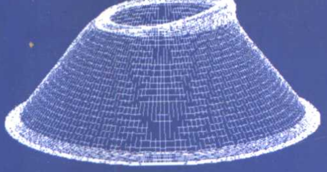
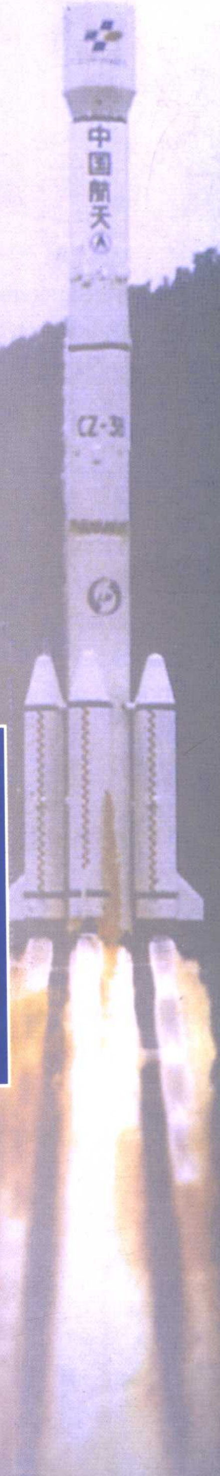


北京市高等教育精品教材立项项目

王勖成 编著

有限单元法

FINITE ELEMENT METHOD



清华大学出版社

ISBN 7-302-06462-8
9 787302 064626 >
定价：59.50元

北京市高等教育精品教材立项项目

有限单元法

FINITE ELEMENT METHOD

王勖成 编著

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书系统地阐述了有限单元法的基本原理、数值方法、计算机实现和它在固体力学领域各类问题中的应用。

全书分为两篇共17章。第1篇(第1~7章)为基本部分,包括有限单元法的理论基础——加权余量法和变分原理;弹性力学问题有限单元法的一般原理和表达格式,单元和插值函数的构造,等参元和数值积分,有限单元法应用中的若干实际考虑,线性代数方程组的解法,有限单元法的计算机程序。第2篇(第8~17章)为专题部分,包括(杆、板、壳)结构力学问题,场和动力学问题,以及(材料、几何、接触)非线性问题3个部分。

本书反映了有限单元法在学科上和应用方面的发展水平,凝聚了作者本人和所在教研组长期教学实践的经验。书中每章附有复习思考题和练习题。书末还附有用于求解不同类型线弹性问题计算机实践的教学程序。

本书可作为力学、机械、动力、航空航天、土木、水利等专业本科生和研究生的教材,也可作为上述专业教师和工程技术及科研开发人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法/王勖成编著. —北京:清华大学出版社,2003
ISBN 7-302-06462-8

Ⅰ. 有…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 有限单元法－高等学校－教材　Ⅳ. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 019427 号

出 版 者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)
http://www.tup.com.cn
责任编辑:金文织
印 刷 者:清华大学印刷厂
发 行 者:新华书店总店北京发行所
开　　本:787×960　1/16　**印张**:49.25　**字数**:1016 千字
版　　次:2003 年 7 月第 1 版　2003 年 7 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 7-302-06462-8/O・289
印　　数:0001~5000
定　　价:59.50 元

前　言

有限单元法是在当今技术科学发展和工程分析中获得最广泛应用的数值方法。由于它的通用性和有效性，受到工程技术界的高度重视。伴随着计算机科学和技术的快速发展，现已成为计算机辅助工程和数值仿真的重要组成部分。

有限单元法不仅被普遍地列为工科专业本科生和研究生的学位课程，而且是相关工程技术人员和教师继续学习的重要内容。本书是为学习有限单元法提供一本符合教学特点和规律，并反映学科发展水平和适应工程应用发展要求的教材。

本书是作者在总结所在教研组近年来教学和科研实践的经验，调研有限单元法在学科上和应用方面的进展，并分析现有国内外教材状况的基础上，对已出版的《有限单元法的基本原理和数值方法》(王勖成、邵敏编著，清华大学出版社，1997)进行修订、扩充而完成的。其主要特点是：

(1) 以深入理解和掌握有限单元法的基本原理(加权余量法和变分原理)，C_0 和 C_1 两类单元构造，平衡、特征值和传播三类问题解法为主线组织全书内容。突出原理、方法和关键概念的阐述。

(2) 适应学科和工程应用的发展，增加了不可压缩材料和蠕变材料的结构分析，流固耦合分析，稳定和屈曲分析以及接触和碰撞分析等基本内容，并删去了一些现已较少应用的内容。

(3) 加强练习和实践环节。全书每一章附有概念讨论型的复习题和推导计算型的练习题。还提供对不同类型线弹性问题计算机实践进行计算分析的教学程序。

本书编写过程中得到多方面的支持、鼓励和帮助。本书 1990 年列入清华大学重点教材建设计划并得到基金的支持。清华大学工程力学系牛丽莎、刘应华副教授多次参与本书内容的讨论，并提出了很多宝贵的意见。中国地震局地球物理研究所张之立研究员对本书的定稿付出了辛勤的努力。徐刚博士和研究生刘波为教学程序(FEATP)的编写进行了有特色的工作。作者在此向他(她)们表示衷心的感谢。

本书的出版始终得到清华大学出版社的支持。责任编辑金文织悉心完成了本书的审

定和编辑，全部插图由绘图人员精心绘制。作者对她们表示深切的谢意。

由于水平限制，本书肯定存在不足和不妥之处，热忱地希望读者和同行专家提出批评和指正。

作 者

2002 年 5 月于北京清华园

目 录

第2篇　专题部分

第0章　绪　　论

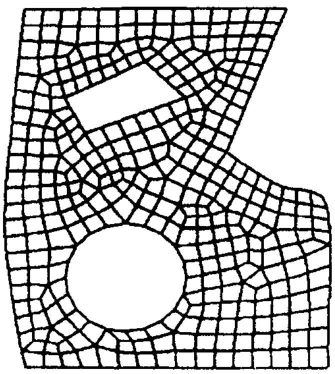
0.1　有限元法的要点和特性

有限单元法(或称有限元法)是在当今工程分析中获得最广泛应用的数值计算方法。由于它的通用性和有效性,受到工程技术界的高度重视。伴随着计算机科学和技术的快速发展,现已成为计算机辅助设计(CAD)和计算机辅助制造(CAM)的重要组成部分。

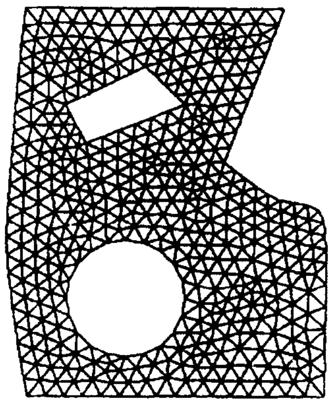
0.1.1　有限元法要点

在工程或物理问题的数学模型(基本变量、基本方程、求解域和边界条件等)确定以后,有限元法作为对其进行分析的数值计算方法的要点可归纳如下:

(1) 将一个表示结构或连续体的求解域离散为若干个子域(单元),并通过它们边界上的结点相互联结成为组合体。图0.1表示将一个二维多连通求解域离散为若干个单元的组合体。图0.1(a)和(b)分别表示采用四边形和三角形单元离散的图形。各个单元通过它们的角结点相互联结。



(a) 四边形单元



(b) 三角形单元

图0.1　二维多连通域的有限元离散

(2) 用每个单元内所假设的近似函数来分片地表示全求解域内待求的未知场变量。而每个单元内的近似函数由未知场函数(或及其导数,为叙述方便,后面略去此加注)在单元各个结点上的数值和与其对应的插值函数来表达(此表达式通常表示为矩阵形式)。由于在联结相邻单元的结点上,场函数应具有相同的数值,因而将它们用作数值求解的基本未知量。这样一来,求解原来待求场函数的无穷多自由度问题转换为求解场函数结点值的有限自由度问题。

(3) 通过和原问题数学模型(基本方程、边界条件)等效的变分原理或加权余量法,建立求解基本未知量(场函数的结点值)的代数方程组或常微分方程组。此方程组称为有限元求解方程,并表示成规范化的矩阵形式。接着用数值方法求解此方程,从而得到问题的解答。

0.1.2 有限元法特性

从有限元法的上述要点可以理解它所固有的以下特性。

(1) 对于复杂几何构形的适应性。由于单元在空间可以是一维、二维或三维的,而且每一种单元可以有不同的形状,例如三维单元可以是四面体、五面体或六面体,同时各种单元之间可以采用不同的联结方式,例如两个面之间可以是场函数保持连续,可以是场函数的导数也保持连续,还可以仅是场函数的法向分量保持连续。这样一来,工程实际中遇到的非常复杂的结构或构造都可能离散为由单元组合体表示的有限元模型。图 0.2 所示是一水轮机转轮的有限元模型。转轮由上冠、下环和 13 个叶片组成,分别用三维块体单元和壳体单元离散。叶片之间的水用三维流体单元离散[1]。

(2) 对于各种物理问题的可应用性。由于用单元内近似函数分片地表示全求解域的未知场函数,并未限制场函数所满足的方程形式,也未限制各个单元所对应的方程必须是相同的形式,所以尽管有限元法开始是对线弹性的应力分析问题提出的,很快就发展到弹塑性问题、粘弹塑性问题、动力问题、屈曲问题等。并进一步应用于流体力学问题、热传导问题等。而且可以利用有限元法对不同物理现象相互耦合的问题进行有效的分析。图 0.3 表示金属板料成形过程的有限元模拟。其中图(a)表示冲头、模具和板料的图形;图(b)是它们的有限元模型;图(c),(d),(e)是冲头向下移动 20mm、30mm、40mm 时板料有限元模型的变形图[2]。

图 0.4 是一载有假人的整个汽车以速度 $v=1.56\text{m/s}$ 撞击刚性墙壁动态响应过程的有限元模拟。图(a)是整车和假人的有限元模型。它由16 000个壳体单元、刚体、弹簧、阻尼器以及特殊联结件组成。图(b)和(c)分别是 $t=40\text{ms}$ 和 70ms 时汽车和假人的变形图。[3]

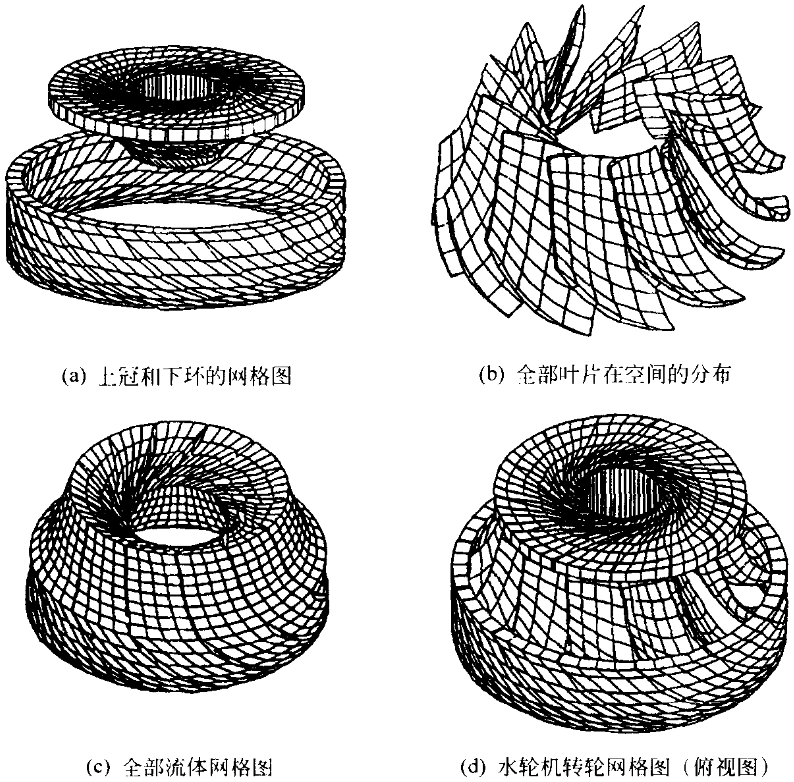


图 0.2 水轮机转轮的有限元模型

(3) 建立于严格理论基础上的可靠性。因为用于建立有限元方程的变分原理或加权余量法在数学上已证明是微分方程和边界条件的等效积分形式。只要原问题的数学模型是正确的，同时用来求解有限元方程的算法是稳定、可靠的，则随着单元数目的增加，即单元尺寸的缩小，或者随着单元自由度数目的增加及插值函数阶次的提高，有限元解的近似程度将不断地被改进。如果单元是满足收敛准则的，则近似解最后收敛于原数学模型的精确解。

(4) 适合计算机实现的高效性。由于有限元分析的各个步骤可以表达成规范化的矩阵形式，最后导致求解方程可以统一为标准的矩阵代数问题，特别适合计算机的编程和执行。随着计算机软硬件技术的高速发展，以及新的数值计算方法的不断出现，大型复杂问题的有限元分析已成为工程技术领域的常规工作。

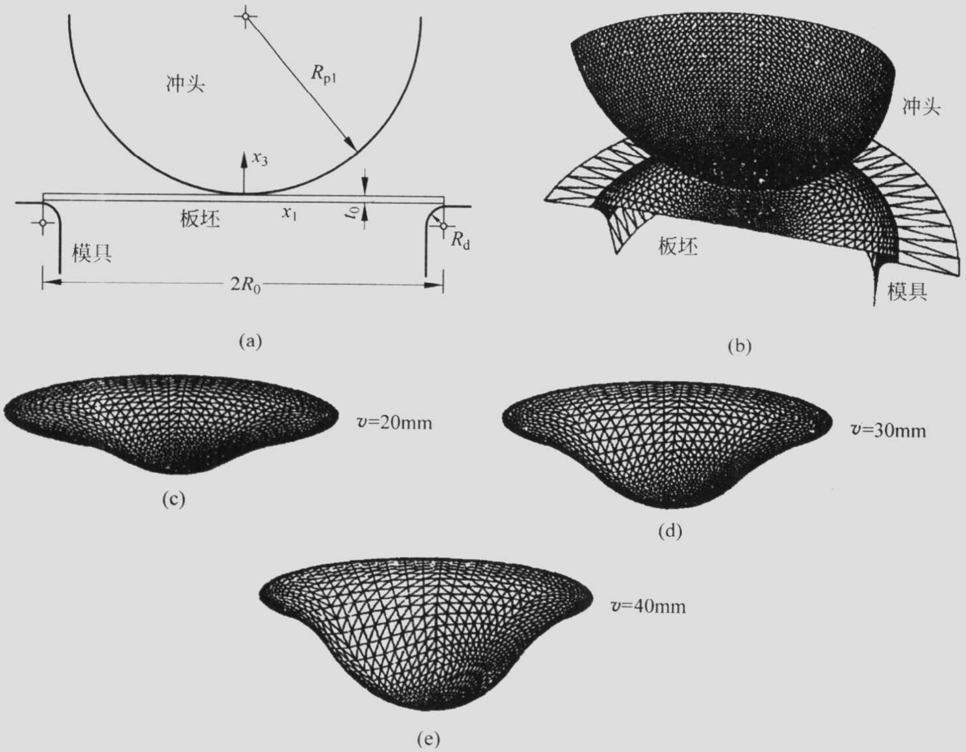


图 0.3 金属板料成形过程的有限元模拟

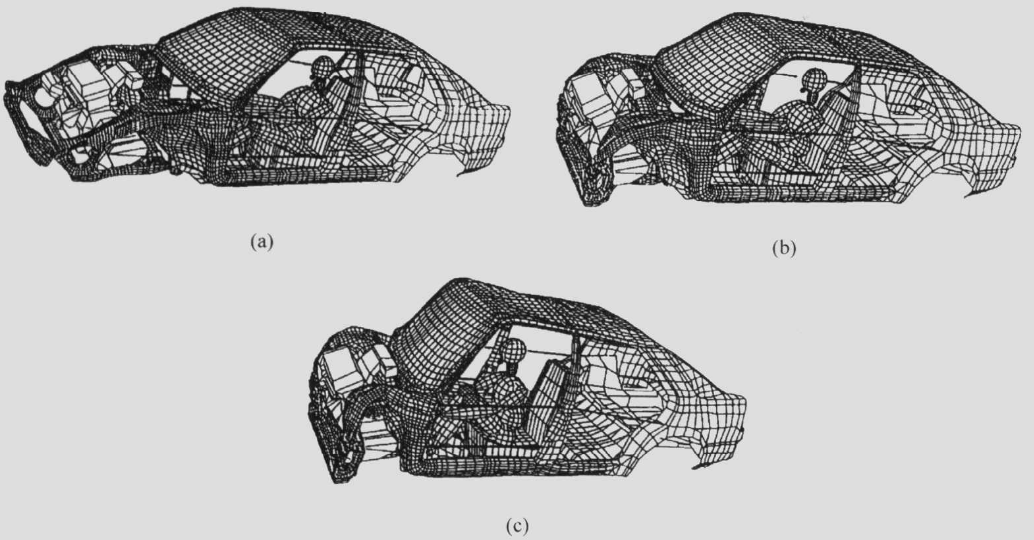


图 0.4 载有假人的汽车撞击刚性墙壁的有限元模拟

0.2 有限元法的发展、现状和未来

0.2.1 有限元法的早期工作

从应用数学的角度考虑，有限元法的基本思想可以追溯到 Courant[4] 在 1943 年的工作。他首先尝试应用在一系列三角形区域上定义的分片连续函数和最小位能原理相结合，来求解 St. Venant 扭转问题。此后，不少应用数学家、物理学家和工程师分别从不同角度对有限元法的离散理论、方法及应用进行了研究。有限元法的实际应用是随着电子计算机的出现而开始的。首先是 Turner，Clough 等人[5] 于 1956 年将刚架分析中的位移法推广到弹性力学平面问题，并用于飞机结构的分析。他们首次给出了用三角形单元求解平面应力问题的正确解答。三角形单元的特性矩阵和结构的求解方程是由弹性理论的方程通过直接刚度法确定的。他们的研究工作开始了利用电子计算机求解复杂弹性力学问题的新阶段。1960 年 Clough[6] 进一步求解了平面弹性问题，并第一次提出了“有限单元法”的名称，使人们更清楚地认识到有限单元法的特性和功效。

0.2.2 有限元法的发展和现状

近 30 多年来，伴随着电子计算机科学和技术的快速发展，有限元法作为工程分析的有效方法，在理论、方法的研究、计算机程序的开发以及应用领域的开拓诸方面均取得了根本性的发展。这里仅就其中发展比较成熟，并已广泛应用于实际分析的主要方面进行简要的概括。

(1) 单元的类型和形式

为了扩大有限元法的应用领域，新的单元类型和形式不断涌现。例如等参元采用和位移插值相同的表示方法，将形状规则的单元变换为边界为曲线(二维)或曲面(三维)的单元，从而可以更精确地对形状复杂的求解域(或结构)进行有限元离散。再如在构造结点参数中同时包含有位移和位移导数的梁、板、壳单元，以满足分析工程实际问题中大量遇到该类结构的需要。构造以多个场变量(例如位移、应变、应力)为结点参数的混合型单元，以克服分析不可压缩介质以及板壳分析中遇到的数值上的困难。构造包括多种材料构成的复合单元，用来分析复合材料、夹层材料、混凝土等组成的结构。

(2) 有限元法的理论基础和离散格式

在提出新的单元类型，扩展新的应用领域和应用条件的同时，为了给新单元和新应用提供可靠的理论基础，研究工作的进展包括将 Hellinger-Reissner 原理、Hu-Washizu 原理等多场变量的变分原理用于有限元分析，发展了混合型(单元内包括多个场变量)、杂交型(某些场变量仅在单元交界面定义)的有限元表达格式，并研究了各自的收敛性条件；将