

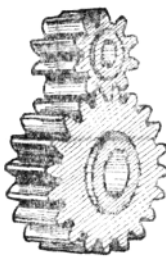
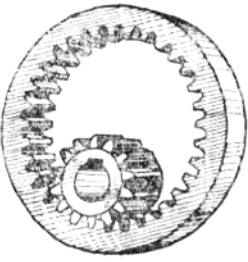
第11章 圆柱齿轮传动

王 秩 信

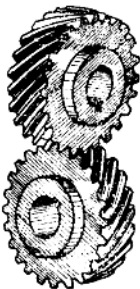
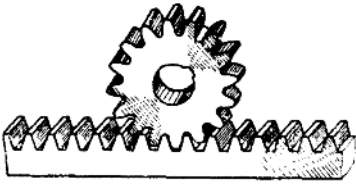
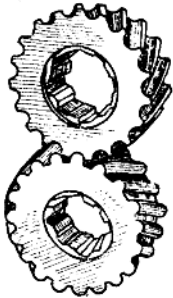
圆柱齿轮传动是机械传动中应用最广泛的一种传动形式。圆柱齿轮按其齿廓可分为渐开线圆柱齿轮、摆线圆柱齿轮、圆弧圆柱齿轮、双圆弧圆柱齿轮；按其外形可分为圆柱齿轮、齿条；按其齿线的

形状可分为直齿圆柱齿轮、斜齿圆柱齿轮、人字齿轮、直齿条、斜齿条。圆柱齿轮的分类列于表 11-0-1。

表11-0-1 圆柱齿轮的分类

种类	渐 开 线 圆 柱 齿 轮			
	平 行 轴 传 动			
	直 齿 轮	斜 齿 轮	人 字 齿 轮	内 齿 轮
简图				
特点	加工容易，便于提高精度，装配维修简便，互换性好	大、小齿轮螺旋角相等，螺旋方向相反，重合度较大，传动平稳，缺点是传动时有轴向力	由两个螺旋角相同而螺旋方向相反的斜齿轮组成，除有斜齿轮的优点外，传动时对传动装置无轴向力	传动时外齿轮的凸齿面与内齿轮的凹齿面啮合，接触强度比外啮合齿轮大，无根切，两齿轮转动方向相同

7-83 04 101

种类	渐开线圆柱齿轮			圆弧圆柱齿轮	
	交错轴传动	齿轮齿条传动		单圆弧齿轮	双圆弧齿轮
	交错轴斜齿轮	直齿	斜齿		
简图					
特点	大、小齿轮的螺旋方向一般相同,也可以不同,大、小齿轮的螺旋角不一定相等,而与螺旋方向及轴交角有关,因此分度圆直径大小与齿数不一定成比例,小齿轮(齿数较少者)直径不一定比大齿轮小	能把回转运动转变为直线运动或者相反		小轮为凸面齿廓,大轮为凹面齿廓,接触强度高,磨损小而均匀,无根切,弯曲强度低于渐开线齿轮,端面重合度为零,故必须做成斜齿,一对齿轮要用两把刀具加工	整个齿形由凸凹圆弧组成,齿顶部分为凸圆弧,齿根为凹圆弧,凸凹圆弧齿廓分别同时啮合,故有两条啮合线,承载能力比单圆弧大。一对齿轮可用一把刀具加工

第1节 渐开线圆柱齿轮的常用术语及其代号

渐开线圆柱齿轮常用术语的定义(表11-1-1)主要是摘自国家标准GB 3374—82《齿轮基本术语》,个别术语除了按GB 3374—82定义之外,还作了些补充说明。

表11-1-2所列渐开线圆柱齿轮常用术语的代号主要是摘自国家标准GB2821—81《齿轮几何要素代号》,其中个别代号是采用GB3480—83《渐开线圆柱齿轮承载能力计算方法》中的规定,还有个别代号是目前国内有关科技书刊中惯用的。

部分常用术语和代号如图11-1-1~11-1-3所示。

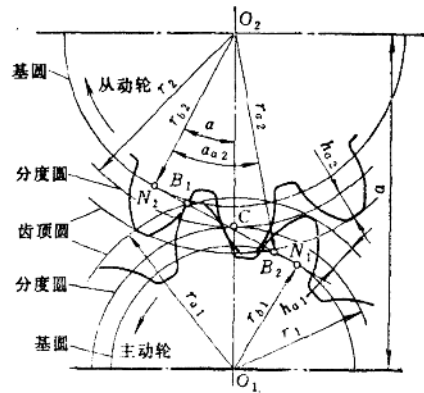


图11-1-1 直齿圆柱齿轮传动

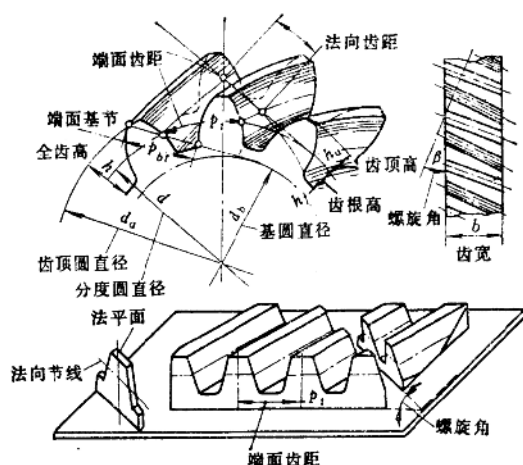


图11-1-2 斜齿圆柱齿轮

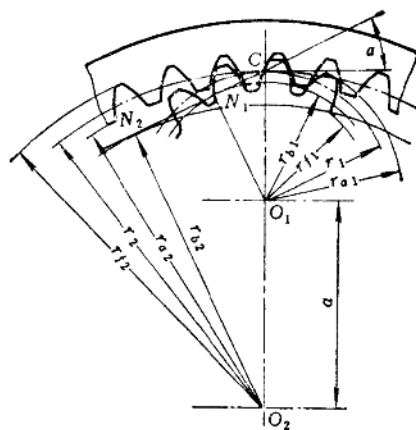


图11-1-3 圆柱内齿轮传动

表11-1-1 渐开线圆柱齿轮的常用术语及其定义

名 称	代 号	定 义
[标准]中心距	a	两齿轮分度圆柱相切时的中心距
角变位中心距	a'	角变位圆柱齿轮副啮合时的中心距
[啮合]节点	C	在一对相啮合的齿轮上, 其两节圆的切点, 也就是两啮合齿轮的啮合线与齿轮连心线的交点
分度圆直径	d	圆柱齿轮的分度圆柱面和分度圆的直径 分度圆是齿轮上的一个约定的假想圆, 齿轮的轮齿尺寸均以此圆为基准而加以确定。对于标准齿轮, 分度圆上的齿厚与齿槽宽各等于齿距的一半
节圆直径	d'	圆柱齿轮的节圆柱面和节圆的直径 节圆是齿轮节圆柱面与端平面的交线。而节圆柱面是在齿轮副中的任意一个齿轮上, 其配对齿轮相对于该齿轮作回转运动时的瞬时轴的轨迹曲面。标准齿轮和高变位齿轮的节圆与分度圆相重合
基圆直径	d_b	圆柱齿轮的基圆柱面和基圆的直径 基圆是齿轮上的一个假想圆, 形成渐开线齿廓的发生线在此假想圆的圆周上作纯滚动
啮合线长度	g_a	[端面]啮合线是齿轮副中的任意一对相啮合的端面齿廓, 在其整个啮合过程中, 其瞬时接触点在端平面上的运动轨迹。其端面啮合线与两相啮齿廓在其接触点处的、介于从动轮的齿顶圆与主动轮的齿顶圆两者之间的那一段公法线相重合。图11-1-1中的 B_1B_2 线段即为啮合线长度
传动比	i	在齿轮副或齿轮系中, 其始端主动轮与末端从动轮的角速度比值
模数	m	齿距除以圆周率 π 所得的商, 以mm计
齿距	p	在齿轮的某一个既定曲面上, 一条给定的定斜曲线被两个相邻的同侧齿面所截取的长度
法向齿距	p_n	在斜齿轮的分度圆柱面上, 其齿线的法向螺旋线在两个相邻的同侧齿面之间的弧长
[端面]齿距	p_t	在齿轮上, 两个相邻而同侧的端面齿廓之间的分度圆弧长
轴向齿距	p_x	在斜齿轮的一个轴平面内, 两个相邻的同侧齿廓之间的轴向距离

名 称	代 号	定 义
端面基圆齿距 (端面基节, 基节) 径节	p_{bt} (p_b) P	在齿轮的一个端平面上, 相邻的两个同侧齿廓的渐开线起始点之间的基圆弧长, 它与这两个端面齿廓之间恒定的法向距离在数值上相等 圆周率 π 除以齿距(以英寸计)所得的商 径节与模数的关系为: $m = \frac{25.4}{P}$
[端面]弦齿厚	$\bar{s}$	在齿轮的一个端平面上, 一个齿的两侧端面齿廓之间的分度圆弧所对应的弦长
固定弦齿厚	$\bar{s}_c$	齿轮的一个齿和基本齿条的两个齿对称接触时, 分布于该齿轮轮齿两侧齿面上的那两条接触线之间的最短距离
齿数比	u	齿轮副中, 大齿轮齿数与小齿轮齿数的比值, $u > 1$
公法线长度	W	对于外齿轮, 相隔若干个齿的两外侧齿面分别与两平行平面之中的一个平面相切, 此两平行平面之间的垂直距离称为该齿轮的公法线长度。对于内齿轮, 指的是相隔若干个齿槽的两外侧齿面
[径向]变位系数	x	圆柱齿轮与产形齿条作紧密接触, 齿轮的齿面与产形齿条的齿面一一相切时, 介于齿轮的分度圆柱面与齿条的基准平面之间沿公垂线量度的距离, 称为径向变位量。径向变位量除以模数所得的商称为[径向]变位系数。也就是说, 切削变位齿轮时, 产形齿条(齿条刀具)由标准位置(齿条的基准平面与轮齿的分度圆柱相切)沿径向移动的距离(即径向变位量)与模数的比值。按照惯例, 基准平面与分度圆柱分离时, 变位系数取正值; 基准平面切割分度圆柱面时, 取负值
中心距变动系数	y	角变位中心距与标准中心距之差除以模数所得到的商
齿顶高变动系数	y'	大小齿轮变位系数之和减去中心距变动系数之差
齿形角	α	基本齿条的法向压力角, 也就是分度圆压力角
啮合角	α'	在一般情况下, 两相啮合齿的端面齿廓在接触点处的公法线与两节圆的内公切线所夹的锐角, 称为啮合角。对于渐开线齿轮, 指的是两相啮合齿在节点上的端面压力角
法向压力角	α_n	过齿面上任意点处的径向直线与齿面在该点处的切平面所夹的锐角称为任意点的法向压力角。当任意点的位置限定在齿线上时, 就称为法向压力角
[端面]压力角	α_t	在端平面内, 过端面齿廓上任意点处的径向直线与齿廓在该点处的切线所夹的锐角称为任意点的[端面]压力角。当该点的位置限定在端面齿廓与分度圆相交的交点上时, 就称为[端面]压力角
端面啮合角	α'_t	过齿廓与节圆相交点所作的径向直线与齿面在该点处的切平面所夹的锐角
螺旋角	β	斜齿轮分度圆螺旋线(分度圆柱面与齿面的交线称为分度圆螺旋线)的螺旋角 圆柱螺旋线的切线与通过切点的圆柱面母线之间所夹的锐角
端面重合度	ε_α	端面作用角与齿距角的比值
纵向重合度	ε_β	纵向作用角与齿距角的比值
总重合度	ε_γ	总作用角与齿距角的比值
齿距角	τ	整个圆周(以角度单位表示)与齿数的比值, 也就是端面齿距所对的圆心角
端面作用角	φ_α	端面作用弧所对圆心角
纵向作用角	φ_β	纵向作用弧所对圆心角
总作用角	φ_γ	总作用弧所对圆心角
基本齿廓		基本齿条的齿廓, 它是确定某种齿制的轮齿尺寸比例的依据
基本齿条		在法截面内具有基本齿廓的假想齿条
产形齿条		一个能与基本齿条相贴合的齿条, 其中一个齿条的齿恰好充满另一个齿条的齿槽
基准线		基本齿条的法平面与基准平面的交线, 它是一条用于确定基本齿条的轮齿尺寸参数(齿厚与齿距的比值通常为0.5)的直线
基准平面		基本齿条上的一个假想平面, 在该平面上, 齿厚与齿距的比值为一个给定的标准值(通常为0.5)
齿面		位于齿顶曲面和齿根曲面之间的轮齿侧面
齿廓		齿面被一个与齿线相交的既定曲面所截的截线
齿线		齿面与分度曲面的交线

名 称	代 号	定 义
标准齿轮		变位系数等于零的齿轮, 又称非变位齿轮
共轭齿廓		一对相啮合的齿廓在整个啮合过程中, 能按照预定的规律运动, 既保持相切, 而又不相互干涉
端面作用弧		齿轮在其啮合过程中, 一个端面齿廓从啮合开始到啮合终止所转过的分度圆弧长
纵向作用弧		分别包含同一条齿线各一个端点的两个轴平面所截取的分度圆弧长
总作用弧		齿轮在其啮合过程中, 一个齿面从啮合开始到啮合终止所转过的分度圆弧长

注: 去掉〔 〕为全称。去掉〔 〕及其中的字为简称。在不引起误解和混淆的情况下可以用简称。

表11-1-2 渐开线圆柱齿轮几何计算常用代号 (GB2821—81)

	代 号	名 称	代 号	名 称
主 代 号	a	中心距, 标准中心距	v	线速度, 分度圆上的线速度
	b	齿宽	W	公法线长度
	c	顶隙	x	〔径向〕变位系数
	C	节点	y	中心距变动系数
	d	直径, 分度圆直径	z	齿数
	e	槽宽, 分度圆槽宽	α	压力角, 齿形角, 分度圆压力角
	h	齿高, 全齿高	β	螺旋角, 分度圆螺旋角
	i	传动比	γ	导程角
	j	侧隙	ε	重合度
	k	跨越齿数, 跨越槽数(用于内齿轮)	η	槽宽半角, 分度圆槽宽半角, 滑动率
	m	模数	ν	齿顶高变动系数
	M	量柱测量距, 量球测量距	ρ	曲率半径
	n	转数	τ	齿距角
	p	齿距, 分度圆齿距	φ	作用角
	P	径节	ψ	齿厚半角, 几何压力系数
	r	半径, 分度圆半径	ω	角速度
	s	齿厚, 分度圆齿厚	Σ	轴交角
	u	齿数比		
下 角 标	a	齿顶的, 齿顶高的	r	径的, 径向的
	b	基圆的, 基圆柱的	t	切向的, 端面上的
	c	常值的, 固定弦的	u	当量圆柱齿轮上的
	f	齿根的, 齿根高的	x	轴的, 轴向的
	k	跨齿数的, 跨槽数的	y	任意点的, 任意圆柱面上的
	n	法向的, 法面上的	z	齿数的, 螺旋线的
	0	刀具的	α	端面重合的, 压力角的, 齿高方向的
	1	小齿轮的	β	纵向重合的, 螺旋角的, 齿长方向的
	2	大齿轮的, 内齿轮的	γ	总重合的
	Σ	总和的		
其它 标记	'(一撇)	工作的, 啮合的, 节圆的 (标注在主代号的右上角)	"(二撇)	测绘的, 双面啮合的 (标注在主代号的右上角)
	* (星号)	尺寸系数(尺寸与模数的比值) (标注在主代号的右上角)	—(横线)	弦的 (标注在主代号的正上方)
复合 代号	a'	角变位中心距	d'	节圆直径
	a_g'	切齿中心距	d_a	齿顶圆直径
	c^*	顶隙系数	d_{a0}	插齿刀齿顶圆直径

(续)

	代 号	名 称	代 号	名 称
复 合 代 号	Δd_{a2}	内齿轮齿顶圆直径加大值	W_k	跨 k 齿的公法线长度
	d_b	基圆直径	W^*	$m = 1$ 时的公法线长度
	d_f	齿根圆直径	x_n	法向变位系数
	d_M	量柱直径, 量球直径(实际选用值)	x_l	端面变位系数
	d_w	量柱直径, 量球直径(计算值)	x_z	总变位模数
	d_0	插齿刀分度圆直径	x_Σ	总变位系数
	g_a	啮合线长度	$x_{\max}$	齿顶变尖最大变位系数
	h_a	齿顶高	$x_{\min}$	避免根切最小变位系数
	$\bar{h}_a$	弦齿高	x_0	插齿刀变位系数
	h_a^*	齿顶高系数	$\gamma(y_l)$	中心距变动系数
	h_{a0}	刀具齿顶高	$\gamma(v_l)$	齿顶高变动系数
	Δh_{a2}^*	内齿轮齿顶高减低系数	y_z	中心距变动模数
	$\bar{h}_c$	固定弦齿高	$z_{\max}$	最多齿数
	h_f	齿根高	$z_{\min}$	最少齿数
	i_0	插齿时的传动比	z_v	当量齿数
	$\text{inv } \alpha$	α 的渐开线函数	z_Σ	齿数和
	j_n	法向侧隙	z_0	插齿刀齿数
	j_t	圆周侧隙	$z_{0\min}$	插齿刀最少齿数
	m_n	法向模数	α'	啮合角
	m_t	端面模数	α_s	齿顶圆压力角
	p_b	基节	α_{a0}	插齿刀齿顶圆压力角
	p_{bn}	法向基节	α_{at}	端面齿顶圆压力角
	p_{bt}	端面基节	α_M	量柱(或量球)中心所在圆的压力角
	p_n	法向齿距	α_n	法向压力角
	p_t	端面齿距	α_n'	法向啮合角
	p_x	轴向齿距	α_t	端面压力角
	p_z	导程	α_t'	端面啮合角
	r'	节圆半径	α_0	插齿刀压力角
	r_a	齿顶圆半径	$\alpha_0'(a'_0)$	切齿时啮合角
	r_b	基圆半径	β'	节圆螺旋角
	r_f	齿根圆半径	β_a	齿顶圆螺旋角
	r_0	插齿刀分度圆半径	β_b	基圆螺旋角
	$\bar{s}$	弦齿厚	ε_α	端面重合度
	s_a	齿顶厚	ε_β	纵向重合度
	s_a^*	齿顶厚系数	ε_γ	总重合度
	s_b	基圆[弧]齿厚	$\eta_{\max}$	齿根最大滑动率
	$\bar{s}_c$	固定弦齿厚		

第 2 节 渐开线圆柱齿轮 的基本知识

(一) 渐开线的特性

(1) 发生线沿基圆滚过的长度等于基圆上被滚过的圆弧长度, $\widehat{b_1c_1} = \widehat{ac_1}$ (图11-2-1);

(2) 渐开线上任意一点的法线必与其基圆相

切, 反之, 基圆上的切线必为渐开线上某点的法线;

(3) 渐开线上各点的曲率半径 ρ 是不同的, 越接近基圆的渐开线, 其曲率半径越小。图11-2-1中, 点 b_1 和 b_2 的曲率半径分别为 $\rho_1 = r_b \tan \alpha_1$ 和 $\rho_2 = r_b \tan \alpha_2$, 因为 $\alpha_1 > \alpha_2$, 所以 $\rho_1 > \rho_2$;

(4) 渐开线的形状取决于其基圆的大小, 基圆半径相等, 则渐开线的形状完全相同, 基圆越大, 渐开线越平直, 当基圆半径无穷大时, 渐开线就成为直线 (图11-2-2);

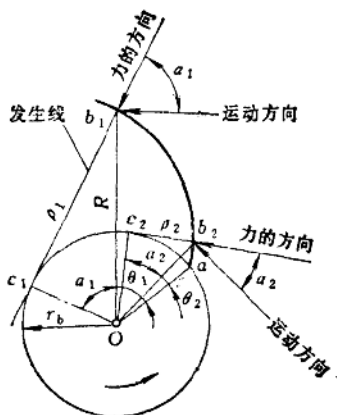


图11-2-1 渐开线的特性图之一

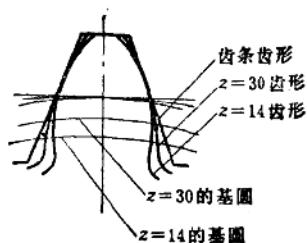


图11-2-2 渐开线的特性图之二

(5) 同一基圆生成的两条同向的渐开线，彼

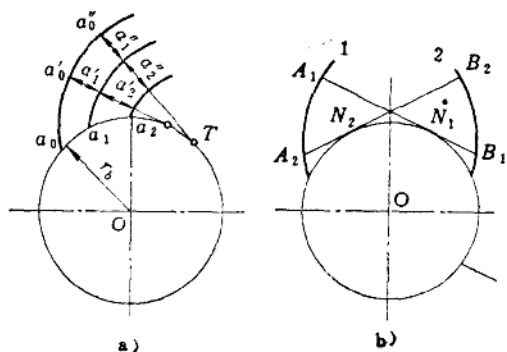


图11-2-3 渐开线的特性图之三

此间法线距离相等，并等于两渐开线起始点的基圆弧长（图 11-2-3 a）， $a'_1 = a_0a_1$ ， $a'_2 = a_1a_2$ ；

(6) 同一基圆生成的任意两条反向的渐开线，其公法线长度处处相等， $A_1B_1 = A_2B_2$ （图 11-2-3 b）；

(7) 基圆内无渐开线；

(8) 渐开线上各点的压力角是不相等的，越接近基圆，压力角越小，图 11-2-1 中的 $\alpha_2 < \alpha_1$ ，基圆上的压力角等于零，即 $\alpha_0 = 0$ 。

渐开线的极坐标方程为（图 11-2-1），

$$R = \frac{r_b}{\cos \alpha}$$

$$\theta = \text{inv } \alpha = \text{tg } \alpha - \alpha$$

式中 R ——渐开线上任意点的向径；

r_b ——基圆半径；

θ ——渐开线上任意点的渐开角，也称为压力角 α 的渐开线函数；

α ——压力角，最后一项 α 按弧度 (rad) 计。

(二) 渐开线齿廓啮合传动的特点

(1) 传动比恒定不变；

(2) 中心距的变动不影响传动比，即中心距的可分离性；

(3) 两齿轮在节点处啮合时，齿面间的相对滑动速度为零，啮合点离节点愈远，齿面间的相对滑动速度也愈大，从而加速了齿面的磨损，使齿轮发热，对传动平稳性和传动效率都不利；

(4) 外啮合齿轮传动是凸齿面对凸齿面的啮合传动，从接触强度看，承载能力较差；

(5) 用范成法（如滚齿或插齿等）加工标准齿轮（ $x = 0$ ）时，如果齿轮的齿数 $z < z_{\min}$ 时，齿形将发生根切（ $z_{\min}$ 见表 11-2-1~11-2-4）。

(6) 一对啮合的标准直齿轮，小轮的齿根厚度比大轮的薄，如果两轮采用相同的材料和相同的热处理工艺，则小轮齿根的弯曲强度较低；

(7) 标准直齿轮齿根的滑动率大于齿顶的滑动率，而小轮齿根的滑动率又大于大轮齿根的滑动率，因此用同样材料制成的一对齿轮，小轮齿根的齿面磨损较快；

(8) 啮合线是过节点的直线；

(9) 能与直线齿廓的齿条啮合；

(10) 可进行变位及各种修形、修缘，以适应提高传动质量的要求。

表11-2-4 用插齿刀 ($x_0=0$) 加工标准直齿轮 ($x=0$) 不产生根切的最少齿数 $z_{\min}$
($\alpha=20^\circ$, $h_a^*=1$)

插齿刀齿数 z_0	12~16	17~22	24~30	31~38	40~60	68~100
插齿刀齿顶高系数 h_{a0}^*	1.3	1.3	1.3	1.25	1.25	1.25
最少齿数 $z_{\min}$	16	17	18	18	19	20
计算公式	$z_{\min} = \sqrt{z_0^2 + \frac{4h_{a0}^*}{\sin^2 \alpha} (z_0 + h_{a0}^*)} - z_0$					

注：表中 $z_{\min}$ 数值是按 $\alpha_0=20^\circ$, $x_0=0$ 算出的。若刀具变位系数 $x_0>0$, $z_{\min}$ 将略小于表中值；若 $x_0<0$, $z_{\min}$ 将略大于表中值。此时 ($x \approx 0$) $z_{\min}$ 的计算式为 $z_{\min} = \frac{\sqrt{(z_0 + 2h_{a0}^* + 2x_0)^2 - (z_0 \cos \alpha)^2}}{\cos \alpha \tan \alpha'_0} - z_0$, 式中 α'_0 见表 11-5-7 表注。

(三) 斜齿轮传动的特点

斜齿轮传动是在相互平行的两轴间进行，所以它的正确啮合条件是：两齿轮的法向基节相等 ($P_{bn1}=P_{bn2}$) 和两齿轮的分度圆螺旋角相等 ($\beta_1=\beta_2$)，螺旋方向相反。

斜齿轮的齿面和分度圆柱的交线是一条螺旋线，在垂直于轮齿螺旋线方向的法面上，其齿形与端面上的齿形是不同的。在端面上，斜齿轮具有渐开线齿形，而在法面上不是渐开线齿形。

用齿轮滚刀加工斜齿轮时，在被加工齿轮的法向截面上应具有与刀具相同的参数 (如 m_n 和 α_n)。但斜齿轮的端面齿形是渐开线齿形，其几何尺寸是按端面参数计算的。因此必须分清法向参数和端面

参数的关系。例如 $m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}$, $\tan \alpha_t = \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta}$, $p_t = \frac{p_n}{\cos \beta}$, $h_{at}^* = h_{an}^* \cos \beta$, $c_t^* = c_n^* \cos \beta$, $h_{an}^* m_n = h_{at}^* m_t$, $c_n^* m_n = c_t^* m_t$, $p_{bt} = \frac{p_{bn}}{\cos \beta_b}$, $p_{bt} = \pi m_t \cos \alpha_t$, $p_{bn} = \pi m_n \cos \alpha_n$, $s_t = s_n / \cos \beta$, $s_{bt} = s_{bn} / \cos \beta_b$ 等。

斜齿轮端面上的几何尺寸可利用直齿轮的有关公式来计算，但均须用端面参数代入。在计算分度圆弦齿厚、公法线长度时，公式中的齿数 z 不是按实际齿数，而是用当量齿数 z_v 代入，即：

$$z_v = \frac{z}{\cos \beta \cos^2 \beta_b} \approx \frac{z}{\cos^3 \beta}$$

斜齿轮的螺旋线导程 P_z 与螺旋角 β 的关系如下：

$$P_z = \frac{\pi d}{\tan \beta}$$

同一斜齿轮，其齿面上各点的导程是相等的，由于齿顶圆柱、分度圆柱和基圆柱的直径不同，所以各圆柱的螺旋角 (分别为 β_a , β , β_b) 也是不同的，它们之间的关系如下：

$$\tan \beta_a = \frac{d_a}{d} \tan \beta$$

$$\tan \beta_b = \frac{d_b}{d} \tan \beta = \cos \alpha_t \tan \beta$$

斜齿轮在啮合传动过程中，由于轮齿呈螺旋形，在啮合区内齿面上的接触线是斜线 (图 11-2-4)，其总长度要比直齿轮的长，因此齿面上的单位压力较小，其同时参加啮合的齿数也比直齿轮多，所以斜齿轮比直齿轮的承载能力要大。

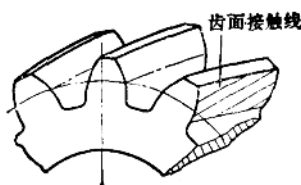


图 11-2-4 斜齿轮齿面接触线

斜齿轮不发生根切的最少齿数 $z_{\min}$ 比直齿轮少 (表 11-2-2)，传动平稳性也比直齿轮好，但在啮合传动时将产生轴向力，其大小将随螺旋角的增加而增大。

斜齿轮的压力角和螺旋角之间的关系列于表 11-2-5。

表11-2-5 斜齿轮的压力角与螺旋角的关系^{〔11〕}

压 力 角		螺 旋 角	
端 面	法 向	分 度 圆	基 圆
$\sin \alpha_t = \frac{\sin \alpha_n}{\cos \beta_b}$	$\sin \alpha_n = \sin \alpha_t \cos \beta_b$	$\sin \beta = \frac{\sin \beta_b}{\cos \alpha_n}$	$\sin \beta_b = \sin \beta \cos \alpha_n$
$\cos \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \beta_b}{\operatorname{tg} \beta}$	$\cos \alpha_n = \frac{\sin \beta_b}{\sin \beta}$	$\cos \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\operatorname{tg} \alpha_t}$	$\cos \beta_b = \frac{\sin \alpha_n}{\sin \alpha_t}$
$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta}$	$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_t \cos \beta$	$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta_b}{\cos \alpha_t}$	$\operatorname{tg} \beta_b = \operatorname{tg} \beta \cos \alpha_t$
$\frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_n} = \frac{\cos \beta}{\cos \beta_b}$	$\frac{\sin \alpha_t}{\sin 2 \alpha_n} = \frac{\sin \beta}{\sin 2 \beta_b}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha_t}{\sin \alpha_n} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \beta_b}$	$\frac{\sin \alpha_t}{\operatorname{tg} \alpha_n} \cdot \frac{\sin \beta}{\operatorname{tg} \beta_b} = 1$
$\operatorname{tg} \alpha'_n = \operatorname{tg} \alpha'_t \cos \beta'$		$\cos \alpha'_t = \frac{a}{a'} \cos \alpha_t = \frac{d}{d'} \cos \alpha_t$	$\operatorname{tg} \beta' = \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha'_t} \operatorname{tg} \beta$

式中 α_t ——端面压力角， β_b ——基圆螺旋角，
 α_n ——法向压力角， β' ——节圆螺旋角，
 α'_t ——端面啮合角， a ——标准中心距，
 α'_n ——法向啮合角， a' ——角变位中心距
 β ——螺旋角，

（四）内齿轮传动的特点

内齿轮的齿厚相当于外齿轮的齿槽宽，而其齿槽宽则相当于外齿轮的齿厚。内齿轮啮合传动时，两轮的齿面是凹、凸齿接触，其接触强度比外啮合高。

内齿轮的齿顶圆和齿根圆位置与外齿轮恰恰相反，其齿顶圆小于齿根圆。

内齿轮的齿顶圆必须大于基圆，否则，由于基

表11-2-6 标准内齿轮（ $x = 0$ ）的最少齿数 $z_{\min}$

h_a^* α	1	0.8
20°	34	27
15°	59	47
14 1/2°	63	51
计算公式	$z_{\min} \geq \frac{2h_a^*}{1 - \cos \alpha}$	

圆内无渐开线，将使齿顶高部分有一段为非渐开线，并产生啮合干涉，从而不能保证正确的啮合传动。基于这个原因，标准内齿轮的最少齿数 $z_{\min}$ 如表11-2-6所列。

内齿轮传动时，其小齿轮放在内齿轮里面，两轮的中心 O_1 、 O_2 都在啮合节点的同一侧（图11-1-3），其标准中心距为

$$a = \frac{m}{2}(z_2 - z_1)$$

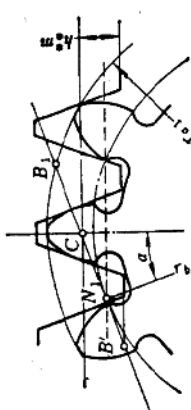
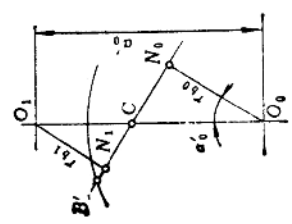
内齿轮传动的正确啮合条件除了 $p_{b1} = p_{b2}$ 外，还要求 $\epsilon_s > 1$ 。为此，两轮的基圆必须相交（图11-1-3），只有这样才能使两基圆有公切线——啮合线，保证啮合角 $\alpha' > 0$ 。否则，如果两轮的基圆相切于一点，则 $\alpha' = 0$ ；如果小轮基圆在内齿轮基圆以内，则两轮无内公切线，即无啮合线，从而不能进行正确啮合。当两啮合齿轮的齿数差很小时就容易产生上述情况。

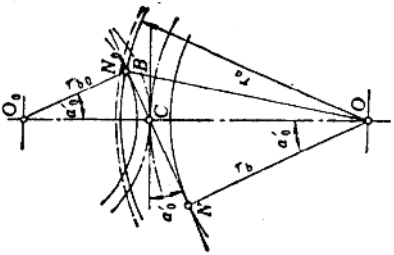
内齿轮传动时，两齿轮的旋转方向相同，与外啮合传动相比，其相对角速度较小，齿面间的相对滑动速度也较小，所以内啮合齿轮传动的齿面磨损也较少。

内齿轮无根切。

用插齿刀加工的内齿轮，其全齿高或齿根高有

(续)

名称	图	例	说	明	不产生干涉的条件	防止干涉的措施
根			用范成法切制齿数较少的齿轮时，刀具顶部切去轮齿齿根的一部分渐开线的现象称为根切。其根本原因在干切齿时，刀具的齿顶线（或齿顶圆）与啮合线的交点B'超出了齿轮基圆与啮合线的切点N1	用齿条刀具切齿时： $x_{min} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha}$ (见表11-2-1) 用插齿刀切齿时： $x_{min} = \sqrt{z_0^2 + \frac{4h_{a0}^*}{\sin^2 \alpha} (z_0 + h_{a0}^*)} - z_0$ (见表11-2-4)	防止干涉的措施	
切						

顶 切		用插齿刀加工时, 如轮坯的齿顶圆超过了啮合线与插齿刀基圆的切点 N_0 (如图中虚线所示), 则齿轮齿顶处的部分渐开线将被切去	用插齿刀加工标准齿轮不顶切的最多值数, $z_{max} = \frac{z_2^2 \sin^2 \alpha - 4h_a^{*2}}{4h_a^* - 2z_0 \sin^2 \alpha}$ (见表11-2-9)	1. 减小齿顶高系数 2. 正变位修正 3. 增加插齿刀的齿数
--------	---	---	---	---------------------------------------

① 齿渐开线起始点的压力角 α_B'

齿条刀具加工时(见表11-2-13图c, 但 B_2 改为 B_1' , α_{B2} 改为 α_{B1}');

$$\operatorname{tg} \alpha_{B1}' = \operatorname{tg} \alpha - \frac{4(h_a^* - x)}{z \sin 2\alpha}$$

齿轮插刀切齿时(见本表图, 但 B_2 改为 B_1' , α_{B2} 改为 α_{B1}' , α_{B2} 改为 α_{B0} , α' 改为 α_0');

$$\operatorname{tg} \alpha_{B1}' = \frac{1}{z} [(z + z_0) \operatorname{tg} \alpha_0' - z_0 \operatorname{tg} \alpha_0]$$

齿条工作段起始点的压力角 α_{B2} (见本表图)

对小齿轮,

$$\operatorname{tg} \alpha_{B2} = \operatorname{tg} \alpha' - \frac{z_2}{z_1} (\operatorname{tg} \alpha_{B2} - \operatorname{tg} \alpha')$$

对大齿轮,

$$\operatorname{tg} \alpha_{B1} = \operatorname{tg} \alpha' - \frac{z_1}{z_2} (\operatorname{tg} \alpha_{B1} - \operatorname{tg} \alpha')$$

时会出现小于标准值的现象。这是因为只有当插齿刀的变位系数 x_0 与被加工的内齿轮变位系数 x_2 相等(即 $x_2 - x_0 = 0$)时才能切出标准的齿高值。若 $x_2 \neq x_0$ 时,则切出的内齿轮全齿高或齿根高将比标准值小(见表11-5-10实例计算)。当 x_2 为正值,而 x_0 为负值时,全齿高或齿根高减小量较大,甚至不能保证正常的啮合传动。内齿轮的齿高是由插齿刀的齿顶圆直径 d_{a0} 和切齿时的中心距 a_0' 所决定的,所以内齿轮不能采用齿条型刀具加工齿轮的公式来计算齿高。

标准内齿轮和高变位内齿轮传动,为了避免过渡曲线干涉(见表11-2-8),内齿轮的齿顶圆直径应加大:

$$\Delta d_{a2} = \frac{2 h_a^* m}{z_2 \lg^2 \alpha}$$

(五) 用插齿刀加工圆柱齿轮的几何特点

与用齿条型刀具相比,用插齿刀加工圆柱齿轮有以下的特点:

(1) 用插齿刀可以切制齿数较少的齿轮而不发生根切(见表11-2-1、11-2-3)。

(2) 用插齿刀切制的齿轮,齿根圆直径 d_f 随插齿刀的齿数 z_0 及其变位系数 x_0 的大小与重磨次数的多少而变化,即 $d_f = 2a_0' \mp d_{a0}$ 。其中 a_0' 为切齿时插齿刀与被加工齿轮的中心距,其计算公式见表11-5-7、11-5-13, d_{a0} 为插齿刀的齿顶圆直径。大

多数情况下,齿轮齿根圆直径比用齿条型刀具加工同样尺寸齿轮的齿根圆直径要小。

(3) 用插齿刀加工变位齿轮时,齿顶高变动系数 ν 值与用齿条型刀具加工时的 ν 值不同。在用齿条型刀具加工的齿轮副中,不论正变位或负变位,其 ν 均为正值,而且两啮合齿轮的 ν 值相等;而在用插齿刀加工的齿轮副中, ν 有时为正值,有时为负值或为零值。而且如果相啮合的两齿轮不是用同一把插齿刀加工时,则由于它们的 x_0 不同,其 ν 值也就可能不同。

(4) 因上所述,用插齿刀加工的齿轮副的啮合顶隙不一定为标准值,顶隙的大小将随刀具刃磨后所得不同的 x_0 值而变化。只有当所使用的插齿刀的齿顶圆直径 d_{a0} 和刀具变位系数 x_0 与齿轮设计计算中所采用的数值相一致时,才能得到标准顶隙值 $c^* m$ 。

(5) 用插齿刀加工齿轮,容易产生刀具齿根的非渐开线部分切去齿轮齿顶的顶切现象。

(6) 用插齿刀可以切制较大变位系数的外齿轮。而用齿条型刀具切削变位系数大的齿轮时,由于齿根过渡曲线与渐开线的连接点迅速移向齿顶,以致渐开线部分无法完全形成。

(六) 圆柱齿轮的传动干涉与切削加工时的根切和顶切

圆柱齿轮的传动干涉与切削加工时的根切和顶切如表11-2-7、11-2-8所示。

表11-2-8 内齿轮副的传动干涉和顶切

名称	图 例	说 明	不产生干涉的条件	防止干涉的措施
过渡曲线干涉(或渐开线干涉)		当小(内)齿轮的齿顶与内(小)齿轮的齿根过渡曲线相接触时,便引起过渡曲线干涉。标准内齿轮副($x_1 = x_2 = 0$)容易产生这种干涉	对内齿轮: $R_{C2} \geq R_{B1}$, 即: $z_0 \lg a_{a02} + (z_2 - z_0) \lg a_0' \geq z_1 \lg a_{a1} + (z_2 - z_1) \lg a'$ 对小齿轮: $R_{B2} \geq R_{C1}$, 即: 用齿条刀具加工时 $z_2 \lg a_{a2} - (z_2 - z_1) \lg a' \geq z_1 \lg a - \frac{4(h_a^* - x_1)}{\sin 2\alpha}$ 用齿轮插刀加工时 $z_2 \lg a_{a2} - (z_2 - z_1) \lg a' \geq (z_1 + z_0) \lg a_{a01} - z_0 \lg a_{a01}$	1. 加大内齿轮的变位系数 x_2 , 同时略增小齿轮的变位系数 x_1 2. 加大内齿轮的齿顶圆直径, 加大量为: $\Delta d_{a2} = \frac{2(h_a^* - x_2)^2 m}{z_2 \lg^2 \alpha}$

名称	图 例	说 明	不产生干涉的条件	防止干涉的措施
齿廓重叠干涉		小齿轮轮齿结束啮合退出内齿轮齿槽时,小轮齿顶与内齿轮齿顶相互重叠称为齿廓重叠干涉。齿数差$(z_2 - z_1)$越小,越容易产生这种干涉。$(z_2 - z_1) > 10$时不会产生这种干涉	$(z_2 - z_1) \operatorname{inv} \alpha' + z_1 (\operatorname{inv} \alpha_{a1} + \delta_1) - z_2 (\operatorname{inv} \alpha_{a2} + \delta_2) \geq 0$ 式中 $\cos \delta_1 = \frac{d_{a2}^2 - 4a'^2 - d_{a1}^2}{4a'd_{a1}}$ $\cos \delta_2 = \frac{d_{a2}^2 + 4a'^2 - d_{a1}^2}{4a'd_{a2}}$ 或 $(z_2 - z_1) > (z_2 - z_1)_{\min}$ $(z_2 - z_1)_{\min}$ 见表 11-2-10	1. 加大齿数差$(z_2 - z_1)$ 2. 增大啮合角 3. 减小齿顶高 4. 加大x_2
内齿轮齿顶非渐开线干涉		内齿轮齿数z_2太少,以致于其基圆大于齿顶圆,使齿顶上存在一部分非渐开线齿廓,这种齿轮与小齿轮啮合时就会发生这种干涉	$d_{a2} \geq d_{b2}$ 或 $z_2 \geq \frac{2(h_a^* - x_2)}{1 - \cos \alpha} \quad (\text{当 } \Delta h_{a2}^* = 0 \text{ 时})$ 对于标准内齿轮 $\alpha = 20^\circ, h_a^* = 1, z_2 \geq 34$ $\alpha = 20^\circ, h_a^* = 0.8, z_2 \geq 27$ (见表 11-2-6)	1. 增加内齿轮齿数z_2
范成顶切		加工内齿轮时,若内齿轮齿顶圆超过啮合线与插齿刀基圆的切点N_0时,内齿轮齿顶处一部分渐开线被切去,称为范成顶切	$N_2 K \geq N_2 N_0, \text{ 即, } \frac{z_{02}}{z_2} \geq 1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha_{a2}}{\operatorname{tg} \alpha'_{02}}$	1. 加大啮合角 2. 增加x_2 3. 插齿刀齿数z_0不少于表 11-2-11 中的齿数

(续)

名称	图 例	说 明	不产生干涉的条件	防止干涉的措施
径向进刀顶切		在径向进刀时, 插齿刀齿顶切去内齿轮齿顶的一部分而形成的顶切 齿数差 $(z_2 - z_0)$ 越小越易产生这种顶切 注: $\alpha = 20^\circ$, $h_a^* = 1$, $x = 0$, $(z_2 - z_0) > 16$ 时不会产生这种顶切	$L_2 - L_0 \geq 0$ $L_2 = r_{a2} \sqrt{1 - \frac{u_{02}^2 - \left(\frac{r_{a02}}{r_{a2}} u_{02}\right)^2}{u_{02}^2 - 1}}$ $L_0 = r_{a02} \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{r_{a2}}{r_{a02}}\right)^2 - 1}{u_{02}^2 - 1}}$ 式中, $u_{02} = \frac{z_2}{z_0}$ 或按表 11-2-12 选用有关参数可免顶切	1. 加大内齿轮和插齿刀的齿数差 2. 增大齿形角 3. 减小齿顶高 4. 加大内齿轮的变位系数

注: 干涉、顶切的验算实例见表11-5-13。

表11-2-9 插齿刀 ($x_0 = 0$) 加工直齿轮 ($\alpha = 20^\circ$, $h_a^* = 1$, $x = 0$) 不产生顶切的 $z_{\max}$ ⁽¹³⁾

z_0	10	11	12	13	14	15	100	17
$z_{\max}$	5	7	11	16	26	44	10	∞
计算公式	$z_{\max} = \frac{z_0^2 \sin^2 \alpha - 4h_a^{*2}}{4h_a^* - 2z_0 \sin^2 \alpha}$							

表11-2-10 标准内齿轮 ($\alpha = 20^\circ$, $h_a^* = 1$, $x = 0$) 不发生重叠干涉的 $(z_2 - z_1)_{\min}$ ⁽¹³⁾

z_2		22~32	33~200	34~77	78~200
$(z_2 - z_1)_{\min}$	$d_{a2} = d_2 - 2m_n$	—	—	9	8
	$d_{a2} = d_2 - 2m_n + \frac{15.1m_n \cos^3 \beta}{z_2}$	7	8	—	—

表11-2-11 标准内齿轮 ($\alpha = 20^\circ$, $h_a^* = 1$, $x_2 = x_0 = 0$) 不产生范成顶切的 $z_{0\min}$ ⁽¹³⁾

内齿轮齿数 z_2		22	23	26	27	34	35	36	37	38	40	45	50	55	60	70	90	150	200
$z_{0\min}$	$h_a^* = 1$					29	28	27	26	25	24	23	22	21	21	20	19	19	18
	$h_a^* = 0.8$				24	19	18	18	18	18	18	17	17	16	16	16	15	15	15
	$h_a^* = 1 - \frac{7.55}{z_2}$	20	19	19															

注: 1. 加工正变位内齿轮时, $z_{0\min}$ 可以小于表中的相应值。

2. 标准内齿轮的齿顶高减小量为 $\Delta h_{a2} = \frac{h_a^{*2} m}{z_2 \lg^2 \alpha}$ ($\alpha = 20^\circ$, $\Delta h_{a2} = \frac{15.1 m}{2z_2}$) 时, 则不论 z_2 多大, 只要 z_0 大于18就可避免范成顶切。

表11-2-12 新直齿插齿刀基本参数和被切制内齿轮不产生径向切入

顶切的最少齿数 z_{2min}

插齿刀种类	插齿刀的基本参数 (mm)						x_{2min}									
	m	z_0	d_0	x_0	d_{a0}	h_{a0}^*	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5	2.0	
							z_{2min}									
盘形直齿插齿刀 (GR70—60 或JB2496—78)	1	76	76	0.630	79.76		115	107	101	96	91	87	84	81	79	
	1.25	60	75	0.587	79.58		96	89	83	78	74	70	67	65	62	
	1.5	50	75	0.503	80.26		83	76	71	66	62	59	57	54	52	
	1.75	43	75.25	0.464	81.24		74	68	62	58	54	51	49	47	45	
	2	38	76	0.420	82.68	1.25	68	61	56	52	49	46	44	42	40	
	2.25	34	76.5	0.261	83.30		59	54	49	45	43	40	39	37	36	
	2.5	30	75	0.230	82.41		54	49	44	41	38	34	34	33	31	
碗形直齿插齿刀 (GR72—60 或JB2496—78)	2.75	28	77	0.224	85.37		52	47	42	39	36	34	33	31	30	
	3	25	75	0.167	83.81		48	43	38	35	33	31	29	28	26	
	3.25	24	78	0.145	87.42	1.30	46	41	37	34	31	29	28	27	25	
	3.5	22	77	0.126	86.98		44	39	35	31	29	27	26	25	23	
	3.75	20	75	0.105	85.55		41	36	32	29	27	25	24	22	21	
盘形直齿插齿刀 (GR70—60 或JB2496—78)	4	19	76	0.105	87.24	1.30	40	35	31	28	26	24	23	21	20	
	4.25	18	76.5	0.107	88.46		39	34	30	27	25	23	22	20	19	
	4.5	17	76.5	0.104	89.15		38	33	29	26	24	22	21	19	18	
	1	100	100	1.060	104.6		156	147	139	132	125	118	114	110	105	
	1.25	80	100	0.842	105.22		126	118	111	105	99	94	91	87	83	
盘形直齿插齿刀 (GR71—60 或JB2496—78)	1.5	68	102	0.736	107.96		110	102	95	89	85	80	77	74	71	
	1.75	58	101.5	0.661	108.19	1.25	96	89	83	77	73	69	66	63	61	
	2	50	100	0.578	107.31		85	78	72	67	63	60	57	55	52	
	2.25	45	101.25	0.528	109.29		78	71	66	61	57	54	52	49	47	
	2.5	40	100	0.442	108.46		70	64	59	54	51	48	46	44	42	
	2.75	36	99	0.401	108.36		65	58	53	49	47	44	42	40	38	
	3	34	102	0.337	111.28		60	54	50	46	44	41	39	37	35	
	3.25	31	100.75	0.275	110.99		56	50	46	42	40	37	36	34	33	
	3.5	28	98	0.231	108.72		54	46	42	39	37	34	33	31	30	
	3.75	27	101.25	0.180	112.34		49	44	40	37	35	33	31	30	28	
	4	25	100	0.168	111.74	1.30	47	42	38	35	33	31	29	28	26	
	4.5	22	99	0.105	111.65		42	38	34	31	29	27	26	24	23	
	5	20	100	0.105	114.05		40	36	32	29	27	25	24	22	21	
	5.5	19	104.5	0.105	119.96		39	35	31	28	26	24	23	21	20	
	6	17	102	0.105	118.86		37	33	29	26	24	22	21	20	18	
	6.5	16	104	0.105	122.27		36	32	28	25	23	21	20	18	17	
	锥柄直齿插齿刀 (GR75—60 或JB2496—78)	1.25	20	25	0.106	28.39		40	35	32	29	26	25	24	22	21
		1.5	18	27	0.103	31.06		38	33	30	27	24	23	22	20	19
1.75		15	26.25	0.104	30.99		35	30	26	23	21	20	19	17	16	
2		13	26	0.085	31.34	1.25	34	29	24	21	19	17	17	15	14	
2.25		12	27	0.083	33.0		32	27	23	20	18	16	16	14	13	
2.5		10	25	0.042	31.46		30	25	21	18	16	14	14	12	11	
	2.75	10	27.5	0.037	34.58		30	25	21	18	16	14	14	12	11	

注：表中数值按新插齿刀和内齿轮齿顶圆直径 $d_{a2} = d_2 - 2m(h_a^* - x_2)$ 计算而得，若用旧插齿刀或内齿轮齿顶圆直径加大 $\Delta d_{a2} = \frac{15.1m}{z_2}$ 时，则更加安全。