普通中学四年一貫制課本

解析几何和微積分初步

北京师范大学数学系教材編写組

科学技术出版社

普遍中学四年一貫制課本

解析几何和微积分初步

北京师范大学数学系
教材编写組

科学技术出版社
1959年·北京

总号：1189

普通中学四年一貫制课本 [illegible] 几何和微积分初步

编　著：北京师范大学数学系教材编写组
出版者：科　学　技　术　出　版　社
（[illegible]）
北京市書刊出版業營業許可証出字第091号
發行者：新　華　書　店
印刷者：北　京　市　印　刷　一　厂
（北京市西直門南大道乙1号）

开　本：787×1092 1/32　　印張：7 [illegible]
1959年2月第1版　　字数：120,000
1959年2月第1次印刷　　印数：12,450

統一書号：13051·231
定　价：（8）7角4分

目　次

第一篇　解析几何

(一)平面解析几何

(二)空間解析几何

第二篇　微积分初步

第一篇　解析几何

(一)平面解析几何

第一章　平面上点的坐标及其运用

§1. 直綫上点的坐标

学过地理都知道，張家口、宣化、北京、天津在一条鉄路綫上，宣化距北京大約一百二十公里，天津距北京也大約一百二十公里，今有"和平号"机車由北京开往張家口，行走了一百二十公里，那末我們可以估計到机車已到宣化。但如果不說由"北京开往張家口"，而只說由北京开車走了一百二十公里，那么就难确定，机車开到什么地方，它可能开到宣化，但也可能开到天津，因为这兩地与北京相距都是一百二十公里。可見"开往張家口"就确定了机車行走的方向，而走了一百二十公里，就确定了机車与北京的距离。

圖 1

代数中学过数軸(这里，我們用 OX 表示它)。数軸上任一点 P，为了确定其位置，必須知道，P点在点O的左方或右方及P点与O点的距离。

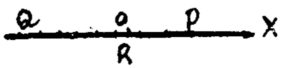

圖 2

正如前述，要确定机車位置，必須知道机車的运行方向及与北京

的距离一样。

数軸上的点分成兩类，一类全在点 O 之左，另一类全在点 O 之右。在軸上取定一点 P，則点 P 与点 O 的距离是确定的，且点 P 在点 O 的左边还是右边也是确定的。反之一点 P 与点 O 的距离已定，且在点 O 的左或右也知道时，那末点 P 的位置可以完全确定。

P 点在 O 点之右，与 O 点之距离为 3，則 OP 可用 3 表示。Q 点在 O 点之左，与 O 点之距离为 5，則 OQ 可用 -5 表示。反过来，若給我們一个数 3，那么我們可以在原点之右，且与原点距离为 3 的地方找到一点 P；若給我們一个数 -5，那么我們可以在原点之左，与原点距离为 5 的地方，找到一点 Q。

对以上事实加以总結，可以看出：軸上任意一点，我們都可以找到一个数和它对应。反过来，任給定一个数，我們在軸上只可以找到一个点和它对应。可見軸上的点与数之間建立了一一对应的关系。

任意一点 P，对应着一个数 x，我們把数 x 称为 P 点的坐标記作 $P(x)$。

例如：Q 点的坐标为 -5，原点 O 的坐标则为 0。已知直綫上兩点的坐标，就可以求直綫上兩点間的距离。P_1、P_2 为 X 軸上兩点；P_1P_2 兩点間的距离用 $|P_1P_2|$ 表示。設 P_1 的坐标为 x_1，P_2 的坐标为 x_2，則 $|P_1P_2| = |OP_2 - OP_1| = |x_2 - x_1|$（圖 3）。

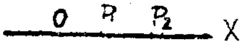

圖 3

§2 有向綫段

如果軸上綫段的一个端点看作是綫段的始点，另一个端点看作是它的終点，那么这个具有方向的綫段就叫做有向綫

段。由始点到終点的方向，叫做有向綫段的方向。如果A是有向綫段的始点，B是終点，則有向綫段記作$\overline{AB}$。（圖 4）

圖 4

有向綫段AB的長度記作$|AB|$。

兩有向綫段若長度相等，方向相同，則我們把这兩有向綫段叫做相等的有向綫段。

显然 $\overline{BA}=-\overline{AB}$。

为确切地表示出有向綫段的特征，有必要引入**“有綫向段的大小”**的概念。

軸上的任一点P，就决定了一有向綫段$\overline{OP}$。

有向綫段的大小是一个数，这个数，可以是正数也可以是負数：如果有向綫段与其所在軸同向則其大小为正数；反之，則为負数，这个数的絕对値就是有向綫段的長度，有向綫段$\overline{AB}$的大小記作AB。

例 有向綫段AB的長度$|AB|=8$又$\overline{AB}$与軸同向，故$\overline{AB}$的大小$AB=8$，有向綫段CB的長度$|CB|=3$，又$\overline{CB}$与軸的正方向相反，故$\overline{CB}$的大小$CB=-3$。同理，$BA=-8$，$BC=3$，$CD=-1$，$DC=2$（圖 5）。

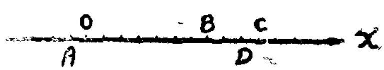

圖 5

归納得：

$$AB=8,\ BA=-8,\ AB=-BA=8,\ |AB|=|BA|=8;$$
$$DC=1,\ CD=-1,\ DC=-CD=1,\ |DC|=|CD|=1;$$
$$BG=3,\ CB=-3,\ BC=-CB,\ |BC|=|CB|=1.$$

§ 3. 平面上点的坐标

在代数中，我們已学过了直角坐标系的初步知識。平面

上直角坐标系的建立，使平面上的点与数之間有了这样的关系；任取平面上的一点 P，都有确定的坐标 (x, y)，也即有一对有序❶的数和它对应；反过来，任給一对有序实数 (x, y)，就唯一地确定了一点 P，可見平面上的点与有序实数組之間建立了一一对应的关系。

例如給定平面上一点 Q 則它就有确定的坐标，設为 $(2, 3)$，反过来，給定一对有序实数 $(2,3)$，則只能确定平面上的一点 Q，（使其坐标为 $(2,3)$ 即 Q 点与 $(2,3)$ 是一一对应的关系。

坐标广泛地应用于解决生产航海中的有关問題。例如，为了确定城市河流的高山等的位置，我們假想在地球表面刻上緯綫及經綫，这样如果某地区的經緯度知道，那末这个地区就可以很确切地說出来。（严格地說由于地面是个球面，經緯度并不是直角坐标。）

平面上建立直角坐标系以后，坐标軸把平面分成四个部分，每一部分叫做**象限**。由兩坐标都为正的象限开始，逆时針的方向，依次用Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ来表示四个象限。

設点 M 的坐标为 (x, y)，則 M 随 x, y 符号的不同，M 所在象限就不同，今列表如下：

坐标 \ 象限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

❶ 例：(3,2)一对数：就决定一个点，其横标为 3、縱标为 2，而(2,3)一对数，就决定另一点，該点横标为 2，縱标为 3。

可見这兩个数，有次序的关系，我們把这种有次序的关系的数組，叫做有序的数。

§ 4. 兩点間的距离

学过地理以后，我們知道，北京位于东經 116.4°，北緯 39.9°；天津位于东經117.2°，北緯39.2°。又知道在北緯40°到 39° 間，經度相差一度，就相差 85 公里；緯度相差一度，相差 110 公里。

我們是否能根据上述条件，求出北京到天津有多远呢？学过本节就能解决这样的問題。

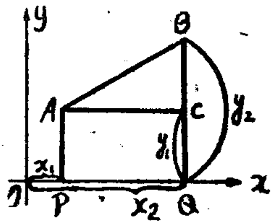

圖 6

設 A、B 兩点的坐标分別为 (x_1, y_1) (x_2, y_2)，且在第 I 象限（圖 6），过 A 作 $AP \perp X$ 軸于 P，过 B 作 $BQ \perp X$ 軸于 Q，过 A 作 $AC \perp BQ$ 于 C，則得直角三角形 ABC，由勾股弦定理，則 $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$。

但 $|AC| = |PQ| = |x_2 - x_1|$ （$\because ACQP$ 是矩形），

$|BC| = |BQ| - |CQ| = |y_2 - y_1|$。

$\therefore |AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$。

則
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

兩点間的距离，永远是正数，因此根号前只取正号。

当 A，B 在其他象限时，（1）仍成立，讀者自証。

我們找出用已知点坐标求出兩点間距离的公式，就不难解决我們开始时提出的問題：

北京：东經 116.4°；北緯39.9°，

天津：东經 117.2°，北緯 39.2°.

那么天津距离东經 116°的經綫为 $x_1 = 0.2 \times 85$ 公里，

天津距离北緯 39° 的緯綫为 $y_1 = 0.2 \times 110$ 公里。

北京距离东經 116° 的經綫为 $x_2 = 0.4 \times 85$ 公里，

北京距离东經 116° 的經綫为 $y_2 = 0.9 \times 110$ 公里。

∴北京与天津間的距离为

$$d=\sqrt{(1.2\times85-0.4\times85)^2+(0.2\times110-0.9\times110)^2}\text{ 公里}$$

$$=\sqrt{(0.8\times85)^2+(0.7\times110)^2}\text{ 公里}=\sqrt{(68)^2+(77)^2}\text{ 公里}$$

$$=1103\text{ 公里（大約）.}$$

§ 5. 綫段的定比分点

在工業上往往要求物体的重心。求重心的方法很多，在解析几何中是用坐标的办法确定其重心坐标。試看下例：

有 A 球質量为 m_1，B 球質量 m_2，用一桿子把它們串起来，不計桿子的重量，我們求其重心，即要支持在什么地方才能平衡。

要解决类似这样的問題，学过綫段定比分点后，就很容易解决。

（1） 直綫上的定比分点

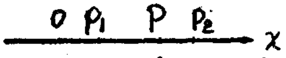

圖 7

在 OX 軸上有一定綫段 $\overline{P_1P_2}$，$P_1(x_1)$，$P_2(x_2)$，現要再找一点 $P(x)$，使所分兩有向綫段 $\overline{P_1P}$、$\overline{PP_2}$ 的大小，为事先給定的比值 λ，即 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$（$\lambda$ 为不等于 1 的任意实数）。

$$P_1P=x-x_1,\quad PP_2=x_2-x,$$

$$\therefore\quad \frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,\quad x-x_1=\lambda x_2-\lambda x,$$

$$x(1+\lambda)=x_1+\lambda x_2,\qquad \therefore\quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

当 P 为 $\overline{P_1P_2}$ 的中点时，显然有 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$.

（2）平面上的定比分点

設平面上有一有向綫段$\overline{P_1P_2}$，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，現要找一点$P(x,y)$，分有向綫段$\overline{P_1P_2}$为$\overline{P_1P}$，$\overline{PP_2}$兩部分，且使$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，$\lambda$为事先給定的任意不等于1的实数。

設P已找出，其坐标为(x,y)，分别过P_1、P、P_2作X軸垂綫，交X軸于M_1、M、M_2（圖8），根据平面几何学知道：$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}$。

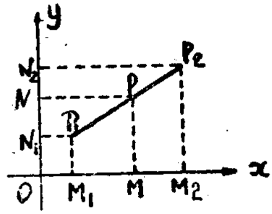

圖 8

根据"直綫上的定比分点"，知道分点M在X軸上的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

分别过P_1，P，P_2，作Y軸的垂綫，交Y軸于N_1，N，N_2，

同理有
$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

故分点P的坐标：

$$x=\frac{x_1+\lambda X_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

显然，当P点是$\overline{P_1P_2}$的中点时，$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$

这样一来，我們开始提出的問題，就很容易解决。

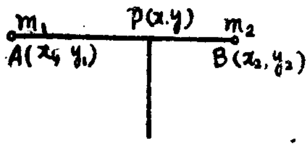

圖 9

設支撑点$P(x,y)$为所求（圖9），A的坐标(x_1,y_1)为已知，因A球固定；B的坐标(x_2,x_2)为已知，因B球也固定．从物理学知道：$m_1AP=m_2\cdot PB$

$$\therefore\ \frac{AP}{PB}=\frac{m_2}{m_1}\quad 即\ \lambda=\frac{m_2}{m_1}.$$

$$故\ P\ 的坐标\ x=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_1}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2};$$

$$y=\frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

習 題 一

1.定出下列各点的位置:

i)$A(0,2)$; ii)$B(2-3)$; iii)($\sqrt{2}$,1); (iv) 以縱軸为对称軸，作出与已知点 $A(4,-3)$相对称的一点，并写出它的坐标。

2.在坐标面上，作出下列各点，已知其坐标为:

$x=3,y=5$; $x=-2,y=0$; $x=2,y=-4$; $x=0,y=3$; $x=\sqrt{2},y=1$.

3.試求与点(3,—5)对于第一象限角的平分綫对称的点.

4.某菱形，边長等于5;对角綫之一長 6 . 如果把它的兩对角綫当着坐标軸，求它的四頂点的坐标。

5.已知一正六边形的边長等于 a，如果原点在它的中心而横軸經过它的兩个相对的頂点，試求这个正六边形的頂点的坐标。

6.动点从点$A(3,2)$沿直綫方向移动 12 單位至 B 点，其运动方向向右方与 ox 軸成 $60°$ 角; 求B 点的坐标。

7.已知力 P关于兩坐标軸的分力順次是$P_x=5,P_y=12$; 求它的大小和方向。

8.設有三力 P、Q、S 运用于同一点且关于兩坐标軸的分力順次是 $P_x=3, P_y=8; Q_x=4, Q_y=6; S_x=5, S_y=-5$。求其合力的大小。

9.試求与点$(-4,3)$,$(4,2)$,$(1,-1)$等距离的点。

10.試求与点$(1,3)$,$(0,6)$,$(-4,1)$等距离的点。

11.試在 OY 軸上求与点$(0,5)$和$(4,2)$等距离的点。

12.在从原点出發并經过点$M(4,3)$的射綫上，求距原点的距离等于 9 的点 P。

13.一重心在点 $M(5,1)$ 的均匀的桿，它的一端与点 $A(-1-3)$相合，求另端的位置。

14.求三角形的頂点，已知它的边的中点为：$P(3,-2)$,$Q(1,6)$和$R(-4,2)$。

15.已知平行四边形的三个頂点：$A(4,2)$,$B(5,7)$和$C(-3,4)$。求对頂点 B 的第四个頂点D。

16.把点 $A(3,2)$ 和 $B(15,6)$ 間的綫段分成三等分，求分点的坐标。

17.試求把 $P_1(-2,3)$ 和 $P_2(4,6)$ 兩点之間的綫段分为 2:3 的点。

18.已知一点分$(0,2)$和$(8,0)$兩点間的綫段所成的比，与从原点到这兩点的距离之比相同，試求此点。

19.試証：直角三角形的直角頂与斜边中点的連綫，必等于斜边的一半。

20.在 $A(-1,0)$, $B(-2,4)$, $C(4,-5)$三点上分別置放 30,50 和 70 克重量。試求这一物系的重心的坐标。

提示：先求三点中任意兩点，例如 A 和 B 的重心M，再求M点与 C 点的重心。

21.已知匀質的三角薄片的重心是在其中綫的交点上，

試用这个薄片的頂点的坐标(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，来表达重心的坐标。

第二章 直 綫

坐标法的应用不只限于解决平面上点的位置，它被广泛地用来解决复杂的几何圖形問題。現在我們从最簡單的圖形直綫开始。

§6. 直綫方程的概念

从平面几何知道，与两定点 A_1,A_2 有相等距离的点，在 A_1A_2 的中垂綫上，且 A_1A_2 中垂綫上的点与 A_1 和 A_2 的距离相等，因此，一綫段的中垂綫可看作是与两定点有相等距离的动点移动所留下的痕跡·在解析几何中，我們把依一定規則移动所留下的痕跡，叫做动点的軌跡。

例 已知两点 $A_1(2,4)$和 $A_2(6,-2)$，A_1A_2 的垂直平分綫是 l（圖 10），以下我們研究直綫 l 上点的坐标間的关系。

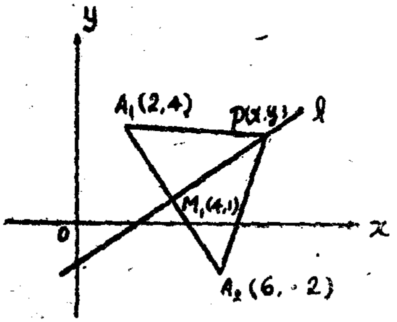

圖 10

在直綫 l 任取一点 $P(x,y)$，由于 l 是 A_1A_2 的垂直平分綫，所以以下等式成立：

$$|A_1P| = |A_2P|, \quad (1)$$

又
$$|A_1P| = \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2};$$

$$|A_2P| = \sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2}.$$

代入(1)得: $\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2}$.

$$(2)$$

方程(2)两端平方化簡得:

$$2x-3y-5=0. \qquad (3)$$

方程(3)表出了直綫 l 上的点的坐标間关系。因为当 P 点移动时，坐标 (x,y) 也随着改变，也就是說坐标 (x,y) 是变量，我們称 x,y 为**流动坐标**。

关系式(3)叫作直綫 l 的**方程**。

为了說明直綫与它的方程之間的关系，在直綫 l 上再找一点 $M_1(x_1,y_1)$，已知 M_1 是 A_1A_2 之中点，由中点公式求出 M 的坐标是 $(4,1)$，將 $(4,1)$ 代入(3)得:

$$2\times4-3\times1-5=0,$$

所以 M_1 点的坐标滿足方程(3)。

在直綫 l 外任取一点 $M_2(2,4)$，將 M_2 点的坐标代入(3)得:

$$2\times2-3\times4-5=-13.$$

所以 M_2 点的坐标不滿足方程(3)。

由上得出以下結論:

(i)直綫上的点的坐标必滿足直綫的方程;

(ii)不在直綫上的点，其坐标不滿足直綫的方程，即坐标滿足于直綫方程的点必在直綫上。

§7. 平行于坐标軸的直綫方程

在坐标軸上任取一点 $N(2a,0)$，現以坐标原点 O 及 N 为兩定点(圖11)，求与此兩定点等距离的点的軌跡。

显然該軌跡是一条直綫。設 $P(x,y)$ 为直綫 l 上 1 的任一点則 $|PN|=|PO|$.

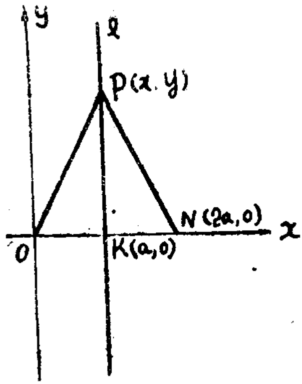

圖 11

即 $$\sqrt{(x-2a)^2+(y-o)^2}=\sqrt{x^2+y^2}. \quad (4)$$

方程(4)兩端平方化簡得:

$$x=\frac{4a^2}{4a}=a. \quad (5)$$

(5)表示与 Y 軸的距离等于 a 且平行于 Y 軸的直綫方程，显然与 X 軸距离等于 b，且平行于 X 軸的直綫方程为 $y=b$. 由此不难推出：X 軸的方程为

$$y=0;$$

Y 軸的方程为

$$x=0.$$

§ 8. 直綫方程的几种形式

(一)直綫方程的斜截式

設直綫 l 与 Y 軸交于 $B(0,b)$，且与 OX 軸成傾斜角 φ*（φ 不等于 0° 或 90°），求直綫 l 的方程.

---

* 直綫与 X 軸正向的夾角 φ 叫做直綫的傾斜角。$\tan\varphi$ 叫做直綫的斜率

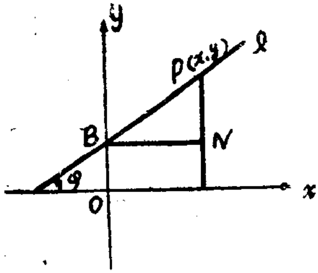

圖 12

在直綫 l 上任取一点 $P(x,y)$（圖12），由点 B、点 P 引直綫分别平行于 OX 軸和 OY 軸，交点为 N。

则 $$\frac{NP}{BN}=\operatorname{tg}\varphi;$$

或 $$NP=BN\operatorname{tg}\varphi.$$

又 $$NP=y-b, BN=x.$$

代入上面等式，得

$$y-b=x\operatorname{tg}\varphi$$

用 k 代替 $\operatorname{tg}\varphi$，移項，得

$$y=kx+b. \qquad (6)$$

方程（6）叫做直綫的**斜截式方程**，k（$\tan\varphi$）叫做直綫方程的**斜率**（角系数），b 是直綫的**縱軸截距**。

例 1 求过$(2,-5)$点且对 X 軸的傾斜角是$45°$的直綫方程。

解 設 $y=kx+b$ 是所求直綫的方程。

根据題設直綫与 OX 軸成$45°$的角，

所以

$$k=\operatorname{tg}45°=1.$$

又因为点$(2,-5)$在直綫上，

所以

$$-5=2+b$$

$$\therefore \quad b=-7.$$

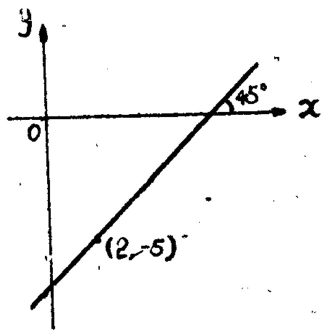

圖 13

所求直綫方程为 $y=x-7$.