北大燕园

# 李永乐·李正元考研数学②

2004年版

# 轻轻松松考高分

## 微积分篇

## ——历年试题分类解析

编著　北方交通大学　赵达夫
北京大学　刘西垣

国家行政学院出版社

李永乐·李正元考研数学 ②

# 轻轻松松考高分

## 微积分篇

——历年试题分类解析

编著 北方交通大学 赵达夫
北 京 大 学 刘西垣

国家行政学院出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

轻轻松松考高分．微积分篇：名师历年试题分类解析/赵达夫，刘西垣编．
—北京：国家行政学院出版社，2003.2
ISBN 7-80140-269-3

Ⅰ．轻…　Ⅱ．①赵…　②刘…　Ⅲ．微积分-研究生-入学考试-解题　Ⅳ．①O13-44
②O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 004645 号

**轻轻松松考高分**
**微积分篇**
赵达夫　刘西垣　编著
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路 6 号
邮政编码：100089
发行部电话：68920615　68929949
北京市朝阳印刷厂印刷　新华书店经销
*
787 × 1092　1/16 开本　9.75 印张　252 千字
2003 年 2 月北京第 1 版　2003 年 2 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-80140-269-3/O · 23　　定价：15.00 元

# 研究过去 找出规律
# 认识现在 掌握重点
# 预测未来 轻取高分

## （代前言）

### （一）

当代著名数学家 G. D. 伯克霍夫（Birkhoff）指出："再也没有一个学科比数学更易于通过考试来测定智力了。"对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

### （二）

本套书，即**《轻轻松松考高分·高等数学篇》**（适用于考数学一、数学二的考生）

**《轻轻松松考高分·微积分篇》**（适用于考数学三、数学四的考生）

**《轻轻松松考高分·线性代数、概率论与数理统计篇》**（适用于所有考数学的考生）

汇集了 1987 年—2003 年历届全国硕士研究生入学统考试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本套书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，使考生引以为戒。

本套书把历年考研数学试题依据考试大纲的章节顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

**编者按**——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

**考点分布**——统计分析本章所考题型、历年试题在该题型所占分数和所考次数，便于考生分析命题规律，从而预测今后命题趋势。

**题型分类解析**——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该题型考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而掌握考研数学试题的广度和深度，做到复习时目标明确，心中有数。而且把历年同一内容的试题放在一起，我们可以发现近几年的考题中有许多与往年试题类似，因

此研究往年的考题对我们准备下一年的研究生数学考试是不言而喻的。

另外,每种题型后附有**综述**——归纳总结该题型解题思路、方法和技巧,并举例说明。

**小结**——梳理本章知识结构,归纳本章重要知识点的具体内容及相关结论(公式、定理)。

## (三)

著名数学家、教育家G. 波利亚(Polya)说:“解题是智力的特殊成就,而智力乃是人类的天赋。因此,解题可以认为是人的最富有特征性的活动。”本套书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时,应先看《数学考试大纲》,以便明确考试的有关要求,接着去认真阅读有关教材和参考书(推荐考生认真阅读由**国家行政学院出版社**出版、**李永乐**、**李正元**等编写的**《考研数学复习全书》(理工、经济类)**,该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细,各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位,与考研命题思路极其吻合),复习完后,再来看本书的试题,以检验自己的水平。在看本书试题时,应该先自己动手做题,然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较,看哪些自己做对了,哪些自己做错了,为什么会做错,可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2—3遍,直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

再提一个建议供参考。关于考题重复的问题,需要说明的是:这种重复不仅在理工类和经济类内部,而且也在数学一至四之间重复。近年来多次出现过原来理工类试题拿到经济类中做考题的情况。这就是说,经济类考生也应该了解理工类试题。因此,建议经济类考生在阅读《轻轻松松考高分·微积分篇》的同时,参看一下《轻轻松松考高分·高等数学篇》也是十分必要的。

## (四)

除本套书外,将陆续推出**《考研数学复习全书》(理工、经济类)**、**《考研数学全真模拟经典400题》(理工、经济类)**、**《考研数学最后冲刺超越135分》(理工、经济类)**等辅导书。其中,**《考研数学复习全书》(理工、经济类)**作为全面复习第一阶段使用。**《轻轻松松考高分·高等数学篇》**、**《轻轻松松考高分·微积分篇》**、**《轻轻松松考高分·线性代数、概率论与数理统计篇》**与**《考研数学全真模拟经典400题》(理工、经济类)**作为检查第一阶段复习效果使用,即第二阶段模拟训练用书;**《考研数学最后冲刺超越135分》(理工、经济类)**则是作为第三阶段即冲刺梳理、归纳时的参考用书。

## (五)

参加本套书编写的有:清华大学 **李永乐**、北京大学 **李正元**、**刘西垣**、**范培华**、**李秀淳**、中国人民大学 **袁荫棠**、北方交通大学 **赵达夫**、东北财经大学 **龚兆仁**、天津财经学院 **鹿立江**、武汉空军雷达学院 **徐宝庆**。

本书在编写、编辑和出版过程中,尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神,高质量、严要求,但由于时间紧、任务重,加上我们水平有限,难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2003年2月

# 目　　录

# 第一章　函数 极限 连续

编者按

本章的重点内容是:复合函数和分段函数以及函数记号的运算.准确理解函数极限的概念及其性质,能正确运用各种方法求出函数的极限.讨论函数的连续性,判断间断点的类型.有限闭区间上连续函数的介值定理和最大最小值定理.

本章内容每年试题分数平均占 4% ,但这一章内容是微积分基础,以后几章的试题都和这章内容有关,这一点要引起考生足够重视.

## Part Ⅰ　1987 年—2003 年历年试题考点分布

**✲ 数学三**

| 考点 / 分值 / 年份 | 函数的概念与性质 | 求极限 | 讨论函数的连续性与间断点类型的判断 |
|---|---|---|---|
| 1987 | | 2 + 4 | 2 |
| 1988 | | 2 + 4 | |
| 1989 | | 3 + 5 | |
| 1990 | 3 | 3 | 3 |
| 1991 | | 3 + 3 + 5 | |
| 1992 | | 3 | 5 |
| 1993 | | 3 | |
| 1994 | | | |
| 1995 | | | |
| 1996 | | | |
| 1997 | | | |
| 1998 | | | 3 |
| 1999 | | | |
| 2000 | | 3 | |
| 2001 | | | |
| 2002 | | | |
| 2003 | | 8 | 4 |
| 合计 | 3 | 51 | 17 |

**✻ 数学四**

| 分值 考点 / 年份 | 函数的概念与性质 | 求极限 | 讨论函数的连续性与间断点类型的判断 |
|---|---|---|---|
| 1987 | | 2 + 4 | 2 |
| 1988 | | 2 + 4 | |
| 1989 | | 3 + 5 | |
| 1990 | 3 | 3 | 3 |
| 1991 | | 3 + 5 | |
| 1992 | 3 | 5 + 3 | |
| 1993 | | 3 | |
| 1994 | | 3 + 5 | |
| 1995 | | | |
| 1996 | | | |
| 1997 | | 6 | |
| 1998 | | 6 | 5 |
| 1999 | | 3 | |
| 2000 | | 3 + 3 | |
| 2001 | | | |
| 2002 | | 3 | |
| 2003 | | 8 + 4 + 4 | |
| 合计 | 6 | 88 | 8 |

# Part Ⅱ　1987 年—2003 年历年试题分类解析

## 一、函数的概念与性质

1.(90,$\frac{3}{4}$,3 分)* 设函数 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数.　　(B) 无界函数.

* 90,$\frac{3}{4}$,3 分　依次表示 1990 年,数学三/数学四,本题满分 3 分。下同。

(C) 周期函数.　　　　　　　　　　(D) 单调函数.　　　　　　　　【　】

【分析】　由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x\tan x e^{\sin x} = \infty$，则 $f(x)$ 无界. 或考察 $f(x)$ 在 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4}(n = 1,2,\cdots)$ 的函数值，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = +\infty$，可见 $f(x)$ 是无界函数. 故应选(B).

【评注】　本题主要考查函数的四个基本性态，即单调性、奇偶性、周期性及有界性.

也可以证明其他结论均不正确.

由 $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}e^{\frac{\pi}{4}} \neq f(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}e^{-\frac{\pi}{4}}$，知(A)不正确；由 $f(\frac{\pi}{4}) > 0, f(-\frac{\pi}{4}) > 0$，而 $f(0) = 0$，知(D)不正确. 证明(C)不正确可用反证法.

设 $g(x) = \tan x e^{\sin x}$，于是 $g(x)$ 的定义域为

$$D = \{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\},$$

且 $g(x)$ 的全部零点为 $x_n = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

若 $f(x) = xg(x)$ 以 $T(T > 0)$ 为周期，则有

$$(x + T)g(x + T) = xg(x), \forall x \in D.$$

令 $x = 0$，有 $Tg(T) = 0$，即 $g(T) = 0$. 从而 $T = k\pi$，其中 $k$ 为某一正整数. 于是 $2k\pi$ 也是 $xg(x)$ 的周期. 代入即得，对 $\forall x \in D$ 有

$$(x + 2k\pi)g(x + 2k\pi) = (x + 2k\pi)g(x) = xg(x).$$

这表明 $2k\pi g(x) \equiv 0$ 在 $x \in D$ 上成立，于是 $g(x) \equiv 0$ 在 $x \in D$ 上成立，导致了矛盾. 故 $f(x) = xg(x)$ 不可能是周期函数.

2.(92,4,3分)　已知 $f(x) = \sin x, f[\varphi(x)] = 1 - x^2$，则 $\varphi(x) =$ ________ 的定义域为 ________.

【分析】　由于 $f(x) = \sin x$ 的反函数 $\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$，而 $\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2)$，故 $x$ 应满足 $-1 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1$，即 $x \in [0,\sqrt{2}]$. 因此，$\varphi(x)$ 的定域为 $[0,\sqrt{2}]$.

【评注】　本题主要考查复合函数的运算及反函数的概念，并知道反正弦函数的定义域.

## 二、求极限的方法

3.(87,$\frac{3}{4}$,2分)　(是非题) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.　　　　【　】

【分析】　由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$，又因 $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

所以 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ 是错误的，应填"×".

【评注】　本题主要考查左、右极限. 这里考生应特别注意：$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

4.(87,3,4分)　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1 + xe^x)^{\frac{1}{x}}$.

【解法一】　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}[(1 + xe^x)^{\frac{1}{xe^x}}]^{\frac{xe^x}{x}} = e$.

【解法二】　由于 $\lim\limits_{x\to 0}(xe^x \cdot \frac{1}{x}) = 1$，则原式 $= e^1 = e$.

【评注】 本题主要考查重要极限$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.【解法一】和【解法二】是求$1^{\infty}$型极限常用的两种方法(当然也可用洛必达法则求),一般情况下,【解法二】较方便,【解法二】用到以下结论:

若 $\lim\alpha(x)=0$, $\lim\beta(x)=\infty$,且$\lim\alpha(x)\cdot\lim\beta(x)=A$,则$\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=\mathrm{e}^{A}$,此结论在解题时可直接使用.

5.(87,4,4分) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\arctan\frac{1}{x}}$.

【解】 由于$x\to+\infty$时,$\ln(1+\frac{1}{x})\sim\frac{1}{x}$,$\arctan\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\arctan\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

【评注】 本题主要考查利用等价无穷小代换求极限的方法,以下一些常用的等价无穷小必须掌握:$x\to0$时,$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x$,

$$x\sim\ln(1+x)\sim\mathrm{e}^{x}-1,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2},$$
$$(1+x)^{a}-1\sim ax,\quad a^{x}-1\sim x\ln a\ (a>0,a\neq1).$$

6.(88,$\frac{3}{4}$,2分) (是非题)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$均存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必存在.【 】

【分析】 取$x_0=0$,$f(x)=x$,$g(x)=\sin\frac{1}{x}$,则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x=0$,$\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$,但是$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$不存在.故应填"×".

【评注】 本题主要考查极限的四则运算法则.本题若把$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在改为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在且不为零,则结论成立.

7.(88,3,4分) 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{x}-1}{x\ln x}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x}{x\ln x}=1$.

或 原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)}{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{0}=1$.

【评注】 本题主要考查利用等价无穷小代换求极限.后一种方法是用洛必达法则及幂指函数求导法则.显然本题用等价无穷小代换的方法简单.

8.(88,4,4分) 求 $\lim\limits_{x\to1}(1-x^{2})\tan\frac{\pi}{2}x$.

【解】 此极限是$0\cdot\infty$型未定式,应化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式后再用洛必达法则计算.本题化为$\frac{0}{0}$型较简单.

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{1-x^{2}}{\cot\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{-2x}{-\frac{\pi}{2}}\cdot\sin^{2}\frac{\pi x}{2}=\frac{4}{\pi}.$$

【评注】 结合极限的四则运算法则可简化计算过程.

$$原式 = \lim_{x\to 1}(1+x)\sin\frac{\pi x}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

$$= 2\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}} = 2\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}$$

$$= 2\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

**9.(89,$\frac{3}{4}$,3分)** 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$,则当 $x \to 0$ 时

(A)$f(x)$ 是 $x$ 等价无穷小.

(B)$f(x)$ 与 $x$ 是同阶但非等价无穷小.

(C)$f(x)$ 比 $x$ 更高阶的无穷小.

(D)$f(x)$ 是比 $x$ 较低阶的无穷小. 【　】

**【分析】** 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2 + 3^x\ln 3}{1} = \ln 2 + \ln 3,$$

且 $\ln 2 + \ln 3 \neq 1$,所以应选(B).

**【评注】** 本题主要考查无穷小阶的比较.

**10.(89,3,5分)** 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$.

**【解法一】** 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}[1+(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)]^x$.

又

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)x = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

则原式 = e.

**【解法二】** 设 $u = \frac{1}{x}$,则当 $x \to \infty$ 时,$u \to 0$.于是

$$原式 = \lim_{u\to 0}(\sin u + \cos u)^{\frac{1}{u}} = e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}}.$$

而

$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{\cos u - \sin u}{\sin u + \cos u} = 1,$$

故原式 = e.

**【评注】** 本题主要考查重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ 和 $1^\infty$ 型极限的求法.

**11.(89,4,5分)** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

**【解】** 此极限是 $1^\infty$ 型未定式,应化为指数函数 $e^{f(x)}$ 后再求极限.

原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}$. 而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+e^x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+e^x}{x+e^x} = 2$,

所以原式 $= e^2$.

**12.(90,$\frac{3}{4}$,3分)** 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ ________.

**【分析】** 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}}=2.$

**【评注】** 本题主要考查求极限的一种方法,将根式有理化.

**13.(91,$\frac{3}{4}$,3分)** 下列各式中正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x=1.$　　　　(B) $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}.$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x=-\mathrm{e}.$　　　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{-x}=\mathrm{e}.$　　【　　】

**【分析】** 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{1+t}}=\mathrm{e}^0=1$,应选(A).

这里应注意 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}[(1-\dfrac{1}{x})^{-x}]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}\neq-\mathrm{e}.$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{-x}=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x})^x]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}\neq\mathrm{e}.$$

**【评注】** 本题主要考查重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 和 $\infty^0$ 型极限的求法.

**14.(91,3,3分)** 设数列

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数},\\[2mm] \dfrac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

则当 $n\to\infty$ 时,$x_n$ 是

(A) 无穷大量.　　　　(B) 无穷小量.

(C) 有界变量.　　　　(D) 无界变量.　　【　　】

**【分析】** 由于 $n$ 为奇数时 $x_n=n+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\to+\infty$(当 $n\to\infty$),$n$ 为偶数时,$x_n=\dfrac{1}{n}\to0$(当 $n\to\infty$ 时),所以当 $n\to\infty$ 时,$x_n$ 既不是无穷大量,也不是无穷小量,也不是有界变量,而是无界变量.故应选(D).

**【评注】** 本题主要考查以下四个基本概念:无穷大量、无界变量、无穷小量、有界变量.这里特别应注意无穷大量与无界变量的联系与区别.

**15.(91,3,5分)** 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,其中 $n$ 为给定的自然数.

**【解法一】** 此极限是 $1^\infty$ 型未定式.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to0}\exp\left\{\frac{1}{x}\ln(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n})\right\}\\&=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})-\ln n}{x}\right\},\end{aligned}$$

其中大括号内的极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式,因此由洛必达法则,有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})-\ln n}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}} = \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

于是原式 $= e^{\frac{n+1}{2}}$.

**【解法二】** 由于$\left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,

又

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{nx}$$
$$= \frac{1}{n}\left[\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 1}{x} + \cdots + \lim_{x\to 0}\frac{e^{nx} - 1}{x}\right]$$
$$= \frac{1}{n}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{2}(n+1),$$

则原式 $= e^{\frac{1}{2}(n+1)}$.

**【评注】** 本题主要考查 $1^\infty$ 型极限求法.

16.(91,4,5分) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

**【解法一】** 本题属 $\infty^0$ 型未定式极限.

$$\lim_{x\to+\infty}(x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})}.$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0,$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}(x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

**【解法二】** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)^{\frac{1}{x}}$.

而

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)^{\frac{1}{x}} = 2^0 = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1,$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}(x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = 1.$$

**【评注】** 本题主要考查 $\infty^0$ 型未定式极限的求法.

17.(92,3,3分) 当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量?

(A)$x^2$. (B)$1-\cos x$.

(C)$\sqrt{1-x^2}-1$. (D)$x-\tan x$. 【 】

**【分析】** 由于 $x\to 0$ 时,$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$,$\sqrt{1-x^2}-1 \sim -\frac{1}{2}x^2$,则 $x^2$,$1-\cos x$,$\sqrt{1-x^2}-1$ 是同阶无穷小,则应选(D).

**【评注】** 本题主要考查无穷小的阶的比较,由本题可以看出,掌握一些常用的等价无穷小为解决此类问题会提供极大方便.

事实上,由

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + 1}{3\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{3}$$

可知当 $x \to 0$ 时，$x - \tan x$ 是 $x$ 的三阶无穷小量.

**18.(92,4,5分)** 求极限 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$.

**【解法一】** 原式 $= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-\dfrac{\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}} = \dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{\tan(x-1)}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$

$$= \frac{2}{\pi}\lim_{x \to 1}\frac{\sec^2(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

**【解法二】** 原式 $\xlongequal{x-1=t} \lim\limits_{t \to 0}\dfrac{\ln\cos t}{1-\cos\dfrac{\pi t}{2}} = \lim\limits_{t \to 0}\dfrac{\ln[1+(\cos t-1)]}{1-\cos\dfrac{\pi t}{2}}$

$$= \lim_{t \to 0}\frac{\cos t - 1}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi^2}{4}t^2} = \lim_{t \to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}t^2}{\dfrac{\pi^2}{8}t^2} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

**【评注】** 本题主要考查求极限的方法.【解法二】主要是利用变量代换和等价无穷小代换，这也是求极限时一种常用方法.

**19.(92,4,3分)** 当 $x \to 0$ 时，下列四个无穷小量中，哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量？

(A) $x^2$. (B) $1 - \cos x$.

(C) $\sqrt{1-x^2} - 1$. (D) $x - \sin x$. 【 】

**【分析】** 由于 $x \to 0$ 时，$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2} - 1 \sim -\dfrac{1}{2}x^2$，则 $x^2$，$1-\cos x$，$\sqrt{1-x^2} - 1$ 是同阶无穷小，则应选(D).

**【评注】** 事实上，由 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2} = \dfrac{1}{6}$ 知，$x - \sin x$ 是关于 $x$ 的三阶无穷小量($x \to 0$).

**20.(93,3,3分)** $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\sin\dfrac{2}{x} =$ ________.

**【分析】** 原式 $= \lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{3x^2+5}{5x^2+3x}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{6}{5}$.

**【评注】** 本题主要考查极限运算法则和重要极限 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

**21.(93,4,3分)** $\lim\limits_{n \to \infty}[\sqrt{1+2+3+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}] =$ ________.

**【分析】** 原式 $= \lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{n}{\sqrt{1+2+\cdots+n}+\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}}$

$$= \lim_{n \to \infty}\frac{n}{\sqrt{\dfrac{1}{2}n(n+1)}+\sqrt{\dfrac{1}{2}n(n-1)}}$$

$$= \lim_{n \to \infty}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}+\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**【评注】** 本题主要考查求极限的基本方法，这里主要用到有理化的方法.

**22.(94,4,3分)** 曲线 $y = e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有

(A)1 条. (B)2 条.

(C)3 条. (D)4 条. 【 】

**【分析】** 由于 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{\pi}{4}$，则 $y = \dfrac{\pi}{4}$ 为该曲线的一条水平渐近线.

又
$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)} = \infty,$$
则 $x = 0$ 为该曲线的一条垂直渐近线，所以该曲线的渐近线有两条. 故应选(B).

**【评注】** 本题主要考查曲线的渐近线. 这里特别应注意 $x = -1, x = 2$ 不是该曲线的垂直渐近线，事实上 $\lim\limits_{x\to -1} y \neq \infty$， $\lim\limits_{y\to 2} y \neq \infty$.

**23.(94,4,5分)** 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})]$.

**【解】** 令 $\dfrac{1}{x} = t$，则
$$\text{原式} = \lim_{t\to 0}[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\ln(1+t)] = \lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

**【评注】** 本题主要考查洛必达法则. 但应注意本题中倒代换 $t = \dfrac{1}{x}$ 是极关键的一步.

**24.(97,4,6分)** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x} - (\dfrac{1}{x^2} - a^2)\ln(1+ax)\right]$ $(a \neq 0)$.

**【分析】** 注意本题中有一项 $a^2\ln(1+ax)$，当 $x\to 0$ 时，此项极限存在且为0，所以此项应单独提出来，剩余两项为 $\infty - \infty$ 型未定式，应先通分然后用洛必达法则.

**【解】** 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{x} - \dfrac{\ln(1+ax)}{x^2}\right) + a^2\ln(1+ax)$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{a-\dfrac{a}{1+ax}}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{a^2x}{2x(1+ax)} = \frac{a^2}{2}.$$

**【评注】** 本题主要考查运用洛必达法则求未定式极限.

**25.(98,4,6分)** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}$，$n$ 为自然数.

**【解法一】** 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{\tan x - x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$，

其中
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2 x}{x^2} = \frac{1}{3}.$$

则
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

**【解法二】** 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(1+\frac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}}\right]^{\frac{\tan x-x}{x^3}},$$

其中 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2 x}{x^2}=\frac{1}{3}.$$

故　原式 $=e^{\frac{1}{3}}$.

**【评注】** 本题主要考查 $1^\infty$ 型未定式极限的求法.注意本题不能直接用洛必达法则(即对 $n$ 求导),而应转化成相应的函数极限后才能用洛必达法则.

**26.(99,4,3分)** 设函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\underline{\qquad\qquad}.$$

**【分析】** $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}[\ln a+2\ln a+\cdots+n\ln a]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{\ln a}{2}.$$

故应填$\frac{\ln a}{2}$.

**【评注】** 本题主要考查求极限的基本方法.这里主要是利用对数的性质进行计算.

**27.(00,$\frac{3}{4}$,3分)** 设对任意的 $x$,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

(A) 存在且等于零.　　　　(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.　　　　(D) 不一定存在.　　　　【　　】

**【分析】** 排除法.

令 $$\varphi(x)=1-\frac{1}{x^2},\quad f(x)=1,\quad g(x)=1+\frac{1}{x^2},$$

显然 $$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x),$$

且 $$\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0.$$

此时 $$\lim_{x\to\infty}f(x)=1.$$

故(A)和(C)都不正确,实际上 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不一定存在.

例如:令 $\varphi(x)=x-\frac{1}{x^2}$, $f(x)=x$, $g(x)=x+\frac{1}{x^2}$,显然 $\varphi(x),f(x),g(x)$ 均满足条件,但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$,故应选(D).

**【评注】** 本题主要考查夹逼定理所适用的条件.本题很容易错选为(B).这里应特别注意,本题中的条件 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$ 推不出夹逼定理中的条件 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 存在且相等.

**28.(00,4,3分)** 若 $a>0,b>0$ 均为常数,则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\underline{\qquad\qquad}$.

**【分析】** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{3}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}=e^{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}}$.

注意 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$$
$$=\frac{1}{2}\ln(ab),$$