^k}(0)$表出 $P(s)$ 的二次泰勒展开式.

$\left(\text{提示：利用 } \frac{ds}{dt}=\left|\frac{dP}{dt}\right|\right.$，先算出$\frac{dt}{ds}(0)$，$\frac{d^2t}{ds^2}(0)$，从而得到 $t(s)$ 的二次泰勒展开式.$\left.\right)$

§3 曲线在一点处化标准形

研究曲线的目的是找出它的几何性质. 如果能找出足够多的性质,以致可以反过来确定曲线,这样就达到了圆满的地步.几何性质多半是用“不变量”来刻画的. 在 R^3 中曲线的研究中,所谓“不变量”,其紧要的特点是在运动下不变,即经过 R^3 中的一个运动,曲线变为一条新的曲线,对这两条曲线分别求出的“不变量”是一致的。另一个特点是:“不变量”应不依赖于参数的选取. 因此我们面临的问题是,用什么方法去找“不变量”. 一般来说,这是件凭经验来做的事,有好的几何直观,有好的设想,自然可以找到一些“不变量”. 例如用对比 R^3 中不同的曲线得到的直观,去找到刻画曲线弯曲的“不变量”. 假若用这种方式来写教材,大家会感到亲切,自然. 不过我们不打算这样来写,而宁愿采用“化标准形的方法”来揭开曲线论研究的序幕. 具体来讲,先不顾几何直观,专心于化简描绘曲线的方程,使之呈现为“标准形”,而后再进行几何的讨论. 这种方式或许会使一些人感到不愉快,因此先做两点解释. (1)假若我们把“化标准形”看作在进行几何讨论之前的准备工作,那么这种笨鸟先飞的做法就显得自然了. 令人不快的原因仅是:我们在把握了“标准形”之后,不再循规蹈矩了. 这是我们图省事所致,请不要责怪方法. (2) 在介绍数学内容的同时,我们想强调一些强有力的数学方法. 本书中我们要介绍以后出现的“活动标架法”. 作为陪衬,我们现在介绍“化标准形法”. 在介绍这些方法时,我们故意避开一些别的几何直观,以使大家体会到,若忠于此方法做下去,会不期而遇地得到欲求的结果. 从而表现出方法的强有力性. 以后我们用活动标架法引出测地曲率,测地挠率等也都是出自同样的考虑.

所谓“标准形”是指按曲线内在的性质给出的、曲线的一种数