现代应用数学丛书

微分方程的近似解法

〔日〕加藤敏夫 藤田宏 橋本英典 中田義元 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

微分方程的近似解法

〔日〕加藤敏夫 藤田宏 橋本英典 中田義元 著

張毓椿 王占瀛 刘宝田 譯

蔣尔雄 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本，主要介紹近似地解微分方程的各种方法。全书可分为三部分。第一部分是一般的古典的近似解法，第二部分介紹由差分方程来作近似計算，第三部分研究摄动法及漸近展开有关的問題。

本书介紹的近似解法种类很多，对每一种方法都有具体例子加以說明，并适当地指出了一些理論依据。可供工程技术人員，数学工作者特别是計算数学工作者参考。

原书分三册出版，現合并成一册。

微分方程式の近似解法 I. II. III.

〔日〕加藤敏夫 藤田宏 橋本英典 中田義元

岩波书店 1958

現代应用数学丛书

微分方程的近似解法

张毓椿 王[illegible] [illegible]田[illegible] 蒋尔雄 校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海大东集成联合印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32　印張 8 16/32　排版字数 200,000

1964 年 5 月第 1 版　1964 年 5 月第 1 次印刷　印数 1—4,000

統一书号 13119·557　定价（十四）1.45 元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

书名	原作者	譯者	书名	原作者	譯者
代数学	弥永昌吉等	熊全淹	非綫性振动論	古屋茂	吕紹明
几何学	矢野健太郎	孙澤瀛	力学系与映射理論	岩田义一	孙澤瀛
复变函数論	功力金二郎	刘书琴	平面彈性論	森口繁一	刘亦珩
集合·拓扑·测度	河田敬义	賴英华	有限变位彈性論 变形几何学	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
泛函分析	吉田耕作	程其襄	塑性論	鷲津久一郎	刘亦珩
广义函数	岩村联	楊永芳	粘性流体理論	谷一郎	刘亦珩
常微分方程	福原滿洲雄	張庆芳	可压縮流体理論	河村龙馬	刘亦珩
偏微分方程	南云道夫	錢端壮	网絡理論	喜安善市等	陆志剛
特殊函数	小谷正雄等	錢端壮	自动控制理論	喜安善市等	翟立林
差分方程	福田武雄	穆鴻基	网絡拓扑学	近藤一夫	張設
富里哀变换与拉普拉斯变换	河田龙夫	錢端壮	信息論	喜安善市等	李文清
变分法及其应用	加藤敏夫	周怀生	推断統計过程論*	北川敏男	刘璋温
李群論	岩堀长庆	孙澤瀛	統計分析	森口繁一	刘璋温
随机过程	伊藤清	刘璋温	試驗設計法	增山元三郎	刘璋温
回轉群与对称群的应用	山内恭彦等	張质賢	群体遺傳学的数学理論	木村資生	刘祖洞
結晶統計与代数	伏見康治	孙澤瀛	博奕論	宮澤光一	張毓椿
偏微分方程的应用*	犬井鉄郎等	楊永芳	綫性規划	森口繁一	刘源張
微分方程的近似解法*	加藤敏夫等	王占瀛	經济理論中的数学方法	安井琢磨等	談祥柏
数值計算法	森口繁一等	閻昌齡	随机过程的应用	河田龙夫	刘璋温
量子力学中的数学方法	朝永振一郎	周民强	計算技术*	高桥秀俊	姚晋
工程力学系統	近藤一夫等	刘亦珩	穿孔卡計算机*	森口繁一	刘源張

注：本丛书中除注有*者外均已出版，有*者即将于最近出书。

目　录

前　　言

§1 本书的基本精神

如果說，古典的"应用数学"和微分方程的解法具有相同的涵意，基本上是沒有錯誤的。虽然，这种說法因現代应用数学的范圍极为广泛而不够正确了。但是，微分方程在应用数学中仍然占有重要的地位，这一点并沒有絲毫的改变。

微分方程在理論上或应用上都具有悠久的历史，分支又极为广泛，企图編写一部完整的微分方程书稿，必然要众多的人員和大量的篇幅。因此，即使象本丛书这样的一部书，也很难达到这个愿望。幸而关于常微分方程和偏微分方程的基本理論，已經分别有独立的項目，另外以变分法为主的偏微分方程的解法，也单独地进行了探討，所以本书的目的，主要只是闡述近似地解微分方程的各种方法。因而在本书里并沒有完整的方法的理論。只不过是列举了一些一般的方法而已。

本书概括地称为微分方程的近似解法。但实际上，微分方程的种类极为繁多，所用的方法也是千差万別，要想把这些都說出来是不可能的。对于特殊問題，还有适合它的特殊方法，因此，近似方法的一般理論是不存在的。从而在微分方程近似解法的名称下，究竟应包括一些什么內容，亦不很明确。但是，考虑到微分方程經常不能找到正确解，想用完善的理論来解决問題相当困难，因而加入这个項目还是必要的。根据这种情况，本书选擇了特殊性特别少的，比較一般的，具有代表性的近似解法，并尽可能以折衷的态度，在統一的观点下予以說明。希望不要把在这里所提出的方法，当成包括一切近似解的方法。此外，将杂乱地选出的材料加以統一整理，也是件困难的工作，限于著者的能力，因此本书內容显得龐杂，希望讀者諒解。

本书的基本精神，已如上述。关于微分方程的基本知識，希望参考有关书籍。在这里假定讀者已經掌握了一般知識，例如已知偏微分方程大致分为椭圓型、双曲型、抛物型等。

§2 內 容

为了方便起見，将整个內容分为三个部分。

第一部分是比較簡单，而且是古典的近似解法，然而它具有一般性，其中有級数展开法，将微分方程变为积分方程的近似解法，逐次近似法及变分法等。級数展开法在“正确”解法中也常用，但这里是从近似解法的角度来論述的。积分方程的內容不屬于本书的范圍，但是它和微分方程有密切的关系，所以将有关的必要的部分，列入本书中。逐次近似法虽然可直接应用于微分方程，然而普通都是将問題化为积分方程(或与其相当的)，然后再用这个方法。变分法的解法不一定属于古典的近似解法，但为了方便起見，也把它列入这部分中。这种方法在“变分法及其应用”一书中还要涉及到，希望讀者一并閱讀。第一部分主要是由中田義元編写的。

第二部分是用差分方程来近似計算微分方程，从而将問題归結成有限个变数的方程(通常是代数方程)。这个方法本来是最原始的，最近却迅速地发展起来。这是因为虽然它的原理非常簡单，但計算比較麻煩，在計算机器尙不发达的年代里，是不便于应用的。因此，在用笔算的时代里，几乎毫无用处。但从使用手摇計算机以后，它就被逐漸重視起来。然而除特殊情况外，还只限于解常微分方程，而且只在其他方法不能解决时，作为最后手段才使用它。事实上，用这个方法要想求得較好的近似解，必須把差分区間或格子間隔分得越細越好，可是未知数的数目太大时，在計算上就会感到麻煩。

現代由于高速計算机的出現，情况就完全不同了。虽然高速計算机不是万能的，但它能够解含有相当多个未知数的方程，以至能用差分法解偏微分方程。这是一种不拘方程形式的一般的方法。随着計算机的发展，它的应用价値也逐漸增大，所以它是将来最有希望的近似解法。为了有效地利用它，对于在理論上的研究，尤其是在誤差的估計方面，极为重要。由于这种原因，所以在本书中关于用差分法的近似解法，在理論上的探討占的篇幅比較多。所謂这种方法不拘于方程的形式，只是說任何形式的方程都可适用，但不是意味着应用时的具体方法在任何时候都一样。实际上，一种差分格式是否合适，对椭圓型和双曲型方程的判别法，很明显地就完全不同。第二部分由藤田宏执笔。

第三部分是所討論的問題中含有小参数 ε，当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限的解。也就是研究所謂摄动法及漸近展开的有关問題。这类問題在物理和工程学上

經常出現。当解可展开为 ε 的幂級数时称之为摄动法，不能展开时称之为漸近展开，但这种区别并不是絕对的。即或有普通称为摄动法，而实际上只是漸近展开的情况亦很多，按这种意义来說，这里討論的問題本质上是漸近展开理論。在这种类型的理論中，对特殊重要的 WKB 法和 PLK 法討論得比較詳尽。它們在流体力学中有广泛的应用。第三部分主要由橋本英典編写。本书的全部計划，以及各册的分工，是由全体著者共同討論而确定的。

§3 記号和方法

如上所述，虽然本书力求內容上統一，但仍然作得很不够。所使用的方法也是各种各样。由于問題的性质，我們必須較多的借用泛函分析的記号和术語。

使用泛函分析的方法探討微分方程是很自然的，这也是泛函分析的目标之一。对于数学工作者来說是沒有問題的。在本丛书中引入了很多抽象数学的項目，特别是設置了泛函分析項目。因此，对于用本丛书学习应用数学的人来說，不会感到不方便。但是从历史的傳統来看，学应用数学的人，对抽象数学的术語和記号多少有些不感兴趣。因此在和应用关系最密切的本丛书中，有必要对所使用的泛函分析的記号加以說明。著者已經力求尽可能最少地使用抽象的术語和記号，但这也有一定限度。因为如果完全不使用，反而会使表示式冗长，論述不明确，这样做，显然沒有任何好处。所以我們尽量只在必要时，最小限度地使用抽象数学的記号和术語，希望讀者諒解。

以后所使用的主要是术語和記号，并未随便使用抽象数学或泛函分析中的較高深的有关定理。因而只要讀者簡单地复习一下所用到的必要的术語和記号就够了，这样作不会有什么困难。为了讀者方便起見，就本书經常出現的有关函数空間的几个記号加以說明，以帮助讀者进行复习。只要把这里的說明略加閱讀，則对本书內容的理解上，就不会有任何困难。

1) **函数空間**　微分方程或者一般数学分析的中心問題，是研究一个或几个变数(将它們一并写成 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$)的函数 $u(x)$. 对此函数 $u(x)$ 进行微分运算，积分运算或代数运算，并討論其間的关系。但是在泛函分析上将函数 $u(x)$ 看做是点，称为点 u. 所謂点是指某“空間”的点，此空間是同类函数的集合所成的**函数空間**。有各种各样的函数空間，下面举几个例子。

連續函数的全体是一个函数空間。正确地說，是定义在以 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为变数的区域 D 上的連續函数的全体，常以 $C(D)$ 表示。又将在 D

上 m 阶导数連續的函数全体記作 $C^m(D)$ (当 $m=1, 2, \cdots$ 时，記作 $C', C'', \cdots$ 等)，特别当 D 是 $a\leqq x\leqq b$ 时，記作 $C[a, b], \cdots, C^m[a, b]$. 若沒有必要指出定义域时，簡单地記它們为 C, C^m. 因而 $u\in C$ (u 属于 C)和"u 是連續函数"的意义是相同的。譬如 $u\in C^4$ 是指"u 的 4 阶导数連續"。这里虽然只是节約了几个字，但是如果使用的次数很多时，就可以节約很大的篇幅。

2) **距离空間** 引入函数空間的概念，不仅仅是为了节約字数而采用的簡略記法，将普通空間中的几何概念适当地扩張到函数空間中，加以有效地利用，也是我們的意图之一。例如两点的**距离**就是其中之一。对函数空間 C, C^m 等，可适当地定义两点 u, v 的距离。例如 D 为閉区間时，一般在空間 $C(D)$，用

$$\max_{x\in D}|u(x)-v(x)| \tag{3.1}$$

定义两点 u, v 的距离。以后要常常用到这种定义。但是距离概念并不是固定不变的，因而沒有理由必須采用上面的定义。对預先給定的函数 $W(x)>0$ 也可以采用

$$\max_{x\in D}\frac{|u(x)-v(x)|}{W(x)} \tag{3.2}$$

作为距离的定义。以后将經常使用这个定义。有时也采用

$$\left[\int_D |u(x)-v(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

作为距离的定义。总之，根据处理問題的方便，可使用适当的定义。

但是定义距离概念，至少要滿足以下的条件：

(i) 相同点的距离为 0，相异两点的距离为正。

(ii) 两点 u, v 的距离与 v, u 的距离相等。

(iii) 三角形任何二边长度的和不小于第三边的长度。

一般将滿足这些条件的空間称为**距离空間**。容易知道，以上所举的例(3.1)，(3.2)，(3.3)是滿足这些条件的。

再举一个例子。对于空間 $C^1(D)$，可用

$$\max_{x\in D}|u(x)-v(x)|+\max_{x\in D}|u'(x)-v'(x)| \tag{3.4}$$

定义 u, v 的距离。

3) **向量空間，賦范空間** 上面的例子中所提出的距离定义，无論是那一种，都用了函数的差 $u-v$. 一般在函数空間 F 中，若两函数 u, v 属于 F，其綫性結合 $\alpha u+\beta v$ 也属于 F 时，称 F 为**向量空間**或**綫性空間**。此时 F 中的函

数可以看作是向量。上面定义的函数空間 C, C^m 等都是向量空間。

在向量空間 F 中,若定义了向量的"长度"(或者**范数**) $\|u\|$,則称 F 为**賦范空間**。但范数須滿足下面的条件:

(i) $\|u\|\geqq 0$, 且 $\|u\|=0$ 只在 $u=0$ 时成立;

(ii) $\|\alpha u\|=|\alpha|\,\|u\|$;

(iii) $\|u+v\|\leqq\|u\|+\|v\|$.

若 F 为賦范空間,則 F 也可以认为是距离空間,因为可采用 $\|u-v\|$ 作为 F 中两点 u, v 的距离。

在函数空間 C, C^m 等上,所定义的距离(3.1)~(3.4),实际上都是从范数导出的,例如(3.1)的定义,相当于采用

$$\|u\|=\max_{x\in D}|u(x)| \tag{3.5}$$

为范数。在应用上所出現的函数空間,許多都是賦范空間。但是,距离空間并不都是賦范空間,例如在区間 $a\leqq x\leqq b$ 內連續且滿足边界条件 $u(a)=u(b)=1$ 的函数 u 的全体,若用(3.1)定义距离时,則它是距离空間而不是向量空間,因而更不是賦范空間。象这样单是距离空間的空間,u, v 的距离不能表示为 $\|u-v\|$,但在本书中为了方便起見,距离一律用 $\|u-v\|$ 来表示。因而在一般的距离空間中,它仅仅是約定的符号。实际上,在大多数情况下,F 是賦范空間,或者是它的部分集合,所以这样的約定,并不会引起障碍。

4) **收斂、极限** 导出了距离空間 F 的两点 u, v 的距离 $\|u-v\|$ 之后,就可定义关于点列(函数列) u_1, u_2, …收斂的概念。卽若

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|=0 \tag{3.6}$$

时,則称 u_n 收斂于 u, 記作

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u, \quad 或 \quad u_n\to u \quad (n\to\infty). \tag{3.7}$$

此收斂所表示的內容,由于距离定义的不同而有所不同,这一点必須注意。例如用(3.1)定义距离时,(3.7)表示 u_n **一致收斂**于 u, 但是用(3.3)定义距离时,則表示**平方平均收斂**,两者的涵意完全不同。后者并不限定在 x 各点上 $u_n(x)\to u(x)$. 虽然如此,只要根据問題的性质采用适当的距离,对問題的研究并沒有妨碍。实际上,由于可以采用各种不同的距离定义反而方便,以后在本书很多地方将会看到这一点。

5) **算子** 算子是泛函分析的重要概念。例如微分运算 $\dfrac{d}{dx}$, 古典地称为在一点 x 对 $u(x)$ 求微商 $u'(x)$ 的运算,可是在函数空間中,认为是作用于

函数空間的点 u 以产生新的点 u' 的运算。在此意义下称 $\frac{d}{dx}$ 为一个**算子**。同样可定义更复杂的算子。例如用式子

$$p(x)\frac{d^2u}{dx^2}+q(x)\frac{du}{dx}+r(x, u) \tag{3.8}$$

可由一点(函数)作出另一点(函数)。若将(3.8)所表示的函数写成 $L[u]$，则 L 就是一个算子，因而由(3.8)所得的微分方程，可表示为 $L[u]=0$ 的形式。同样，将关于两个变数 x, y 的偏微分方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+r(x, y, u)=f(x, y) \tag{3.9}$$

的左边写成算子的形式，方程可表示为

$$L[u]=f. \tag{3.10}$$

或将上式的 f 移到等号左边，然后将左边写成 $L[u]$，则得 $L[u]=0$，因为这些算子是由微分运算构成的，故称为**微分算子**。算子将函数空間的点 u 对应于另外的点 $v=L[u]$，u 和 v 不一定属于同一个函数空間。一般地，将某函数空間 U 的点 u，对应于另一函数空間 V 的点 $v=L[u]$ 的运算 L 是一个算子。U 称为 L 的**定义域空間**，V 称为**值域空間**。

算子中特別重要的是**綫性算子**，就是在綫性空間 U, V 中，使

$$L[\alpha_1u_1+\alpha_2u_2]=\alpha_1L[u_1]+\alpha_2L[u_2] \tag{3.11}$$

成立的算子 L (其中 α_1, α_2 为定数)。一般(3.8)不是綫性算子，但是若 $r(x, u)=r(x)u$，则成为綫性算子。(3.9)亦然。綫性算子之所以特別重要，是因为在許多具体問題中它能給出第一阶近似。

6) **边界算子**　单独的微分方程是很少出現的。多数情况伴随有边界条件或初始条件。例如(3.9)，在平面某区域 G 除要求滿足(3.9)外，在区域 G 的边界 Γ 上，要滿足边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(s)u=\varphi(s). \tag{3.12}$$

此处 n 为法綫方向，s 是边界 Γ 各点的坐标。将(3.12)写成算子的形式

$$\gamma[u]=\varphi. \tag{3.13}$$

此处的算子 γ 是由定义在 G 上的函数 $u=u(x, y)$ 的边界値，通过 $\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(s)u$ 来确定的，它对应着一个 s 的函数。即算子 γ 的定义域空間 U 是由区域 G 上定义的函数所构成的函数空間，γ 的值域空間 Φ 是定义在 Γ 上的函数所构成的函数空間。在这种意义下，称 γ 算子为**边界算子**。(3.13) 不外乎是使 $\gamma[u]$ 和 Φ 中某一給出的函数 φ 一致的条件。在实际应用中对 U 和 Φ 分别导

入适当的距离，可将它們看作是距离空間。

7) **格子点函数** 所謂函数通常是把它考虑为定义在变数的連續区域上的函数，但也有不是这样的情况。如前所述，函数所述的变域，有的是区域 G，也有的是 G 的边界 Γ，另外有限或无限个孤立点的集合 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 也可以作为定义域。特别是当 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 取自然数 $1, 2, \cdots, n$ 时，函数就成为数列 $\{a_\nu\}$ 的形式了。同时也可以把它认为是 n 維的向量。

現若确定了平面区域 G 上的 n 个点 $P_1=(x_1, y_1)$, $P_2=(x_2, y_2)$, $\cdots$, $P_n=(x_n, y_n)$，考虑定义在 G 上的函数 $u=u(x, y)$ 在 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 各点处的值。$u_1=u(x_1, y_1)$, $u_2=u(x_2, y_2)$, $\cdots$, $u_n=u(x_n, y_n)$，則得到数列 $\{u_\nu\}$. 如按上述的意义看作为"函数"时，則可决定 $u=u(x, y)$ 对应于 $\{u_\nu\}$ 的算子 D. D 的定义域空間是定义在 G 上的函数所构成的函数空間，D 的値域空間是由定义在 n 个点 $P_1, \cdots, P_n$ 上的函数（即数列）所构成的函数空間。对这样的函数所成的集合，必要时也可适当地定义距离，将它看成是距离空間。

应用差分法解微分方程时，一般是在平面上作格子，这格子点为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，在这些点上所考虑的函数 $\{u_\nu\}$，称为**格子点函数**。它虽然可作为原来函数 $u(x, y)$ 的代表，但是特别要注意的是它們完全属于相异的空間。

8) **边界値問題，初始値問題** 由上所述，关于微分方程的問題，一般有如下的形式：

$$L[u]=f \quad (\mathrm{I}), \qquad \gamma[u]=\varphi \quad (\mathrm{II}),$$

其中 L 为某一微分算子，γ 是边界算子。用普遍的話来說，(I)是微分方程，(II)是边界条件。初始条件可以看作是边界条件的一种，所以仍然可以表示为(II)的形式。因而条件(II)一般可由一个以上的式子組成。同样，对于微分方程組，(I)也可由一个以上的式子組成。

我們还可以将(I)，(II)写成一个方程。例如只要把定义在区域 G 的函数和定义在边界 Γ 的函数，一并看作为新的点就可以了。我們考虑到不把問題再加以抽象化，以后主要采取(I)，(II)的形式来进行研究。

另外一个想法是，只就滿足条件(II)的函数所构成的函数空間来解方程(I). 这个方法在(II)比較簡单的情况下时常使用。

如果认为将微分方程的問題写成(I)，(II)的形式，便是前进了一步，那将是錯誤的。这仅仅是出发点。可是从一般处理微分方程的情形来看，用这种記号是使問題簡洁化的第一步。近代处理微分方程的方法是在这个基础上再应用泛函分析的結果。但是正如我們开始所叙述的，使用这些記号，主要是为了使表示簡洁化，我們仍將避免使用泛函分析中較高深的定理。

第1章　展开級数的解法

§4 序　　論

本章是研究将满足所給微分方程和初始条件、边界条件的解 w，用預先选定的适当的函数列 u_1, u_2, … 表示成无穷級数

$$w=\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \tag{4.1}$$

的解法的有关問題。

除了从理論上必須解决当无穷級数收斂时它的和是否为所求的解的問題而外，从应用的观点来看，选擇函数列 u_k 时，必須使其容易确定展开式中的系数 c_k. 其次，由于要求采用(4.1)的有限項

$$u^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} c_k u_k \tag{4.2}$$

以計算 w 的近似值，因而級数收斂的速度是个重要的問題。此外，确定系数 c_k 时，必須求无穷阶的联立一次方程組的解，因为一般是得不出正确的解的，因此也产生了求 c_k 的近似值的問題。关于函数 u_k 的选定一般如下：

（i）满足微分方程，但是不满足初始条件和边界条件；

或者相反，即

（ii）满足初始条件和边界条件，但是不满足微分方程。

我們将在第4章研究用变分法确定系数 c_k 的情形，本章只限于討論直接从微分方程或边界条件等确定系数 c_k 的方法，并且不探討常微分方程用冪級数求解的理論。

§5 按满足微分方程的函数展开

例如热傳导問題

在 $0<x<\pi$，当 $t>0$，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5.1}$$

边界条件：

$$u(0, t)=u(\pi, t)=0, \tag{5.2}$$

初始条件：

$$u(x, 0)=f(x). \tag{5.3}$$

显然，

$$u_k=e^{-k^2 t}\sin kx$$

满足(5.1)和(5.2)，在此将 $u=\Sigma c_k u_k$ 代入(5.3)，得到

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx.$$

于是問題归結为求已給定的函数 $f(x)$ 的 Fourier 展开式的系数。

此外，綫性椭圓型微分方程的边界值問題

在区域 G 内，

$$L[u]=0, \tag{5.4}$$

在边界 Γ 上，

$$\gamma[u]=f(s). \tag{5.5}$$

若已求出满足 $L[u_k]=0$ 的函数 u_k，代入(5.5)中并計算其边界值

$$\gamma[u_k]=\varphi_k(s) \quad (\text{在 } \Gamma \text{ 上}), \tag{5.6}$$

如果在边界 Γ 上所給的函数 $f(s)$ 可展开为

$$f(s)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(s), \tag{5.7}$$

那么利用此展开式中的 c_k 来表示解 w 为

$$w=\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k, \tag{5.8}$$

从而問題仍是归結于求 $f(s)$ 对于 $\varphi_k(s)$ 的 Fourier 系数的問題。

若 $\varphi_k(s)$ 在 Γ 上满足正規正交条件

$$\int_\Gamma \varphi_k(s)\varphi_i(s)ds=\delta_{ki}❶, \tag{5.9}$$

---

❶ $\delta_{ki}=\begin{cases}1 & (k\neq i),\\ 0 & (k=i).\end{cases}$——譯者注