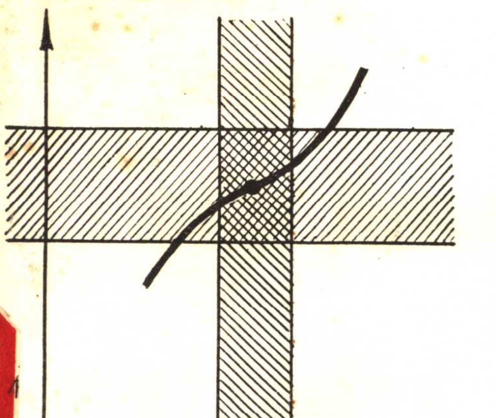
中学数学辅导员丛书

WEIJIFEN RUMEN

微积分入门

李万年 编著



科学普及出版社

中 学 数 学 辅 导 员 丛 书

微积分入门

李 万 年 编著

科学普及出版社

0
1

内 容 提 要

本书是为中学生扎实地打好初等数学的基础并学习微积分而编写的。

本书在内容的深度和广度方面基本符合中学数学教学大纲的要求，略有伸展．它的特点是起点较低，给出了学习微积分时必须具备的一系列预备知识，强调了微积分基础理论的论述，凡初学者必须掌握的知识均给出练习题和答案。

全书内容翔实，资料丰富，系统性强，说理清楚，适于初学微积分的中学生使用，也可作为中学微积分教学的参考书。

中学数学辅导员书

微 积 分 入 门

李万年 编著

责任编辑：吴之静

封面设计：窦桂芳

*

科学普及出版社出版（北京白石桥紫竹院公园内）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京印刷一厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：12¾ 字数：276千字

1983年1月第1版 1983年1月第1次印刷

印数：1—33,000 册 定价：1.20元

统一书号：13051·1308 本社书号：0482

“中学数学辅导员丛书”

出版说明

多年来，广大中学师生普遍感到，在浩如烟海的出版物中，能切实配合中学文化课教学的优秀课外读物为数甚少．与此同时，社会上又有成千上万的知识青年，正在各自的岗位上，通过业余自修，弥补十年动乱给他们造成的损失，走自学成材之路．他们更是渴望有不同于正规学校课本的辅导读物，供自学之用．

正是针对以上情况，我们组织编写了“中学数学辅导员丛书”．

本丛书参照教育部制定的全日制中学数学教学大纲的内容，按不同的数学分支，分册编写．

本丛书的编写要求和特点是：

一、内容密切结合中学现用统编教材，但绝不是教材的重复．它从数学自身的系统出发，着重在讲清基本概念和基础理论．

二、每一分册自成体系，首先引入与重点内容相关的预备知识．每章前，有引导文字，强调重点；章末，有总结性的概述．以便于自学．

三、论述中注意理论联系实际．引入概念时尽量从实例出发．

四、配备适量的习题，但不搞题海战术．凡初学者必须掌握的知识，均给出练习题、解题方法和答案．例题的讲解，着重于讲清解题思路，启发和培养学生的思维能力．

五、力求内容翔实，资料丰富，说理清楚，文字生动．适当引入与内容相关的历史事实，以增加趣味性．

我们希望：本丛书对中学生和自学青年能起到辅导员作用，对中学教师能起到助手作用．

本丛书无论在内容和编写方法上均可能有不当之处，还望读者和专家不吝赐教。

前　言

一、从两个例子谈起

【例 1】 已知真空中自由落体运动在 t 秒内所经过的路程是 $s=\frac{1}{2}gt^2$. 求自由落体在时刻 t 的瞬时速度(g 为重力加速度常数).

分析 设自由落体在 t 时刻所经过的路程是 $s=\frac{1}{2}gt^2$. 记 t 时刻以后的一段时间为 Δt，从 t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻内，自由落体所经过的路程增量记为Δs. 那么，自由落体在 $t+\Delta t$ 时间内所经过的路程是

$$
\begin{aligned}
s+\Delta s&=\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2\\
&=\frac{1}{2}gt^2+\frac{1}{2}g[2t\Delta t+(\Delta t)^2].
\end{aligned}
$$

所以，路程的增量，也就是从 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内自由落体所经过的路程

$$
\begin{aligned}
\Delta s&=(s+\Delta s)-s\\
&=\frac{1}{2}g[2t\Delta t+(\Delta t)^2].
\end{aligned}
$$

从而，用时间增量 Δt 去除这段时间内的路程增量 Δs，便可以得到自由落体在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内的平均速度. 即

$$v_{\text{平均}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt+\frac{g}{2}\Delta t.$$

为了求得 t 时刻的瞬时速度，可以令 Δt 越来越小，以至于 Δt 小到比任意小的正数还要小，从而平均速度就越来越接近于 t 时刻的瞬时速度. Δt 小到比任意小的正数还要小的实质，就是 Δt 小到越来越接近于零. 这样，随着 Δt 越来越接近于零，平均速度 $v_{平均}=gt+\frac{g}{2}\Delta t$ 的第二项也越来越接近于零. 于是，我们便可以得到自由落体在 t 时刻的瞬时速度

$$v=gt.$$

这个问题，实质上就是求路程 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 对时间 t 的导数. 即

$$s=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'^{❶}$$

$$=\frac{1}{2}g\times 2t\times t'=gt.$$

与例 1 相反，如果已知某物体的运动速度为 gt(g 为常数)，求从 $t=0$ 时刻开始到 t 时刻为止该物体的运动轨迹，这个问题在实质上就是求速度函数对时间变量从0到 t 的积分.

【例 2】 已知某物体以速度 $v=gt$ 从 $t=0$ 时刻开始运动，求该物体在 t 时刻的运动轨迹.

解 所求该物体在 t 时刻的运动轨迹，就是该物体在 t 时刻运动所通过的路程. 即

$$s=\int_0^t gtdt^{❷}=\frac{1}{2}gt^2\Big|_0^t$$

$$=\frac{1}{2}gt^2-0=\frac{1}{2}gt^2.$$

---

❶ $\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'$ 表示 $\frac{1}{2}gt^2$ 对自变量 t 的导数. 详细情况见第二章 § 2.1.

❷ $\int_0^t gtdt$ 表示被积函数 gt 从 0 到 t 的定积分. 详细情况见第三章 § 3.3.

例 1 和例 2 分别是导数和积分的简单的典型问题．事实上，求运动在某一时刻的瞬时速度，求曲线在某一点的切线等问题，都是导数的典型问题．**导数**就是对变化速度的一种度量．而求具有某一速度的运动的轨迹，求图形的面积等问题，又都是积分的典型问题．**积分**就是对连续变化总体效果的一种度量．

以上两个例子，为我们导出导数和积分的概念．而导数和积分通常总称为**微积分**．其实，微积分学所包括的内容是相当丰富的．它在数学、力学、电学、无线电电子学、天文学等学科中有着广泛的应用．而且，在工程设计这类实际问题中，甚至在商品生产的科学管理中，也都有微积分应用的具体内容．

二、本书的内容和体系

在学习微积分之前，了解微积分的内在联系是有益的．对于初学者来说，学习微积分需要具备哪些预备知识呢？为了掌握微积分又必须掌握哪些数学知识呢？要掌握的数学知识与微积分有什么关系呢？微分与积分之间又有什么内在的联系呢？这一系列的问题，都要在本书中阐明．

微积分是研究变量的数学，是在数量变化的条件下讨论和解决实际问题中的数量关系的．而变量之间的关系在数学中通常利用函数来表示．因此，在学习微积分之前，必须掌握函数的有关知识．

在数学中，函数的变化过程和变化趋势，一般是运用极限方法来研究的．极限在实质上是微积分学的基础．微积分正是由于非常成功地运用了无限过程的运算(即极限运算)以后，才得以发展和完善．因此，在学习微积分之前，还必须

学习和掌握极限的有关知识.

数学中的极限概念和实数理论是紧密地联系在一起的.极限概念以实数理论为基础.对于函数概念的掌握,对于微积分基本概念的理解,都与实数理论密切相关.微积分正是由于引入了实数理论以后,才有可能澄清了基本概念.因此,要理解和掌握微积分,就得理解和掌握实数理论的有关知识.

人们在运用微积分处理客观实际问题的过程中,总是将被处理的对象划分为许多极其细小的部分.这种极其细小的部分都是以零为极限的变量,而这种变量在数学上一般都叫做**无穷小量**.微积分又被人们称为**无穷小分析**,其主要原因就在于此.所以,研究与极限概念密切相关的无穷小量、无穷大量及其运算等是学习微积分过程中必不可少的基本内容.

微积分中所讨论的函数,大多数都是连续变量的函数.微积分中的基础知识和基本内容,大多数又都是对连续变量的连续函数论述的.函数连续性的理论是和微积分理论密切相关的.因此,在学习微积分的过程中,掌握函数的连续性和连续函数是必要的.

上述这些内容都将在本书第一章中作为基础知识加以讨论.本书的绪论概述了微积分的创立、发展与完善.了解微积分的发展简史,对于学习微积分是有促进作用的.本书的第二章讨论微分,第三章讨论积分.对于微积分中比较难以理解的重要的基础知识,将在第一章中提及,并尽量增加循环,使读者加深理解,最后再在第二、三章中加以讨论.至于微分学和积分学之间的内在联系,即微分和积分之间的互逆关系等,将在第三章中进行比较分析.

本书的内容和体系之所以如此处理，有两点理由：其一是微积分学知识的内在规律，其二是便于初学者由浅入深、循序渐进地学习.

三、本书的使用方法

本书是供具有相当于高中一年级文化程度的读者初学微积分知识时使用的．为了适应读者自学的需要，本书在内容选取方面力图自给自足.

常常听到有人说微积分很难懂，也有人说微积分很容易，套套公式就行了．关于这一点，轻易做出“难”或“易”的结论，对读者来说都是不恰当的。本书既不想掩饰困难，造成微积分很容易学习的假象，也不想忽略知识的内在联系，造成微积分难以理解的感觉；而是力求从整体上阐明微积分的基础知识和内在联系，给出具体的应用实例和直观的几何意义，指出基础知识中的重点和关键问题，由浅入深、有系统地稳步前进．总之，本书尽量为初学者提供方便，以减少初学者在自学中可能遇到的困难.

俗话说“万事起头难”，学习微积分也是这样．对于初学者来说，微积分是一门新的学科，处理问题的方法，又与过去熟悉的初等数学的方法不同，所以在开始学习时，要想马上掌握它，的确不是一件容易的事情．但是，只要理解了微积分的基本概念，进一步深入地学习自然不成问题．从经验可以知道：要掌握微积分知识，首先必须掌握微积分的基础知识；而要掌握微积分的基础知识，首先又必须理解微积分的基本概念．因此，本书的重点不在于使读者尽快地掌握微积分的简单计算方法，而在于为了达到这一目的，使读者尽快地理解和掌握微积分的基本概念和基础知识.

由于微积分学的内容很丰富，对于初学者来说，不可能马上全部掌握，因此，本书中仅选取微积分学入门知识中的最基本的内容，即一元函数微积分学中必须掌握的主要内容．它基本上相当于现行中学数学教学大纲中所规定的内容，但是在深度或广度方面均超出了大纲中的规定．至于微积分学的其它内容，还有待于读者以后继续学习，进一步掌握．

循序渐进地读完这本书，也许不会有很大的困难．但是，如果想不花气力，轻而易举地掌握书中的知识，也并不容易．这里要特别提及的是第一章基础知识中的某些内容，读者在中学阶段虽然学习过，但千万不要轻易地跳过去．须知，这里的内容并不同于中学阶段学习的内容．不仅因为这些内容是根据学习微积分的需要而设置的，而且还因为这些内容是按知识内在的系统性来讨论的，并具有一定的深度和广度．所以，初学者应该把它们作为新的内容来学习．

书中的练习题是为了加深理解和复习巩固基础知识而设置的，有关微积分的练习题，还考虑到要加强读者基本技能的训练．建议读者尽量独立地完成它们，在确认自己的解答可信和准确无误之后，再核对答案．

如果这样，经过努力，初学者是完全能够掌握书中的知识的．到那时，再进一步学习微积分的其它知识，就会感到进入微积分大门以后的“自由”了．

目　　录

绪　论

一、微积分的创立

微积分是数学的一门分科，是研究函数的导数和积分的性质及其应用的一门学科．

数学在逐渐产生和发展的过程中，最初形成的分科基本上是常量数学．例如中学数学里的初等代数、平面几何、立体几何等分科，都属于常量数学．其中被讨论的量是常量．也就是说，**常量数学**在研究的过程中，被讨论的量是不变化的．例如求代数式的值、求方程的根、求平面几何图形的面积、求立体图形的体积等等，所求的这些量都是保持不变的量，即为**常量**．

自从法国数学家笛卡儿在«几何学»一书中导入了运动着的一点的坐标的概念以后，运动进入了数学．这样，处理静止问题的常量数学也就不能适应客观实际的需要了．于是，变量的数学便逐渐产生和发展起来．十六、十七世纪，由于航海学、天文学和力学等自然科学发展的需要，研究运动便成为自然科学的中心问题．从而，逐渐产生了导数、积分等概念．

十七世纪中叶，英国数学家牛顿和德国数学家莱布尼兹，为了处理当时科学中的问题，在前人经验的基础上，分别在研究力学和几何学的过程中，建立了导数、积分的概念和运算法则，阐明了求导数和求积分是两种互逆的运算，大

体上制定了微积分这门学科．所以，牛顿和莱布尼兹这两位伟大的科学先驱，对微积分的创立有着杰出的贡献．

微积分的产生是继欧几里得几何之后，全部数学中的一个最大的创造．

但是，客观而公正的历史评价是不能把发明微积分这一成就完全归功于一两个人的．通常把牛顿和莱布尼兹并称为微积分的制定者，既不是说在牛顿和莱布尼兹之前根本不存在微积分的知识，也不是说牛顿和莱布尼兹制定微积分之后这门学科就完善成熟了．事实上，牛顿和莱布尼兹创立的微积分，当时不仅没有完善和成熟，而且还留下了许多要做的事情．而另一方面，在牛顿和莱布尼兹创立微积分之前，微积分问题至少被十七世纪的几十位数学家探索过．例如，费尔马、伽利略、开普勒等人都对奠基微积分作出过贡献．而牛顿的老师巴罗教授，就曾经充分认识到微分和积分这两种过程是彼此互逆地联系着的．不过，所有这些数学家，毕竟没有看到和指出微积分的一般规律．在他们之中，微积分的大量知识尽管已经产生并且积累起来，但是从特殊到一般的规律和方法，却没有一个人能够加以完善和总结出来．而牛顿和莱布尼兹却在前人的基础上，向前跨出了极大的一步．

二、牛顿和莱布尼兹

牛顿，1642 年在他父亲去世后的两个 月出生于英格兰．他从小在家乡的一所低标准的地方学校读书，十二岁那年，进入一所公立中学．开始，他似乎对学习很不介意，在校的成绩很差．除了对机械设计感兴趣以外，他和其他的学生没有两样，丝毫看不出是一个有特殊才华的青年人．后来，他虽然考取了大学，但对欧几里得几何的答卷并不优秀．十八

岁的牛顿进入了剑桥大学的三一学院，在这里，他勤奋而孜孜不倦地学习．剑桥则是牛顿才资的真正诞生地．虽然多数老师给他的鼓舞并不多，但他走自己的路，动手做实验，并且研究开普勒、伽利略等人的著作．

牛顿刚结束了他在大学里的课程，学校就因为伦敦地区流行鼠疫而关闭．于是，他回到了家乡，进行科学研究．他意识到了引力的大小与距离的平方成反比；他获得了解决微积分的一般方法；他还通过光学实验作出了划时代的发现，指出了象太阳光那样的白光，实际上是从紫到红的各种颜色混合而成的．关于这些发现，牛顿什么也没有说．两年以后，他回到了剑桥，获得了硕士学位，被选为三一学院的研究员，后来又当了数学教授．

牛顿(1642—1727)

关于微积分，牛顿在前人工作的基础上进行了总结，建立起成熟的方法，并且指出了前人工作中各问题之间的内在联系．但是，牛顿在写完微积分的基本论文以后，是过了很长时间才公开发表的．如果当初写出来就发表的话，也许可以避免与莱布尼兹发生谁先发明微积分的争论了．

莱布尼兹和牛顿对微积分的贡献不同．莱布尼兹是研究法律的，他是一位法学教授．但是，他的工作领域是广泛的，他的业余活动的范围是庞大的．莱布尼兹除了是一位外交官以外，还是一位哲学家、法学家、历史学家、语言学家

和先驱的地质学家．他在逻辑学、力学、光学、数学、流体静力学、气体学、航海学等方面做了重要的工作．他在数学和哲学方面的著作属于世界上最优秀的著作．

莱布尼兹是从 1684 年起发表微积分论文的．然而他的许多成果，他的思想的发展，实际上都记录在他从 1673 年起所写的成百页的笔记本中．他对数学的兴趣是在与数学家和科学家的接触过程中被激励起来的．虽然他曾经阅读过一些数学书籍，但是他自己说直到 1672 年还基本上不懂数学．尽管如此，莱布尼兹的工作毕竟是富有启发性的和意义深远的．

莱布尼兹(1646—1716)

事实上，微积分是能够应用于许多函数的一种新的普遍的方法，这一发现又必须归功于牛顿和莱布尼兹．他们都是在代数的概念上建立微积分的．他们都是把面积、体积和其它以前作为和处理的问题归并到反微分．这是他们工作的共同点．至于他们工作的不同点主要是：第一，牛顿把导数作为增量比的极限；而莱布尼兹则直接用 x、y 的微分来求出它们之间的关系．第二，牛顿完全是从考虑变化率出发来解决面积和体积问题的；与此相反，莱布尼兹首先着想的则是和，是利用反微分计算的和．第三，牛顿自由地运用级数表示函数；而莱布尼兹则宁愿用有限的形式．第四，牛顿的工作方式是经验的、具体的、谨慎的；而莱布尼兹的工作方式则是富于想象的，喜欢

推广的，相当大胆的。牛顿知道能够容易地推广自己的结果，但是并没有费心去提出推广的原则，牛顿创立了许多方法，但是并没有适当地加以强调；而莱布尼兹更关心的则是运算公式创造出来的广泛意义下的微积分，例如微分法则和积分表等。莱布尼兹建立了微分的法则和公式系统；但是牛顿的宏伟的微积分的应用却证明了微积分的价值，而且远远地超过了莱布尼兹的工作，刺激并决定了以后数学分析的方向。至于对于微积分的记号，牛顿认为这件事是无关紧要的；而莱布尼兹则花费了很多时间来选择富有提示性的记号。例如莱布尼兹首先使用的积分记号“$\int$”，就是把当时所用的和——Sum——的第一个字母拉长而得到的。

关于牛顿和莱布尼兹两个人当中，究竟是谁先发明微积分的问题，当时曾经有过激烈地争论，但是并没有结果。在牛顿和莱布尼兹死了很久以后，人们反复调查的事实证明：虽然牛顿的工作大部分是在莱布尼兹之前做的，但是莱布尼兹是微积分主要思想的独立发明者，两个人都受到巴罗教授的很多启发。正因为如此，人们通常总是把牛顿和莱布尼兹并称为微积分的制定者。

三、微积分的发展与完善

继牛顿和莱布尼兹之后，微积分的两个重要的奠基者是伯努利兄弟。即雅可比·伯努利和约翰·伯努利。

雅可比是自学数学的。1686 年成为巴塞尔大学的数学教授。当他开始研究数学时，甚至还不知道牛顿和莱布尼兹的工作。他从巴罗教授那里学到了很多数学知识，并把结果从几何形式表示为分析形式。雅可比的活动和他弟弟约翰的