高等数学疑难解析

主编　刘　群　王庆丰　王有德　刘麦学　王学理
主审　邢凤轩

NEUPRESS
东北大学出版社

高等数学疑难解析

主编 刘　群　王庆丰　王有德　刘麦学　王学理

主审 邢凤轩

东 北 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学疑难解析/刘群等主编 .—沈阳：东北大学出版社，2000.9
ISBN 7-81054-544-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①刘… Ⅲ.高等数学-学习辅导-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 43653 号

内 容 提 要

本书将“高等数学”中的诸多问题进行系统归类，通过典型例题介绍方便快捷的解题方法与技巧。全书共 14 讲，其中第 8 讲与第 14 讲是期末考试模拟试题，其它 12 讲均包含基本要求、内容提要、客观题归类分析、主观题归类分析、释疑解难、测试套题和答案等七部分内容。书中大部分例题和习题选自教育部“高等教学”题库。

本书的读者对象是在读的理工科院校的学生和准备“考研”的朋友。

©东北大学出版社出版

（沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　　邮政编码 110006）
电话：（024）23890881　　传真：（024）23892538
网址：http://www.neupress.com　e-mail:neuph@neupress.com

沈阳市第六印刷厂印刷　　东北大学出版社发行

开本：787×1092　1/16　　字数：505 千字　　印张：20.25
2000 年 9 月第 1 版　　2000 年 11 月第 2 次印刷

责任编辑：刘宗玉　　责任校对：米　戎
封面设计：唐敏智　　责任出版：秦　力

定价：26.00 元

序　言

“高等数学”作为高校学生的一门重要课程，一直备受关注，谁也不敢对它掉以轻心。其主要原因有两个，其一是普遍认为它难学，内容多，题难作，学习进程布满荆棘，许多学生视其为畏途；其二是它对后继课程影响颇深，诸如概率论、物理学、电工原理等，无不以它为基础。

正因为如此，面对浩如烟海的“高等数学”习题和抽象难懂的概念，读者又往往无所措手足，迫切需要找到一条能够迅速登堂入室的路径。编写本书的目的就是帮助读者尽快领悟高等数学的真谛，掌握其特殊的学习方法。

本书将纷纭复杂的“高等数学”问题进行条分缕析，系统归类，把全部“高等数学”内容分成 12 讲，每讲都以典型例题作为切入点，介绍方便快捷的解题方法。相信读者阅后会有清心明快之感，亦可收到举一反三、触类旁通之效果。本书中的大部分例题和习题选自教育部“高等数学”题库。

上面提到的 12 讲，各讲均由基本要求、内容提要、客观题归类分析、主观题归类分析、释疑解难、测试套题和答案等七部分组成。书中各节编排的练习题和每讲的测试套题以及第 8 讲、第 14 讲的期末考试模拟试题是作者精心编选而成的，建议读者能独立完成，定有收益。

读者若能细心研读本书，领悟其要旨，一般的期末考试对您不会成为问题，就是“考研”，也会使您满意。

本书适用于在读的高等院校学生，尤其是理工科院校学生，也可作为其他“高等数学”学习者的辅导用书，对于从事“高等数学”教学工作的高校教师和有志“考研”的朋友，也是一本内容翔实的参考书。

本书是作者多年从事“高等数学”教学工作经验之总结，也是我们探讨“高等数学”解题方法与技巧所付出的汗水和心血的结晶，希望它能成为读者的知心朋友。

本书由刘群、王庆丰、王有德、刘麦学、王学理主编，邢凤轩教授主审，参加编写的还有李颖、李辉、李建华、申玉发、王新心、李红等。由于作者水平所限，书中会有不妥与错误之处，这虽然非我们所愿，但又不可避免，只好寄希望于同仁与读者的批评与指正。

作　者

2000 年 6 月 28 日

目　录

第一讲　一元函数的极限

一、基本要求

极限概念的建立给高等数学的学习奠定了第一块基石. 其基本思想将贯穿于整个高等数学的理论体系.

主要内容包括数列极限与函数极限的定义及性质，函数的左、右极限，无穷小与无穷大，无穷小的比较，极限四则运算，两个极限存在准则和两个重要极限，洛比达法则.

要求理解极限的概念，理解函数左、右极限概念以及极限存在与左、右极限之间的关系；掌握极限的性质及四则运算法则；掌握极限存在的两个准则并会用它们求极限；掌握利用两个重要极限求极限的方法；理解无穷小与无穷大及无穷小阶的概念，会用等价无穷小替换求极限；掌握用洛比达法则求未定式极限的方法.

二、内容提要

（一）　主要定义

1　$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限（也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a），记成 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

极限不存在时，说 $\{x_n\}$ 发散.

2　$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \to x_0$ 时的极限，记成 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

注　在此定义中, $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 - \delta < x < x_0$, A 称为 $f(x)$ 的当 $x \to x_0 - 0$ 时的左极限，记成

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \text{或 } f(x_0 - 0) = A, \text{类似可以定义右极限 } f(x_0 + 0).$$

3　$\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \to \infty$ 时的极限，记成 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

读者可以自己给出 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 的定义.

4　$\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷大量，记成 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. 无穷大量简称为无穷大.

读者可以自己给出 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ 等的定义.

注　当 $x \to x_0$ 和 $x \to \infty$ 时结论都成立时，以后简记成lim. 以 0 为极限的量称为无穷小量. 无穷小量简称为无穷小.

5　若 $\lim \alpha(x) = \lim \beta(x) = 0$, 且 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记成 $\alpha(x) = o(\beta(x))$；若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$，称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小；若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C(C \neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小，记成 $\alpha(x) = o(\beta(x))$，当 $C = 1$ 时，称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小，记成 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(二) 主要定理与公式

1 若$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有

$\lim[f(x)+g(x)]=A+B$，$\lim[f(x)g(x)]=AB$.

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq0)$.

2 极限存在准则

Ⅰ 单调有界数列必有极限.

Ⅱ 若$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

(准则 Ⅱ 亦称夹逼准则，对于函数也成立)

3 在同一过程中的有界变量与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的和是无穷小.

注 (1) 等价无穷小具有传递性：设α,β,γ为同一过程的无穷小，若$\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则$\alpha\sim\gamma$；

(2) 等价无穷小在求极限过程中可以进行如下替换：在同一极限过程中，若$\alpha\sim\tilde{\alpha},\beta\sim\tilde{\beta}$，且$\lim\dfrac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$存在，则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$.

4 $\lim f(x)=A$的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha(x)$，此处$\lim\alpha(x)=0$.

5 洛比达(L'Hospital)法则 $\lim f(x)=\lim g(x)=0$(或∞)，$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为∞，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

6 两个重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

7 若在$U(x,\delta)$内$f(x)\geqslant0(f(x)\leqslant0)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么$A\geqslant0(A\leqslant0)$.

8 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0(A<0)$，则必有$U(x,\delta)$使在此邻域中$f(x)>0(f(x)<0)$.

注 若$A=f(x_0)$，则$f(x)$在x_0处连续，此时结论亦真.

9 若极限存在，则其值必然惟一.

(三) 结论补充

1 若$\lim\varphi(x)=0$， 则 $\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

2 若$\lim\varphi(x)=\infty$， 则 $\lim\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$.

3 若$\lim\varphi(x)=0$， 则 $\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

注 以上三条中的$\varphi(x)$不等于0.

4 $a>0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

5 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

6 当$x\to0$时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\mathrm{e}^x-1\sim\ln(1+x)\sim\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$，$a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq1)$.

7 若$\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=\lim A(x)=\lim B(x)=0$. 且$\alpha(x)\sim A(x)$，$\beta(x)\sim$

$B(x)$，则有 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \dfrac{A(x)}{B(x)}$ 和 $\lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}} = \lim[1+A(x)]^{\frac{1}{B(x)}} = e^{\lim\frac{A(x)}{B(x)}}$.

注　分母 $\beta(x)$，$B(x)$ 不能取 0.

8　不为零的无穷小的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小.

9　$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n > m \\ \infty, & n < m \end{cases}$

10　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k} = e^{\frac{(b-c)h}{a}}$

11　设 $\lim\varphi(x) = 1$，$\lim\psi(x) = 0$，$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 可导，且 $\lim \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\psi'(x)}$ 存在，则

$$\lim\varphi(x)^{\frac{1}{\psi(x)}} = \exp\lim\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\psi'(x)}.$$

注　$\varphi(x)$，$\psi(x)$，$\psi'(x)$ 曾不为零.

12　设 $\lim\alpha \doteq \lim\beta = 0$，且 $\alpha - \beta \neq 0$，则

$$\ln(1+\alpha) - \ln(1+\beta) \sim 2(\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{1+\beta}) \sim \alpha - \beta$$

三、客观题归类分析

（一）　是非题

凡属是非题，都是先给出一种断言或运算.解此种题目时，要求对认为正确的给出证明或提出根据；认为不对的举出反例或指明弊端.以后不再一一说明.

【例1】　对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2n}\to a\ (n\to\infty)$，$x_{2n-1}\to a\ (n\to\infty)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$.

【解】　是.这是一个很重要的结论，以后可以作为定理来使用.可以证明如下：$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N_1 > 0$，当 $n > N_1$ 时，恒有 $|x_{2n} - a| < \varepsilon$；$\exists N_2$，当 $n > N_2$ 时，恒有 $|x_{2n-1} - a| < \varepsilon$.取 $N = \max\{2N_1, 2N_2\}$，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$.

【例2】　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-2^{-\frac{1}{x}}}{1+2^{-\frac{1}{x}}} = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$.

【解】　非.运算之所以是错误的，原因在于没有注意到 $x\to0$ 时，虽然 $\dfrac{1}{x}$ 是无穷大，但是，$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} = \lim_{x\to0^+}\frac{1-2^{-\frac{1}{x}}}{1+2^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

实际上 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ 是不存在的.

【例3】　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$不存在，故$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$不存在.

【解】 非.此题不满足使用洛比达法则的条件，实际上这个极限是存在的：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1$$

读者尚须注意，洛比达法则只是求未定式的一种方法，但不是所有未定式皆可用此法则得出结果.如在求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$时，应用洛比达法则有

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$产生循环，求不出结果，实际上，此极限是存在的.$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=1$.

【例 4】 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在.

【解】 是.利用反证法：假设$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)-f(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$也应存在，与已知条件矛盾.故$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在.

【例 5】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}=3\lim\limits_{x\to+\infty}(1+3^x)^{\frac{1}{x}}=3\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(1+3^x)^{\frac{1}{3^x}}\right]^{\frac{3^x}{x}}=+\infty$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+3^x)^{\frac{1}{3^x}}=e$.

【解】 非.认为$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+3^x)^{\frac{1}{3^x}}=e$是错误的.因为左端并不是$1^\infty$型的未定式.

实际上 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}=9\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{3^x}\right)^{3^x}\right]^{\frac{1}{3^x x}}=9$.

这是因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{3^x}\right)^{3^x}=e$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3^x x}=0$.

读者要记住，以 e 为极限的两个标准形式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$和$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$都是$1^\infty$型未定式.

练　　习 1-1

辨析下列各题

1　若当 n 越大时，$|x_n-a|$越小，则必有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2　无界变量必为无穷大.

3　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(e^{2x}-1)'}{(e^{2x}+1)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{2x}}{2e^{2x}}=1$.

4　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}x}{\lim\limits_{x\to1}(1-x)}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

5　因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x+2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{-\sin x\ln(1+x)+(1+\cos x)/(1+x)}$

右端不存在,故左端也不存在.

(二) 填空题

【例 1】 $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x-2)-\ln(x+1)]=[\qquad]$.

【解】 应填 -3.因为

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^x=\ln e\exp\left(\frac{-2-1}{1}\right)\cdot 1=-3.$$

【例 2】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=[\qquad]$.

【解】 应填$\dfrac{1}{3}$.因为$\lim\limits_{n\to\infty}(-\dfrac{2}{3})^n=0$,故

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3}^n)+\frac{1}{3}}{(-\frac{2}{3}^{n+1})+1}=\frac{1}{3}.$$

【例 3】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^p}=\dfrac{1}{2}$,则 $p=[\qquad]$

【解】 应填 3.因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^p}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^p}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(\cos x)x^{p-1}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^{p-1}}.$$

故 $p-1=2$,因此 $p=3$.

【例 4】 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-x\sin\dfrac{1}{x}\right)=[\qquad]$.

【解】 应填$\dfrac{1}{6}$.因为可令$\dfrac{1}{x}=t$.则

$$原式=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{6}t^3}{t^3}=\frac{1}{6}.$$

【例 5】 $\lim\limits_{x\to0+}x^x=[\qquad]$.

【解】 应填 1.因为,原式 $=\exp\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\exp\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=e^0=1$.

练　习　1-2

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin3x}=[\qquad]$.

2 $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=[\qquad]$.

3 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{\sin^2x}=[\qquad]$.

4 设 $a>0$,则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}=[\qquad]$

5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4}{1-2^{\frac{1}{\tan x}}}=[\qquad]$.

(三) 选择题

【例 1】 下列各式不正确的是[　　　].

(A) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$; (B) $\lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0$;

(C) $\lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$; (D) $\lim\limits_{x\to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

【解】 应选择 A. 因为 B, C 都是正确的, 故 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

【例 2】 下列各式正确的是[　　　].

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; (B) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$;

(C) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; (D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e$.

【解】 应选择 C. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} \doteq \exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x} = e^0 = 1$. 令 $x = \dfrac{1}{t}$, 立刻可得 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$ 是显然的.

【例 3】 设 $0 < a < b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n} =$ [　　　].

(A) a; (B) b; (C) 1; (D) $a+b$.

【解】 应选择 B. 因为 $\sqrt[n]{a^n+b^n} = b\left[1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$, 故原极限值为 b.

【例 4】 求下列极限时, 能使用洛比达法则的是[　　　].

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; (B) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; (D) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.

【解】 应选择 D. 因为此极限为 $\infty\cdot 0$ 型, 又 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$.

(C) 不存在, 注意 $x\to\infty$ 包含 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情形. (A)、(B) 不满足洛比达法则的条件.

【例 5】 当 $x\to 0$ 时, 变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是[　　].

(A) 无穷小; (B) 有界的, 但非无穷小;

(C) 无界的, 但非无穷大; (D) 无穷大.

【解】 应选择 C. 当 $x\to 0$ 时, $\dfrac{1}{x^2}$ 是无穷大量, 而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$. 有界变量与无穷大的乘积并不一定是无穷大. 实际上, $\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x = \dfrac{1}{2k\pi}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 时, 其值为 0; 当 $x = \dfrac{1}{2k\pi+\frac{1}{2}\pi}$ (k

$=0,1,2,\cdots$) 时，其值为 1. 故当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 既不是无穷小量，又不是无穷大量，也不是有界变量. 它是无界的.

练　　习　1-3

1　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 的值是〔　　〕.

(A)　1;　　(B)　∞;　　(C)　0;　　(D)　不存在.

2　无穷大量与有界量的关系是〔　　〕.

(A)　无穷大量可能是有界量;　　(B)　无穷大量一定不是有界量;

(C)　有界量可能是无穷大量;　　(D)　不是有界量就一定是无穷大量.

3　下面运算正确的是〔　　〕.

(A)　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0$;

(B)　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\cos x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos x}{\sin x}$ 不存在，故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在.

(C)　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{x}}{\cos x}=1$;

(D)　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1\cdot 1=1$.

4　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=$〔　　〕.

(A)　0;　　(B)　1;　　(C)　不存在;　　(D)　∞.

5　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{|x|}-1}{x}=$〔　　〕.

(A)　1;　　(B)　-1;　　(C)　0;　　(D)　不存在.

四、主观题归类分析

(一)　利用代数方法求极限

【例 1】　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)!}$.

【解】　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+2-1}{(k^2+3k+2)k!}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+2)!}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right]=\frac{3}{2}.$$

【例 2】　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}{(n+1)+2(n+2)+\cdots+n(n+n)}$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)}{n(1+2+3+\cdots+n)+(1+2^2+3^2+\cdots+n^2)}$.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\Big/\left(1-\dfrac{1}{2}\right)}{n\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{2}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}} = \frac{12}{5}.$$

【例 3】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$, $(|x|<1)$.

【解】 此题应设法变形,否则很难计算.可以乘以因子 $\dfrac{1-x}{1-x}$.

原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

【例 4】 设 $x_n = \left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2n}}\right)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【解】 可以从例2 和例 4 的解法中得到启发:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)x_n = \left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right) = 1-\frac{1}{2^{2n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n+1}}\right) = \frac{4}{3}.$$

【例 5】 已知数列$\{x_n\}$:$x_1=a, x_2=b, x_n=\dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}, n=3,4,\cdots$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【解】 $x_1=a, x_2=b$,

$$x_2-x_1=b-a,\ x_3-x_2=\frac{x_1+x_2}{2}-x_2=\frac{x_1-x_2}{2}=-\frac{b-a}{2},$$

$$x_4-x_3=\frac{x_3+x_2}{2}-x_3=\frac{x_2-x_3}{2}=\frac{b-a}{2^2},$$

$$\vdots$$

$$x_n-x_{n-1}=(-1)^{n-2}\frac{b-a}{2^{n-2}},$$

$$x_n = x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})$$

$$= a+(b-a)\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}\right]$$

$$= a+(b-a)\left[\frac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\dfrac{1}{2}}\right].$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a+\dfrac{2}{3}(b-a) = \dfrac{a+2b}{3}$.

练 习 1-4

1 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2[e^{(2+\frac{1}{n})}+e^{(2-\frac{1}{n})}-2e^2]$. 提示 提取 $e^{(2-\frac{1}{n})}$.

2 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

3 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$.

4 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

5 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}}$ (共有 n 个根号).

(二) **利用定义或准则研讨极限**

【例 1】 证明 $\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$.

【证明】 在证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的时候,应设法从 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 不等式出发,推出与之等价或较强的不等式 $M|x-x_0|<\varepsilon$,即 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{M}$ $M>0$.这样,只要取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$ 就可以了.本题可以从 $|5x+2-12|<\varepsilon$ 推出与之等价或较强的不等式 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$,于是取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$ 即可.现将本题证明书写如下:$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$,则当 $0<|x-2|<\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$ 时,

$$|5x+2-12|=5|x-2|<5\cdot\delta=5\cdot\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon.\text{故}\lim_{x\to2}(5x+2)=12.$$

【例 2】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

【解】 令 $\sqrt[n]{n}=1+h_n$ $(h_n>0)$,则

$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\dfrac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n>\dfrac{n(n-1)}{2}h_n^2$.即 $0<h_n<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$.

令 $n\to\infty$,则 $h_n\to0$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

实际上,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ 可以看成极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$ 的一种特例,即取 x 为正整数列,而对于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$ 是很容易利用洛比达法则求得其极限的.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=e^0=1.$$

另外,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 是一个很重要的结论,它在以后的学习中还会用到.

【例 3】 已知 $x_1=\sqrt{a}$,$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$,$x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$,$\cdots$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(a>0)$.

【解】 这是一个单调增加且有界的数列,显然 $x_{n-1}<x_n$;

又 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$,于是 $x_n^2=a+x_{n-1}$.

$$x_n=\frac{a}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n}<\frac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1,\text{故 } x_n \text{ 有界}.$$

由极限存在准则 Ⅰ,知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.不妨假定 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}(a+x_{n-1})$,得 $A^2=a+A$,解得 $A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

由于 $a>0$,故负值舍去.最后得 $A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

【例 4】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

【解】 因为 $(2n-1)(2n+1)<(2n)^2$,记 $x_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.则

$$0 < x_n^2 = \frac{(1\cdot 3)\cdot(3\cdot 5)\cdot(5\cdot 7)\cdot(7\cdot 9)\cdots(2n-3)(2n-1)(2n-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n-2)^2\cdot(2n)^2}$$

$$< \frac{2n-1}{(2n)^2} \to 0,$$

由准则 Ⅱ, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0$.

练　　习 1-5

1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

2 $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$.

4 设 $x_1 > a > 0$, 且 $x_{n+1} = \sqrt{ax_n} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

5 设 $a_i > 0(i = 1,2,\cdots,m)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}}$.

(三) 利用两个重要极限公式求极限

这里所说的两个重要极限公式是指 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. 当然, 在解题过程中也可以利用其变形, 例如, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x} = 1$ 等.

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (a>0, b>0, c>0, a\neq 1, b\neq 1, c\neq 1)$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\cdot\frac{1}{x}}$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x} = \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right] = \frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)$

$$= \frac{1}{3}\ln(abc)$$

故原式 $= \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln(abc)} = (abc)^{\frac{1}{3}}$.

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]\cdot\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}.$$

注　此题若用公式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k} = \mathrm{e}^{\frac{(b-c)h}{a}}$, 有 $a=2, b=3, c=1, h=1, k=1$.

立刻得到原式 $= \mathrm{e}^{\frac{(3-1)\cdot 1}{2}} = \mathrm{e}$.

【例 3】 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\frac{4x}{x-1}}$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to 1}\left[\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}\right]^{\frac{4x}{x+1}}$

$$= \left[\lim_{x\to1}\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to1}\frac{4x}{x+1}} = e^2.$$

【例 4】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{x+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}+\ln\dfrac{x+2}{x+1}\right]$

$= \ln e - \ln e + \ln 1 = 0.$

【例 5】 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\left[\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right]}{\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}\cdot x\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x} = \ln e^3 = 3.$

练　　习　1-6

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.　　2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}$.

3 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$.　　4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{2x+1}$.

5 设 a, b 为常数,且 $a>0$,求

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{ax})\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)$,　提示　原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b\ln(1+e^{ax})}{x}$.

(四)　利用等价替换求极限

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{\sin^4 2x}$.

【解】 这是呈 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式,若使用洛比达法则计算会相当麻烦且很容易出现错误,但如果先做等价无穷小替换,则会简捷得多.

因为 $\sin^4 2x \sim (2x)^4$,故

原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{(2x)^4} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2x+2xe^{-x^2}}{64x^3}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1+e^{-x^2}}{32x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2xe^{-x^2}}{64x} = -\dfrac{1}{32}.$

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

【解】 这又是 $\dfrac{0}{0}$ 型,当 $x\to0$ 时,$x\sin x\to0$.故

$\sqrt{1+x\sin x}-1 \sim \dfrac{1}{2}x\sin x \sim \dfrac{1}{2}x^2,\quad e^{x^2}-1\sim x^2.$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

【例 3】 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0, f'(0)=2$. 试求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{(1-\cos x)-0}\cdot\dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}$

$$= f'(0)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\tan^2 x} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

注　不能把 $f(1-\cos x)$ 中的 $1-\cos x$ 换成 $\frac{1}{2}x^2$. 此外还应注意，加减关系一般不能替换. 例如，在求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ 时，有人认为既然 $\sin x \sim x$ 就应有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3} = 0.$$

很明显这个结果是不对的，此种替换是行不通的，但在一定条件下加减法关系也可替换，请看下例.

【例 4】 求 $\lim\limits_{x\to 1}[1+\tan(x-1)]^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to 1}[1+\tan(x-1)]^{\frac{1}{\ln[1+(x-1)]}}$

$$= \lim_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}} = \mathrm{e}.$$

注意　这里使用了前面内容提要中补充的公式，利用此公式可以简化许多计算，例如

1　$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{-1}$.

2　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\tan x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}} = \mathrm{e}$.

3　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x - x}}\right]^{\frac{\sin x - x}{x^3}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

注意　这里 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x} = 0$, $x - \sin x \sim \dfrac{1}{6}x^3$.

【例 5】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x + \mathrm{e}^x) - x}{\ln(\mathrm{e}^{2x} - x^2) - 2x}$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x + \mathrm{e}^x) - \ln\mathrm{e}^x}{\ln(\mathrm{e}^{2x} - x^2) - \ln\mathrm{e}^{2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{\mathrm{e}^x}\right)}{\ln\left(1-\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x/\mathrm{e}^x}{-x^2/\mathrm{e}^{2x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot(\mathrm{e}^x) = -1.$$

练　习　1-7

1　$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2^x}{\ln(1+2x)} - \dfrac{1}{\ln(1+2x)}\right]$.　　2　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x + \mathrm{e}^x) - x}{\ln(x^2 + \mathrm{e}^{2x}) - 2x}$.

3　$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{x^3} - 1}{1 - \cos\sqrt{x - \sin x}}$.　　4　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\cos x}}{x\sin x}$.

5　$a>0, a\neq 1$，求 $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\right)$，　提示　先提取 $a^{\frac{1}{x+1}}$.